

Petit patchwork de combinatoire énumérative

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI, Bordeaux

<http://www.labri.fr/~bousquet>

Résumé de l'épisode précédent

- Approche récursive ; équations sur les séries génératrices
- Approche bijective
- L'exemple des arbres binaires et des chemins de Dyck : équations algébriques/ lemme cyclique
- Quelques mystères algébriques

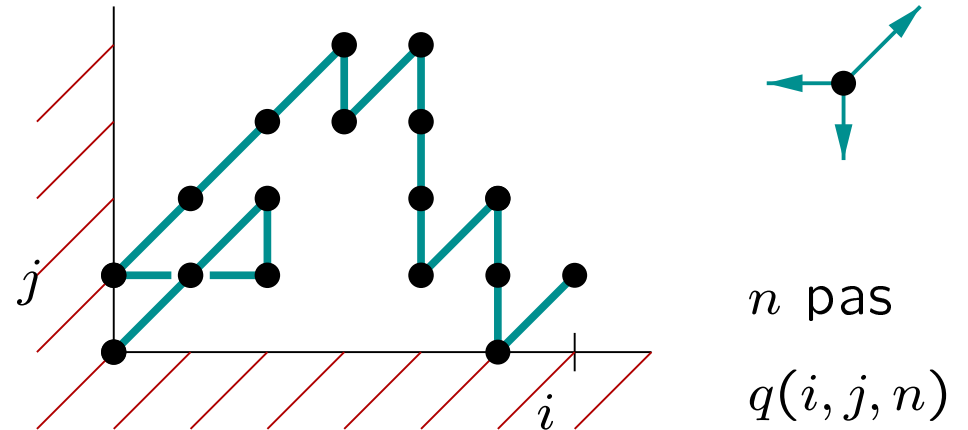
Il était une fois...

Triangulations

et chemins dans un quart de plan

Chemins “de Kreweras” dans un quart de plan

$$Q(u, v; t) := \sum_{i, j, n} q(i, j; n) u^i v^j t^n$$

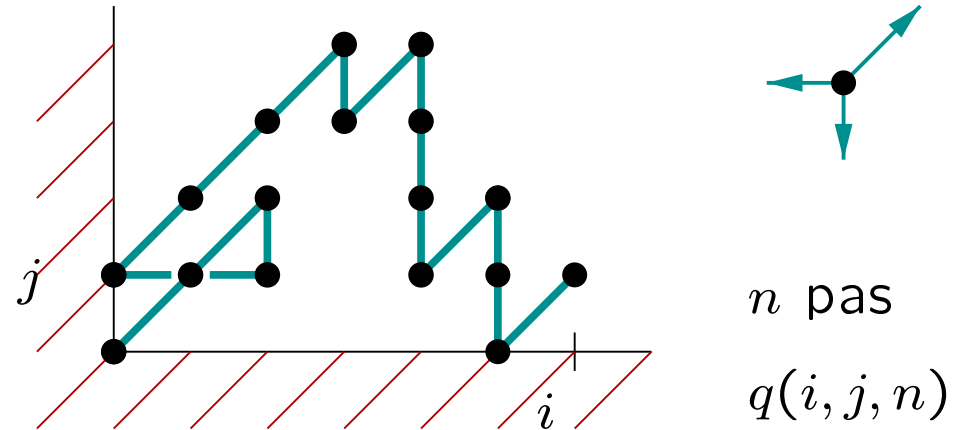


- Pourquoi $Q(u, v; t)$ est-elle algébrique ? Soit $W = t(2 + W^3)$. Alors

$$Q(u, v; t) = \frac{(1/W - \bar{u}) \sqrt{1 - uW^2} + (1/W - \bar{v}) \sqrt{1 - vW^2}}{uv - t(u + v + u^2v^2)} - \frac{1}{uvt}.$$

Chemins “de Kreweras” dans un quart de plan

$$Q(u, v; t) := \sum_{i, j, n} q(i, j; n) u^i v^j t^n$$



- Pourquoi $Q(u, v; t)$ est-elle algébrique ? Soit $W = t(2 + W^3)$. Alors

$$Q(u, v; t) = \frac{(1/W - \bar{u}) \sqrt{1 - uW^2} + (1/W - \bar{v}) \sqrt{1 - vW^2}}{uv - t(u + v + u^2v^2)} - \frac{1}{uvt}.$$

- Pourquoi $q(i, 0; n)$, le nombre de chemins finissant en $(i, 0)$, est-il si simple ?

$$q(i, 0; 3n + 2i) = \frac{4^n (2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n}$$

[Kreweras 65], [Niederhausen 83], [Gessel 86],
 [MBM 04], [Bernardi 05, en préparation]

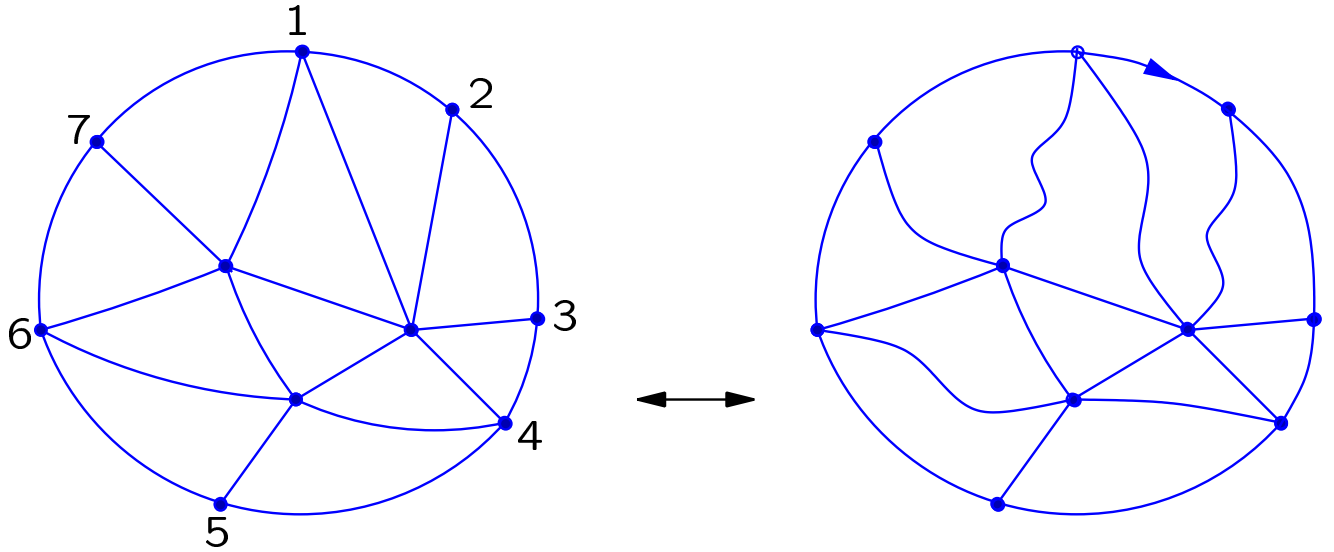
Triangulations d'un polygone

Polygone à i côtés

n triangles

$t(i, n)$

$$T(u; t) = \sum_{i, n} t(i + 2, n) u^i t^n$$



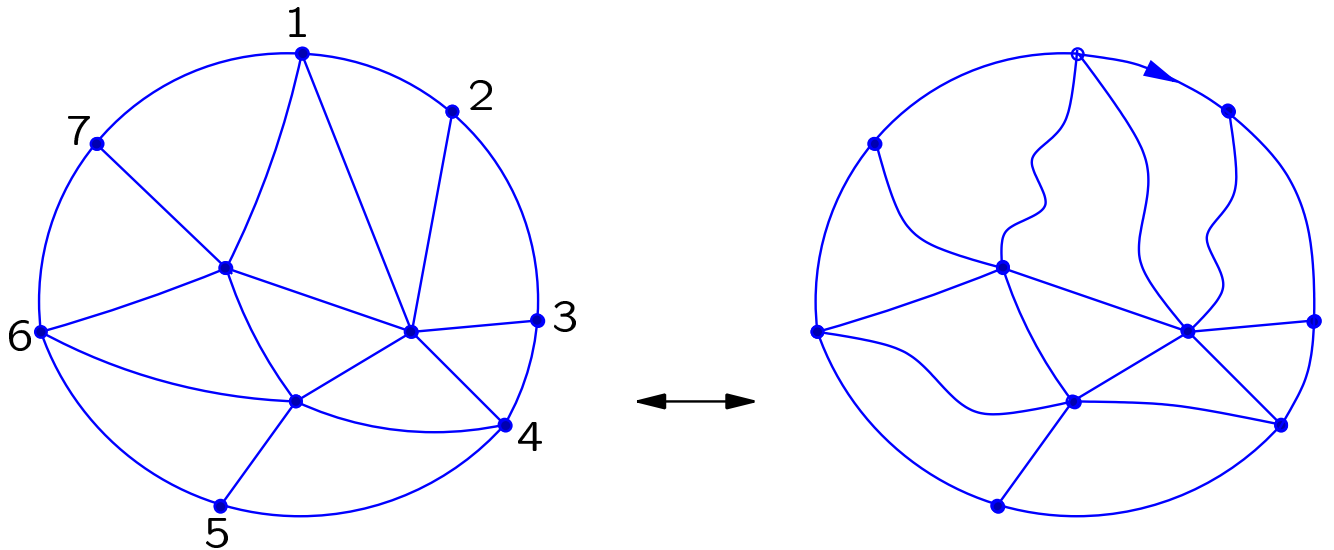
Triangulations d'un polygone

Polygone à i côtés

n triangles

$t(i, n)$

$$T(u; t) = \sum_{i, n} t(i + 2, n) u^i t^n$$



- Pourquoi $T(u; t)$ est-elle algébrique ?
Soit U tq. $U(0) = 0$ et $U = t + 2U^3$. Alors

$$T(u; t) = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{u}{t} - 1 - \left(\frac{u}{U} - 1 \right) \sqrt{1 - 4uU^2/t} \right).$$

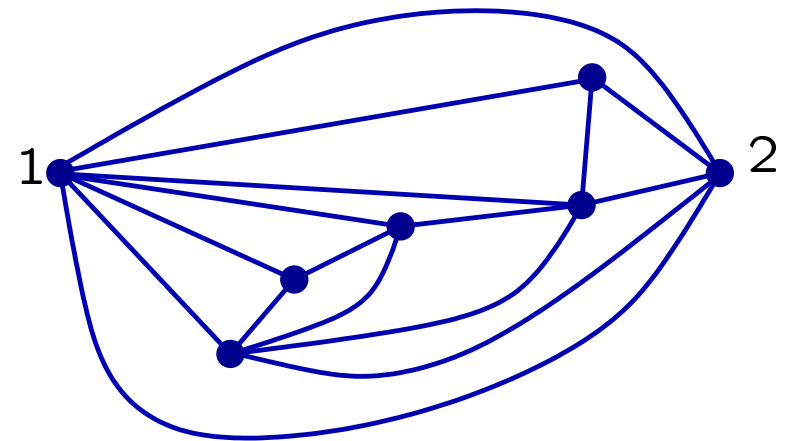
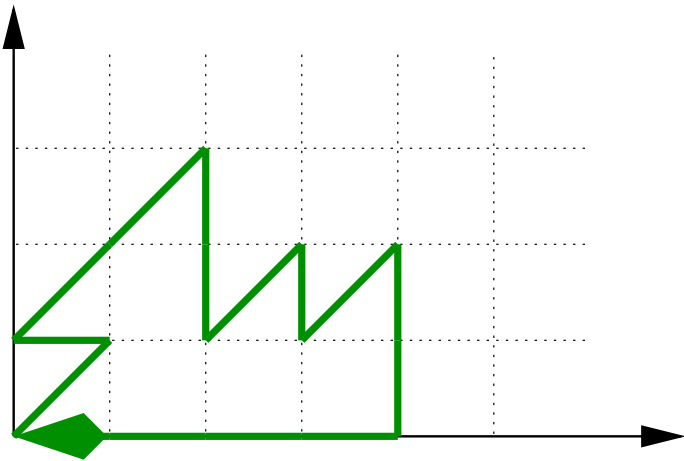
- Pourquoi $t(i, n)$ est-il si simple ?

$$t(i + 2, 2n + i) = \frac{2^n (2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n}$$

Chemins et triangulations...

$$\begin{aligned} q(i, 0; 3n + 2i) &= 2^n t(i + 2, 2n + i) \\ &= \frac{4^n (2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n} \end{aligned}$$

Exemple : pour $i = 0$



A. Énumération récursive des triangulations

[Mullin 65]

Séries génératrices

- Pour $i \geq 2$, soit $t(i, n)$ le nombre de triangulations d'un polygone à i côtés en n triangles

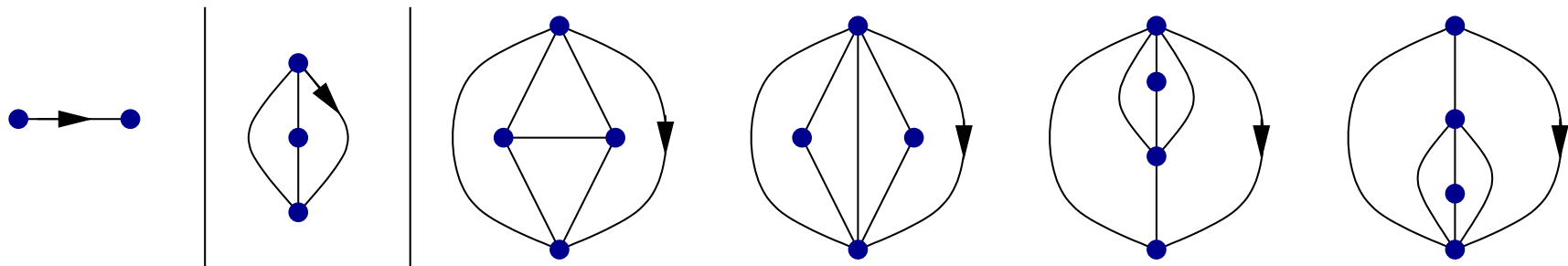
- Soit $T(t, u)$ la série génératrice associée :

$$\begin{aligned} T(u, t) &= \sum_{i, n \geq 0} t(i+2, n) t^n u^i \\ &= \sum_{i \geq 0} u^i T_i(t) \end{aligned}$$

- En particulier,

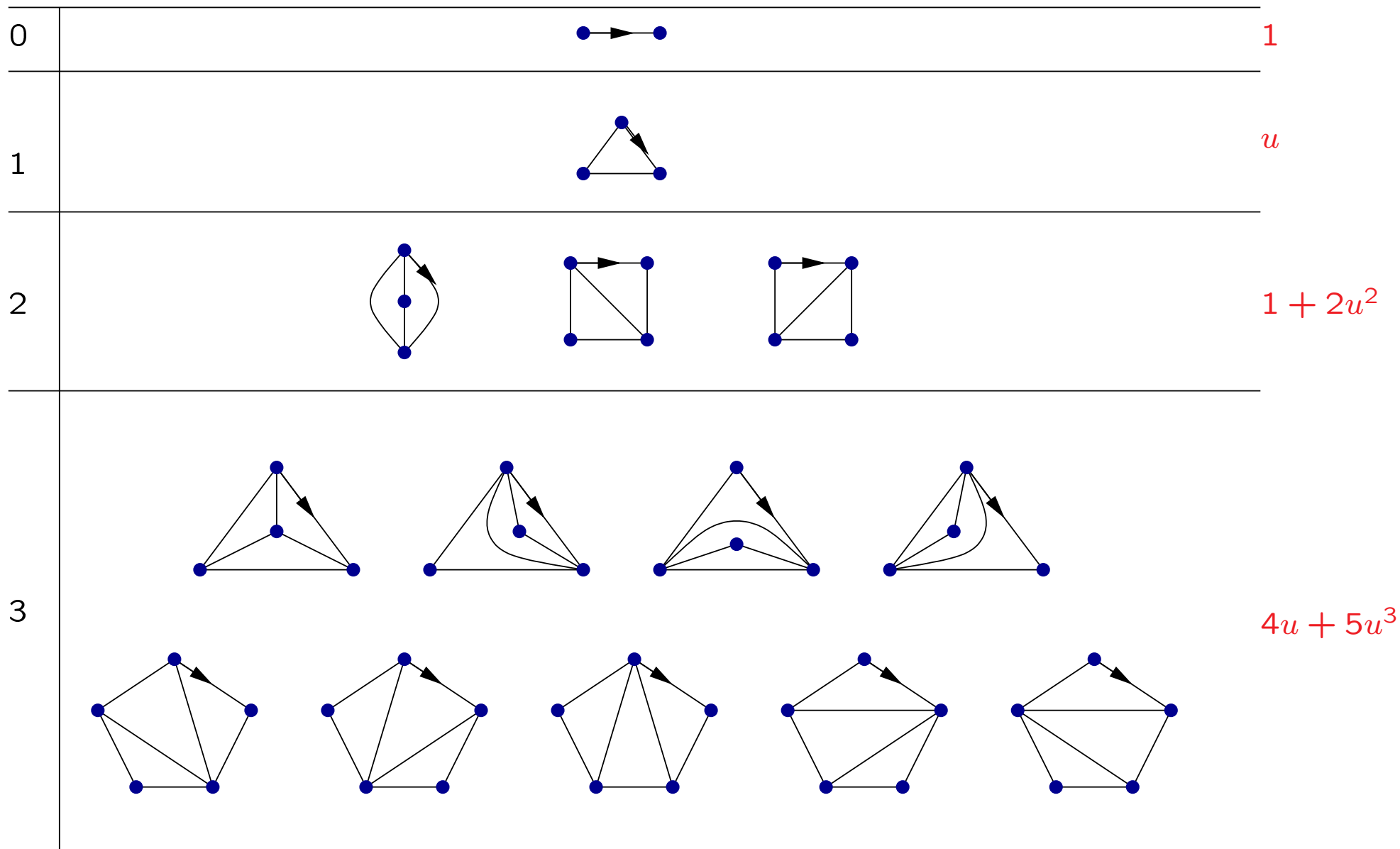
$$T(0, t) = T_0(t) = 1 + t^2 + 4t^4 + O(t^6)$$

compte les triangulations d'un digone.



Notation : $T(u, t) \equiv T(u)$ et $T_i(t) \equiv T_i$

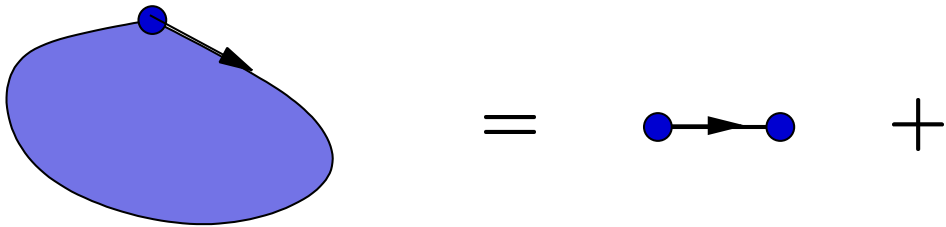
Nombre de triangles



$$T(u, t) = 1 + tu + t^2(1 + 2u^2) + t^3(4u + 5u^2) + t^4(4 + 15u^2 + 14u^4) + O(t^5)$$

Une équation fonctionnelle

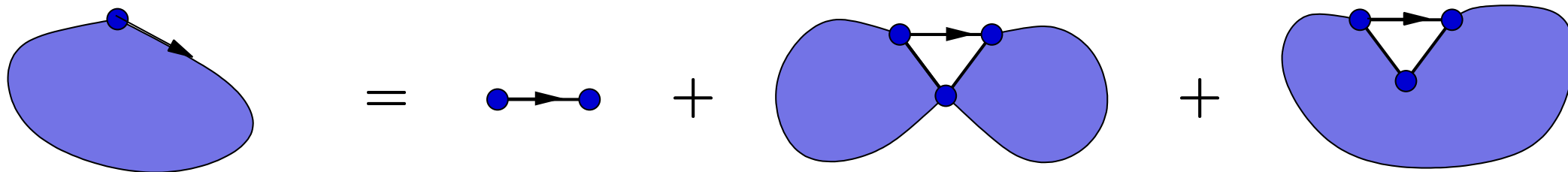
T_i : Polygones à $i + 2$ côtés



$$T_i = 1_{i=0} +$$

Une équation fonctionnelle

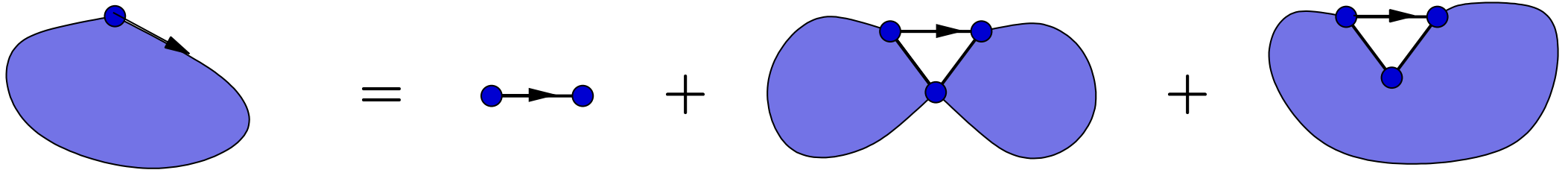
T_i : Polygones à $i + 2$ côtés



$$T_i = \mathbf{1}_{i=0} + \dots$$

Une équation fonctionnelle

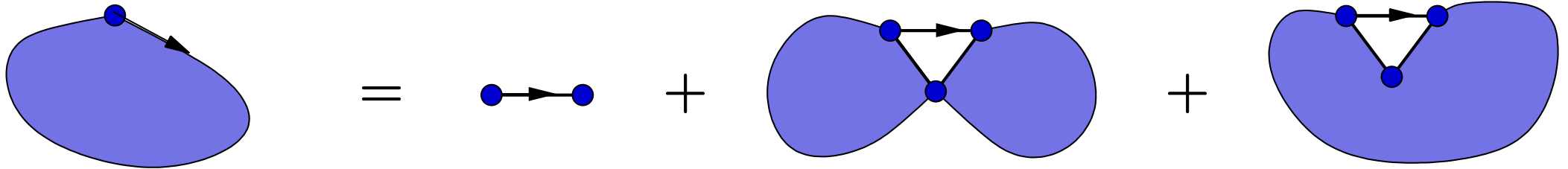
T_i : Polygones à $i + 2$ côtés



$$T_i = \mathbf{1}_{i=0} + t \sum_{k+l=i-1} T_k T_l + \dots$$

Une équation fonctionnelle

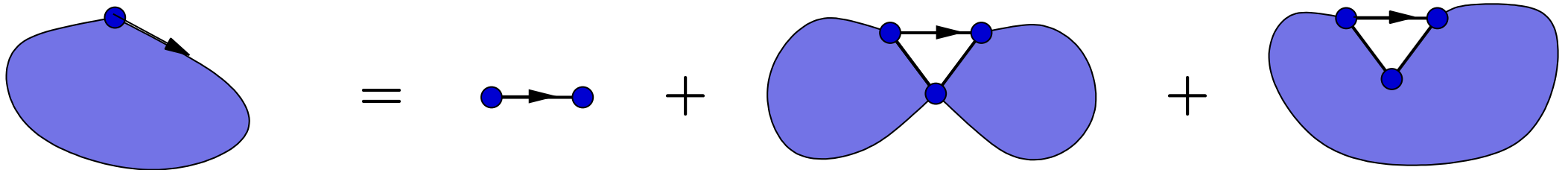
T_i : Polygones à $i + 2$ côtés



$$T_i = \mathbf{1}_{i=0} + t \sum_{k+l=i-1} T_k T_l + t T_{i+1}$$

Une équation fonctionnelle

T_i : Polygones à $i + 2$ côtés



$$T_i = \mathbf{1}_{i=0} + t \sum_{k+l=i-1} T_k T_l + t T_{i+1}$$

$$T(u) = 1 + tu T(u)^2 + t \frac{T(u) - T(0)}{u}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i \geq 0} T_i u^i$$

Une équation fonctionnelle *bizarre*

$$T(u) = 1 + tuT(u)^2 + t \frac{T(u) - T(0)}{u}$$

- Faire $u = 0$?

Une équation fonctionnelle *bizarre*

$$T(u) = 1 + tuT(u)^2 + t \frac{T(u) - T(0)}{u}$$

- Faire $u = 0$?
- La “récurrence” sur les T_i n’en est pas une :

$$T_0 = 1 + tT_1, \quad T_1 = tT_0^2 + tT_2, \quad T_2 = 2tT_0T_1 + tT_3, \dots$$

Elle ne définit complètement les T_i qu’en tant que *séries formelles* en t

Une équation fonctionnelle *bizarre*

$$T(u) = 1 + tuT(u)^2 + t \frac{T(u) - T(0)}{u}$$

- Faire $u = 0$?

- La “réurrence” sur les T_i n’en est pas une :

$$T_0 = 1 + tT_1, \quad T_1 = tT_0^2 + tT_2, \quad T_2 = 2tT_0T_1 + tT_3, \dots$$

Ne définit complètement les T_i qu’en tant que *séries formelles* en t

- Pourquoi la solution est-elle donc algébrique ?

$$T(u; t) = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{u}{t} - 1 - \left(\frac{u}{U} - 1 \right) \sqrt{1 - 4uU^2/t} \right),$$

avec U tq. $U(0) = 0$ et $U = t + 2U^3$.

La “méthode quadratique” de Brown tirée au clair

- On part d’une équation

$$P(T(u), T_0, t, u) = 0$$

où $P(x, y, t, v)$ est un polynôme, $T(u) \equiv T(u; t)$ une série formelle en t à coefficients polynomiaux en u et $T_0 = T(0)$.

- Pour toute série $U \equiv U(t)$ telle que
 - la série $T(U) \equiv T(U, t)$ est bien définie,
 - $\frac{\partial P}{\partial x}(T(U), T_0, t, U) = 0$,

on a

$$\frac{\partial P}{\partial v}(T(U), T_0, t, U) = 0.$$

Et bien sûr

$$P(T(U), T_0, t, U) = 0.$$

Cas des triangulations

- Équation de départ :

$$P(T(u), T_0, t, u) = uT(u) - u - tu^2T(u)^2 - t(T(u) - T_0) = 0$$

- Première dérivée :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(T(u), T_0, t, u) = u - 2tu^2T(u) - t$$

⇒ Il existe une (unique) série formelle $U \equiv U(t)$ telle que

$$U = t + 2tU^2T(U; t)$$

Donc on a

$$P(T(U), T_0, t, U) = UT(U) - U - tU^2T(U)^2 - t(T(U) - T_0) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(T(U), T_0, t, U) = U - 2tU^2T(U) - t = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial v}(T(U), T_0, t, U) = T(U) - 1 - 2tUT(U) = 0$$

⇒ 3 équations algébriques liant les séries $T(U)$, T_0 et U .

Série génératrice des triangulations

- Soit $U \equiv U(t)$ l'unique série formelle en t telle que $U(0) = 0$ et

$$U = t + 2U^3.$$

Alors

$$T(u; t) = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{u}{t} - 1 - \left(\frac{u}{U} - 1 \right) \sqrt{1 - 4uU^2/t} \right)$$

- Développement en $u \Rightarrow$ SG des polygones à $i + 2$ côtés :

$$T_i = \frac{U^{2i+1}}{t^{i+2}} (tC_i - U^3C_{i+1})$$

où $C_i = \binom{2i}{i} / (i + 1)$ est le $i^{\text{ème}}$ nombre de Catalan.

Le nombre de triangulations

Formule d'inversion de Lagrange

Soit $\Phi(t)$ une série formelle, et $U \equiv U(t)$ l'unique série sans terme constant telle que

$$U = t\Phi(U)$$

Alors pour $N > 0$, $k > 0$, le coefficient de t^N dans U^k est :

$$[t^N]U^k = \frac{k}{N}[t^{N-k}] (\Phi(t)^N)$$

Preuve : double comptage d'arbres généraux par l'approche récursive et le lemme cyclique.

Le nombre de triangulations

Formule d'inversion de Lagrange

Soit $\Phi(t)$ une série formelle, et $U \equiv U(t)$ l'unique série sans terme constant telle que

$$U = t\Phi(U) \qquad U = \frac{t}{1 - 2U^2}$$

Alors pour $N > 0$, $k > 0$,

$$[t^N]U^k = \frac{k}{N}[t^{N-k}](\Phi(t)^N) = \frac{k 2^n}{k + 2n} \binom{k + 3n - 1}{n} \text{ si } N = k + 2n$$

Puisque

$$T_i = \frac{U^{2i+1}}{t^{i+2}} (tC_i - U^3C_{i+1}),$$

alors

$$t(i + 2, 2n + i) = \frac{2^n(2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n}$$

Un peu de recul :

Équations polynomiales à *une* variable catalytique

Soit $T(u; t) = \sum_i T_i(t)u^i$ une série formelle en t à coefficients polynomiaux en u , définie par une équation “bien fondée” de la forme

$$P(T(u), T_0, T_1, \dots, T_k, t, u) = 0.$$

Alors $T(u; t)$ est algébrique.



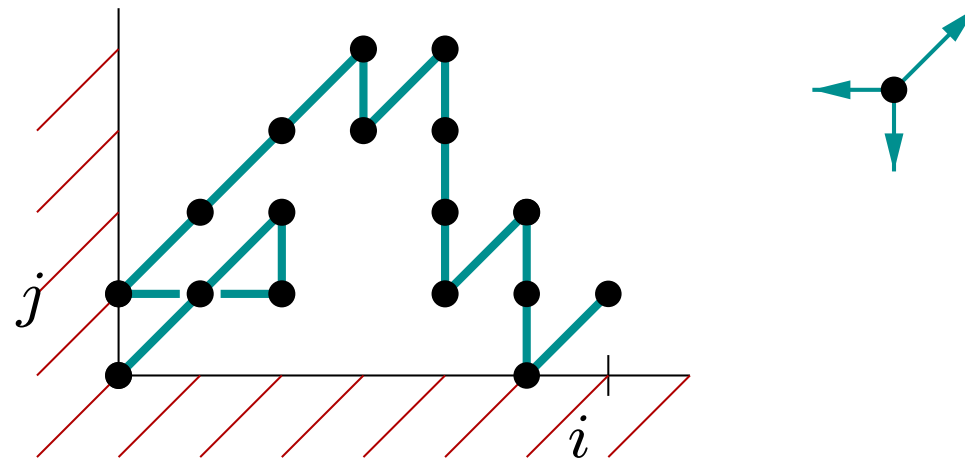
⇒ Nouveau critère d’algébricité

⇒ Application à de très nombreuses familles de cartes (et autres).

B. Énumération récursive des chemins de Kreweras

(ébauche)

[Kreweras 65], [Niederhausen 83], [Gessel 86],
[mbm 04]



Séries génératrices

- Pour $i, j, n \geq 0$, soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins de K . de longueur n finissant en (i, j)
- Soit $Q(x, y; t)$ la série génératrice associée :

$$Q(x, y; t) = \sum_{i, j, n \geq 0} q(i, j; n) x^i y^j t^n$$

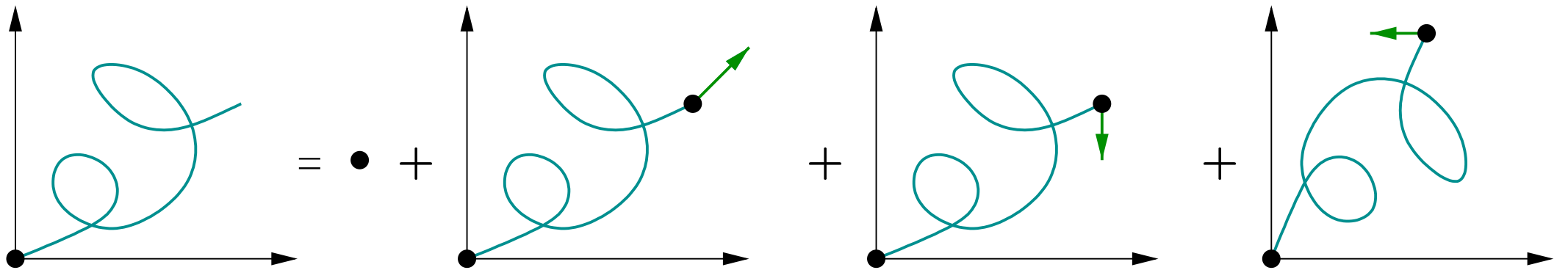
- En particulier,

$$Q(x, 0; t) = \sum_{i, n \geq 0} q(i, 0; n) x^i t^n$$

compte les chemins finissant sur l'axe horizontal.

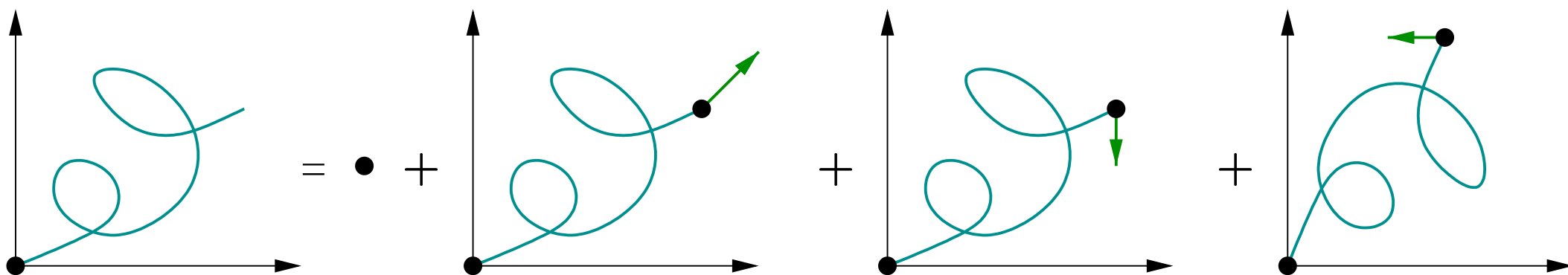
Notation : $Q(x, y; t) \equiv Q(x, y)$

Une équation fonctionnelle



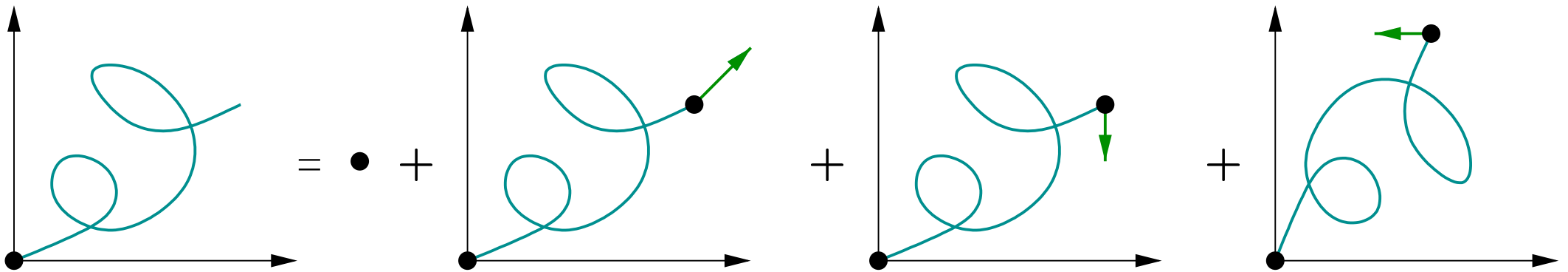
Une équation fonctionnelle

$$Q(x, y) = 1 +$$



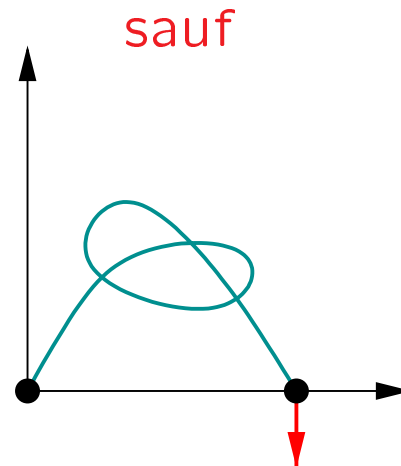
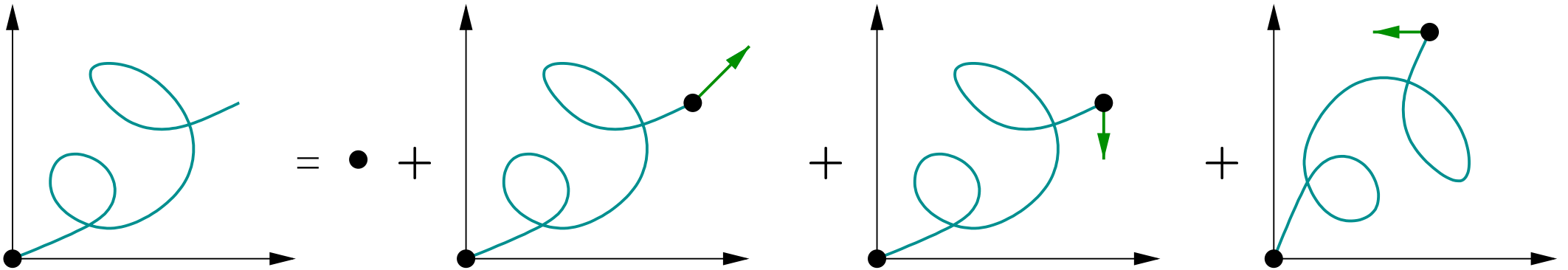
Une équation fonctionnelle

$$Q(x, y) = 1 + Q(x, y) \text{ txy} +$$



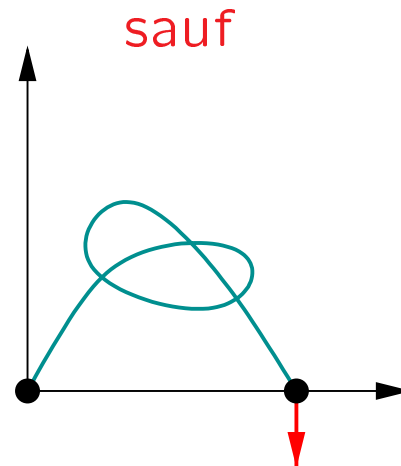
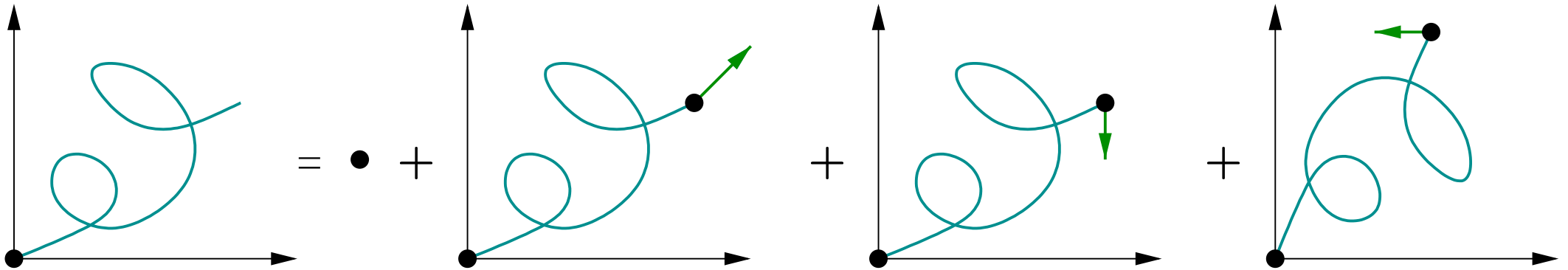
Une équation fonctionnelle

$$Q(x, y) = 1 + Q(x, y) txy + \frac{t}{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) +$$



Une équation fonctionnelle

$$Q(x, y) = 1 + Q(x, y) txy + \frac{t}{y}(Q(x, y) - Q(x, 0)) + \frac{t}{x}(Q(x, y) - Q(0, y))$$

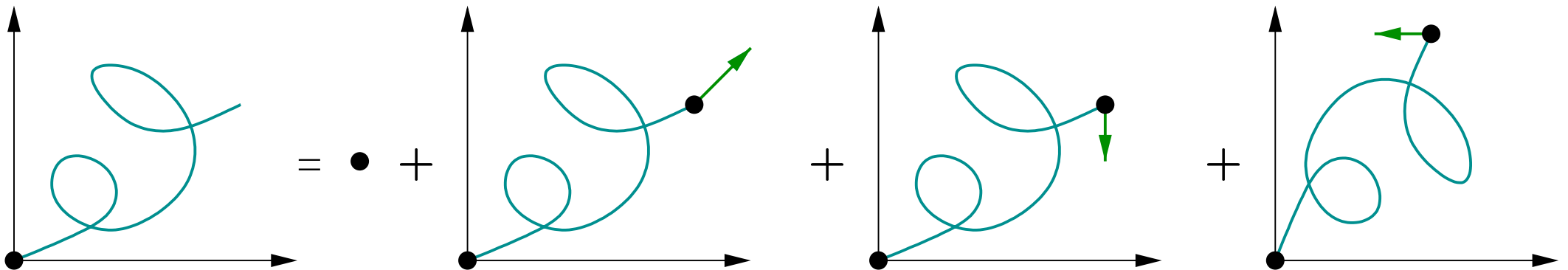


Une équation fonctionnelle *bizarre*

$$(xy - t(x + y + x^2y^2))Q(x, y) = xy - txQ(x, 0) - tyQ(0, y)$$

Équation linéaire à *deux* variables catalytiques, u et v

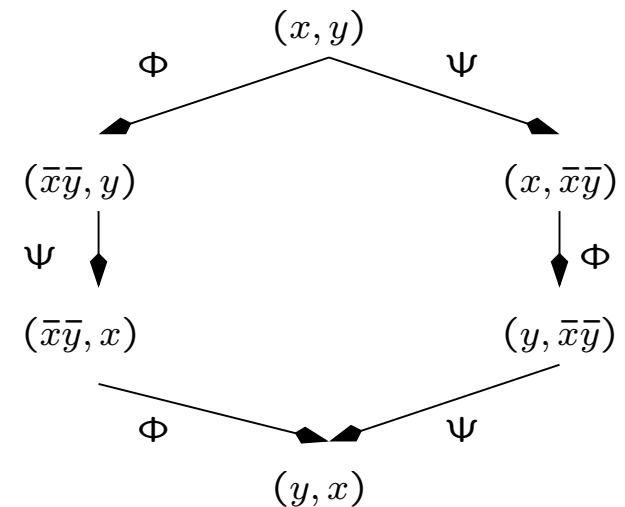
Pourquoi la solution est elle algébrique ?



Quelques ingrédients de la preuve

$$(xy - t(x + y + x^2y^2))Q(x, y) = xy - txQ(x, 0) - tyQ(0, y)$$

- Chercher à annuler le *noyau* $(xy - t(x + y + x^2y^2))$
- Le *groupe* associé à ce noyau est fini (ordre 6)
- Les fonctions symétriques des racines Y_0 et Y_1 du noyau ne contiennent que des puissances négatives de x



$$Y_0 + Y_1 = \frac{\bar{x}}{t} - \bar{x}^2 \quad \text{et} \quad Y_0Y_1 = \bar{x}$$

avec $\bar{x} = 1/x$.

Un peu de recul :

Équations linéaires à *deux* variables catalytiques (ou plus)

Chemins dans le quart de plan

Chemins de Kreweras :

$$(xy - t(x + y + x^2y^2))Q(x, y) = xy - txQ(x, 0) - tyQ(0, y)$$

Pas Nord, Sud, Est, Ouest :

$$(xy - t(x + y + x^2y + xy^2))Q(x, y) = xy - txQ(x, 0) - tyQ(0, y)$$

- Chercher à annuler le *noyau* (coefficient de $Q(x, y)$)
- Étudier le *groupe* associé au noyau

⇒ La solution n'est **pas toujours algébrique** (chemins N,S,E,O), mais elle est (peut-être) **holonome** dès que le groupe est fini.

[Fayolle, Iasnogorodski, Malyshev 99]

C. Triangulations et chemins du quart de plan :

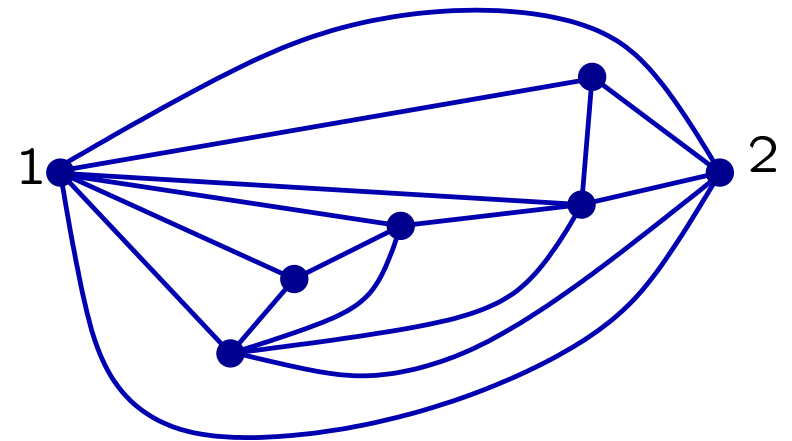
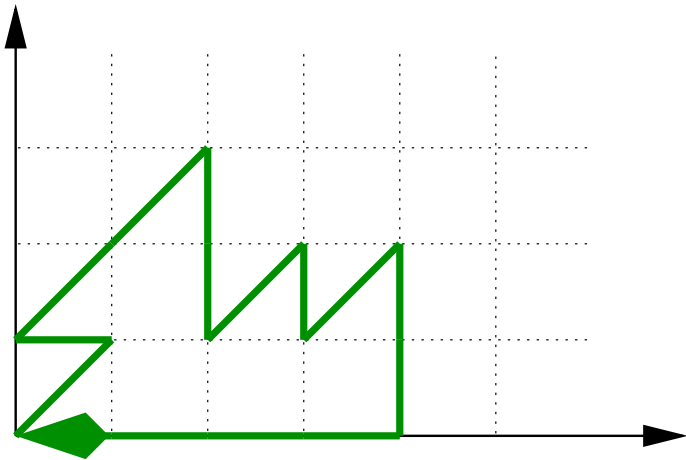
Un lien combinatoire

[Bernardi 05]

Objectif

Expliquer combinatoirement les *deux* identités suivantes (cas $i = 0$):

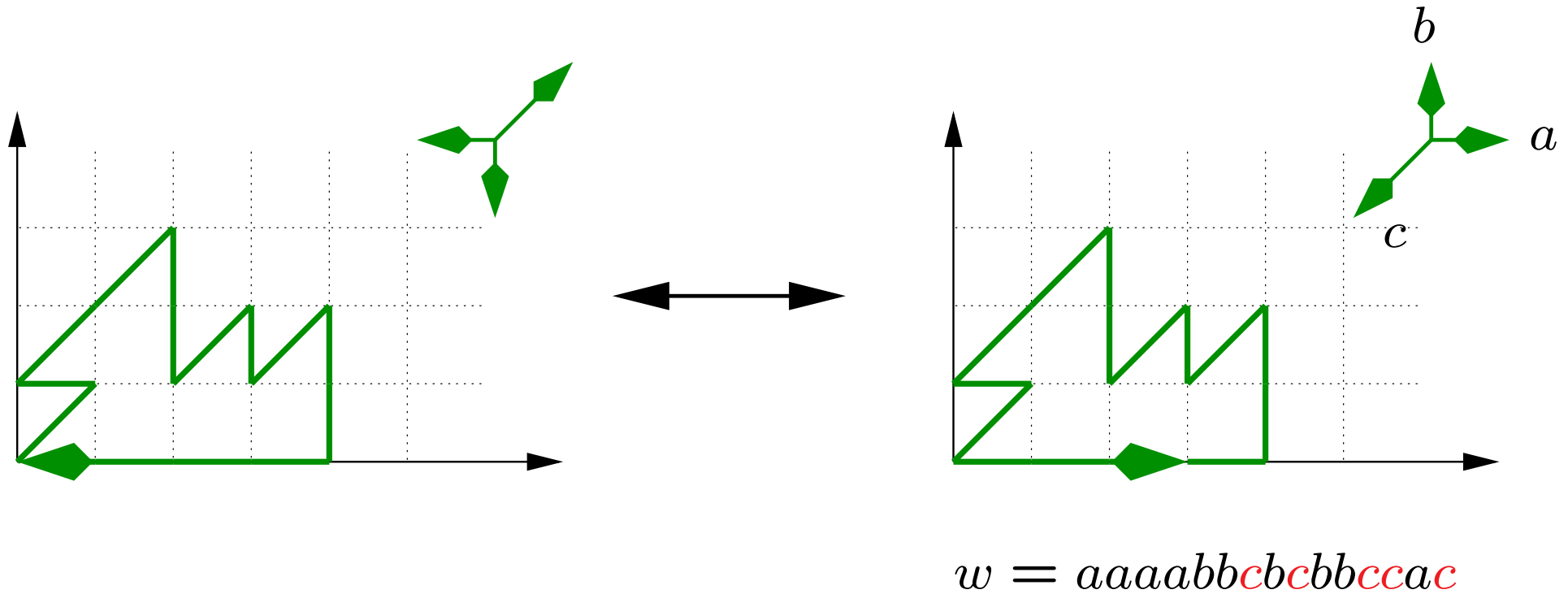
$$\begin{aligned} q(0, 0; 3n) &= \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n} \\ &= 2^n t(2; 2n) \end{aligned}$$



Note : $2n$ triangles $\Leftrightarrow n + 2$ sommets $\Leftrightarrow 3n + 1$ arêtes

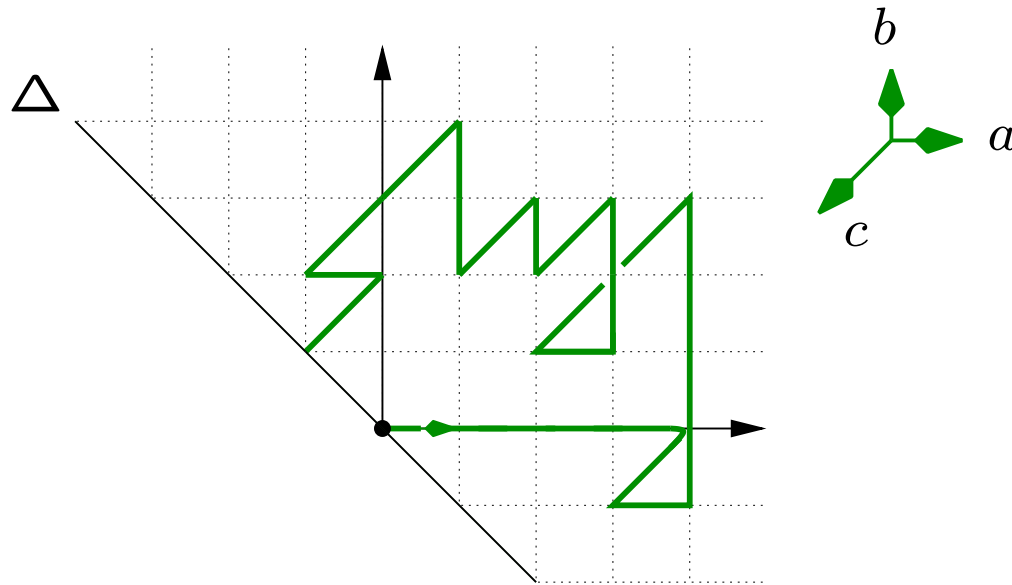
C1. Quelques transformations élémentaires

Retournons les chemins



- Dans tout préfixe w' de w , il y a
 - plus de a que de c , $|w'|_a \geq |w'|_c$
 - plus de b que de c , $|w'|_b \geq |w'|_c$
- Ces inégalités sont des égalités si $w' = w$.

Généralisation : chemins dans un demi-plan



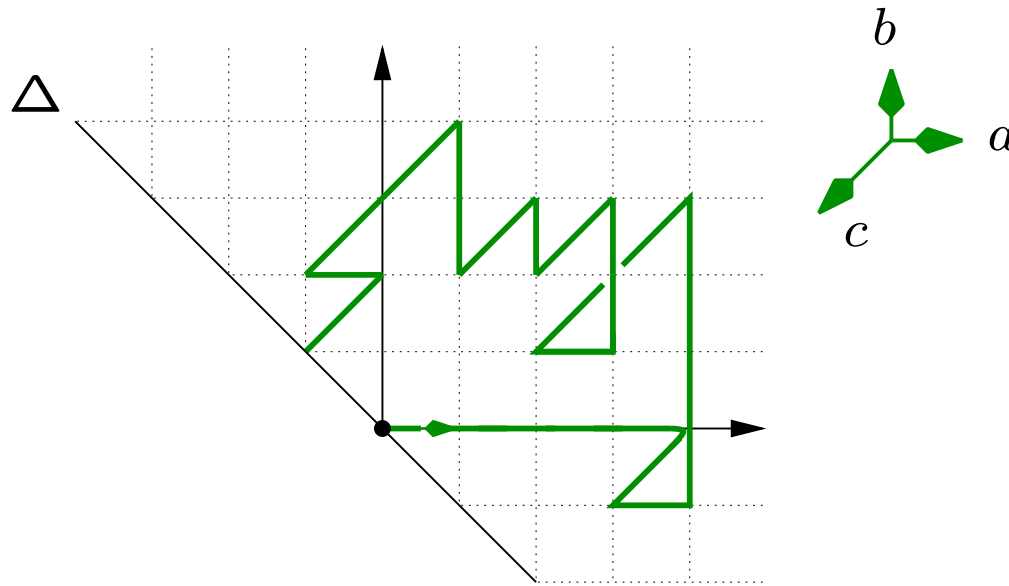
$$w = aaaa**c**abbbb**cc**abb**cb**bb**cca****c**$$

- Dans tout préfixe w' de w ,

$$|w'|_a + |w'|_b \geq 2|w'|_c$$

- Cette inégalité devient une égalité si $w' = w$.

Généralisation : chemins dans un demi-plan



$$w = aaaa**c**abbbb**cc**abb**cb**cb**bb**cc**a**c$$

- Dans tout préfixe w' de w ,

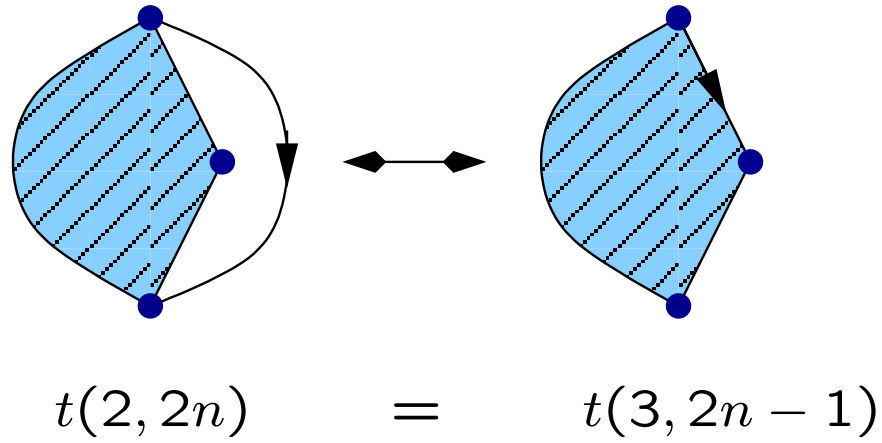
$$|w'|_a + |w'|_b \geq 2|w'|_c$$

- Cette inégalité devient une égalité si $w' = w$.

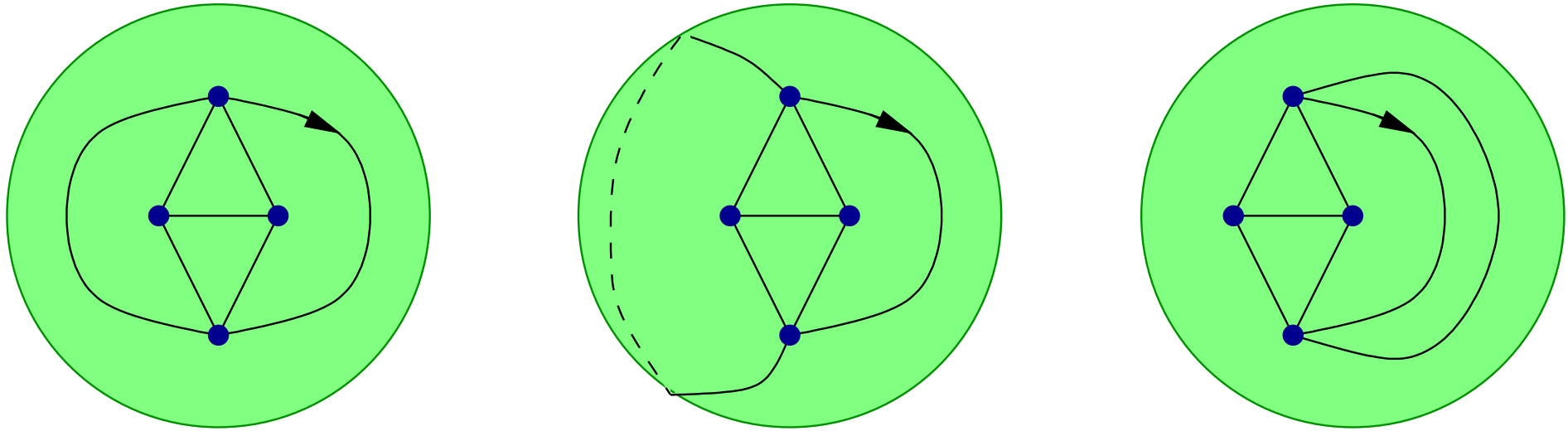
- **Faciles à compter !** (lemme cyclique) Chemins à $3n$ pas dont n pas diagonaux :

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

Triangulations d'un digone et d'un triangle

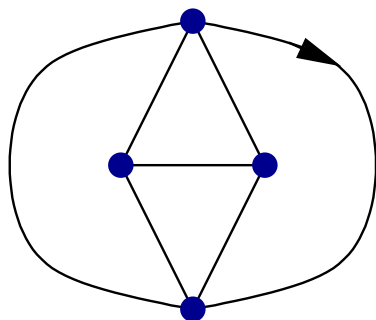


Le vrai visage d'une triangulation

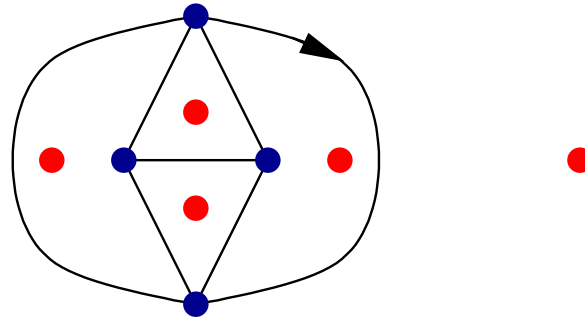


Une carte enracinée sur la sphère

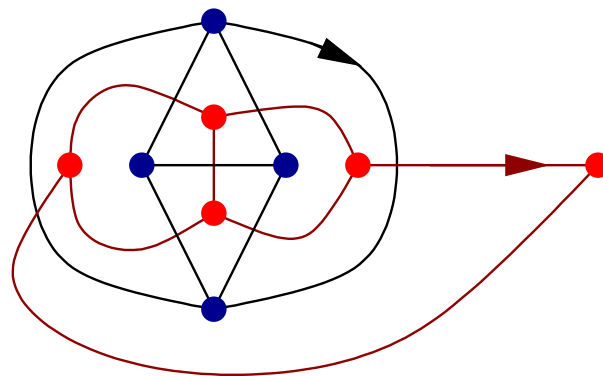
Carte duale d'une triangulation



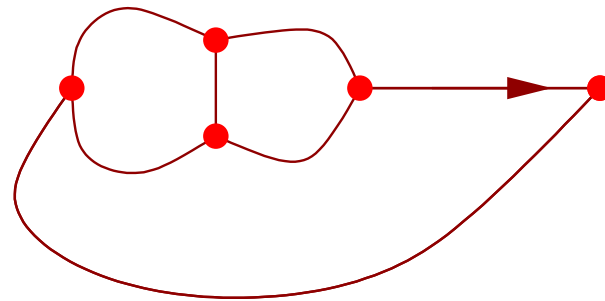
Carte duale d'une triangulation



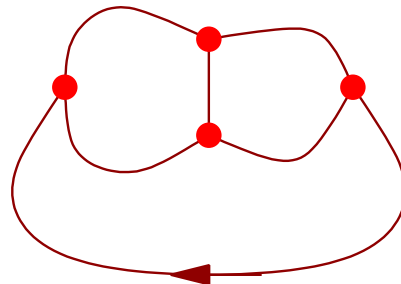
Carte duale d'une triangulation



Carte duale d'une triangulation



contraction d'arête



arête racine

Carte cubique (sommets de degré 3) à $3n$ arêtes $\Leftrightarrow 2n$ sommets

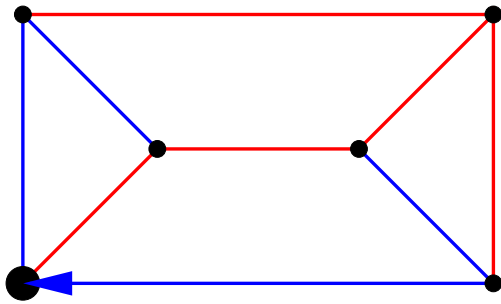
C2. Une bijection

$$q(0, 0; 3n) = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n} = 2^n t(2; 2n)$$

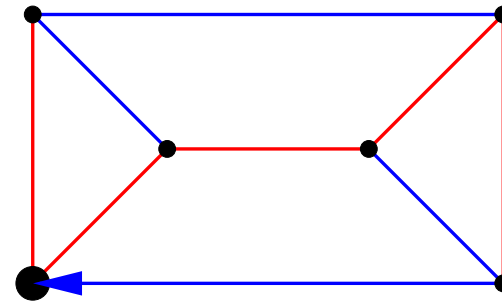
Arbres d'exploration

Un arbre *couvrant* d'une carte cubique est **d'exploration** si

- toute arête qui n'est pas dans l'arbre relie un sommet à l'un de ses ancêtres
- l'arête racine n'est pas dans l'arbre



OUI



NON

Une bijection...

... entre

- les chemins dans le demi-plan (longueur $3n$)
- les cartes cubiques portant un arbre d'exploration et une arête marquée, située en dehors de l'arbre ($2n$ sommets).

Principe : lecture du chemin (mot) lettre à lettre \rightarrow construction récursive d'une carte à pattes et d'un arbre couvrant

Une bijection

Exemple :

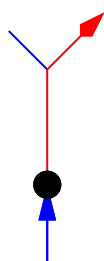
$w = aaaabbcbaaccac$



Une bijection

Exemple :

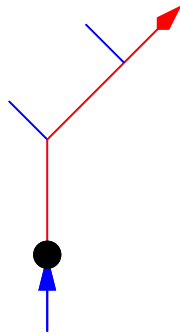
$w = a$ *aaabbcbcaaccac*



Une bijection

Exemple :

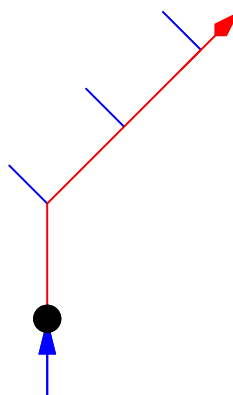
$w = aaabbcbaaccac$



Une bijection

Exemple :

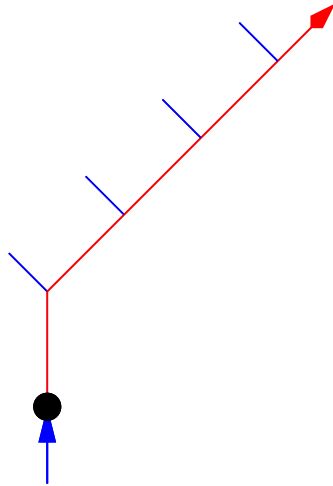
$w = \mathit{aaaabbcbcaaccac}$



Une bijection

Exemple :

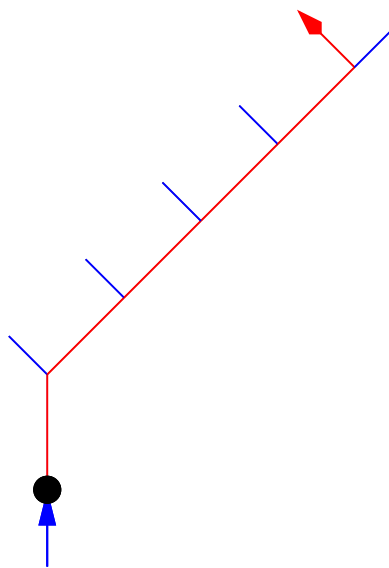
$w = \mathit{aaaaabbcbcaaccac}$



Une bijection

Exemple :

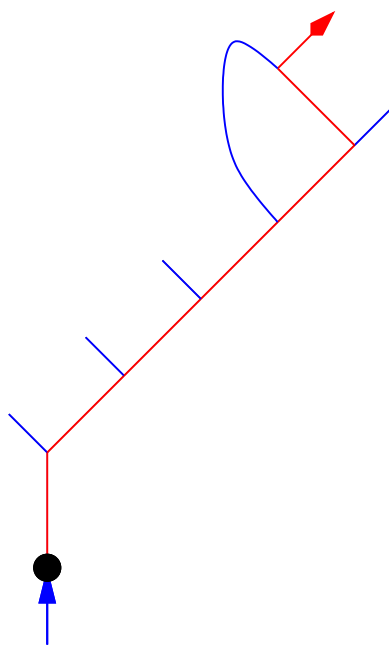
$w =$ *aaaabbcbaaccac*



Une bijection

Exemple :

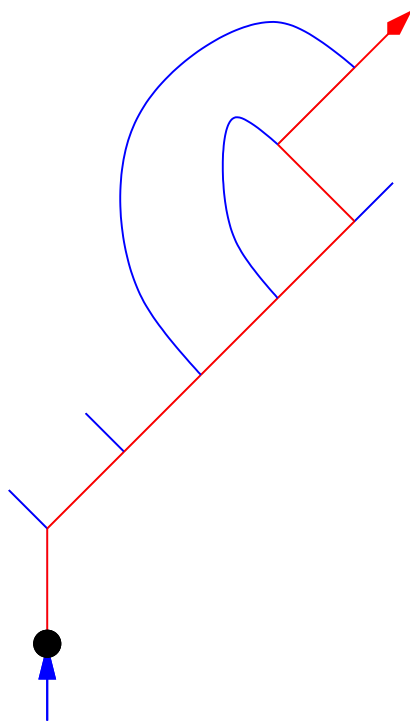
$w = \mathit{aaaabbc}bcaaccac$



Une bijection

Exemple :

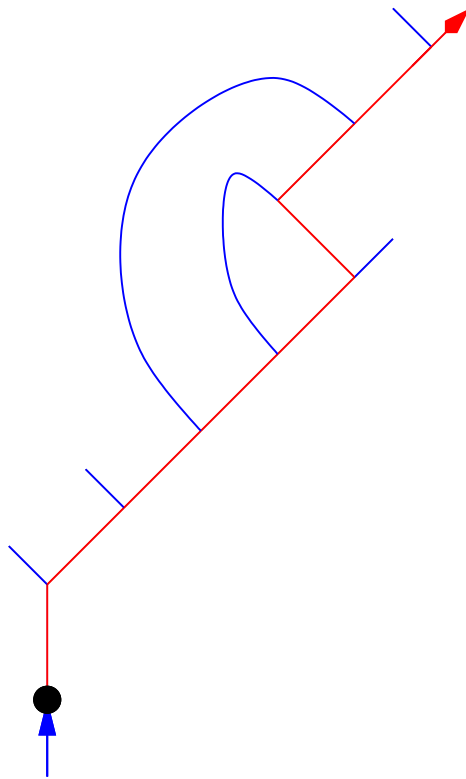
$w =$ *aaaabbcbcaaccac*



Une bijection

Exemple :

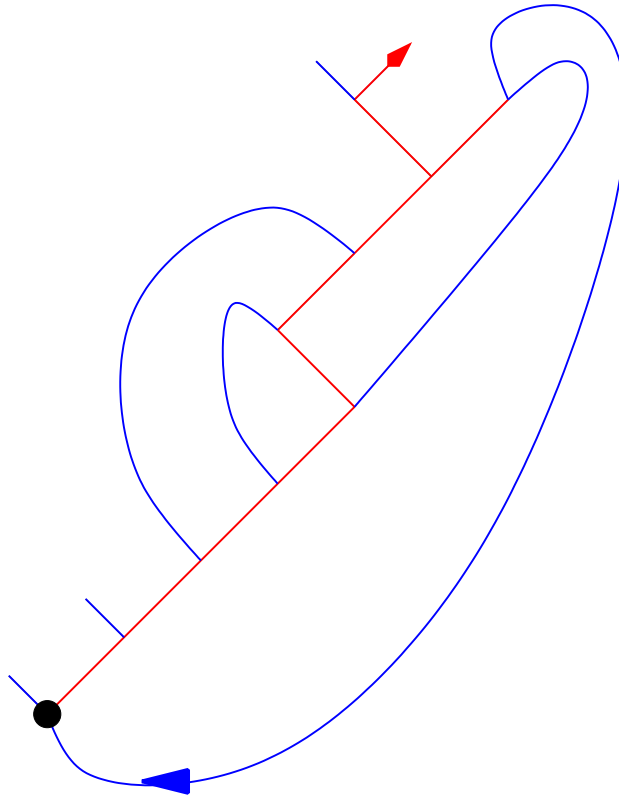
$w =$ *aaaabbcbca**accac*



Une bijection

Exemple :

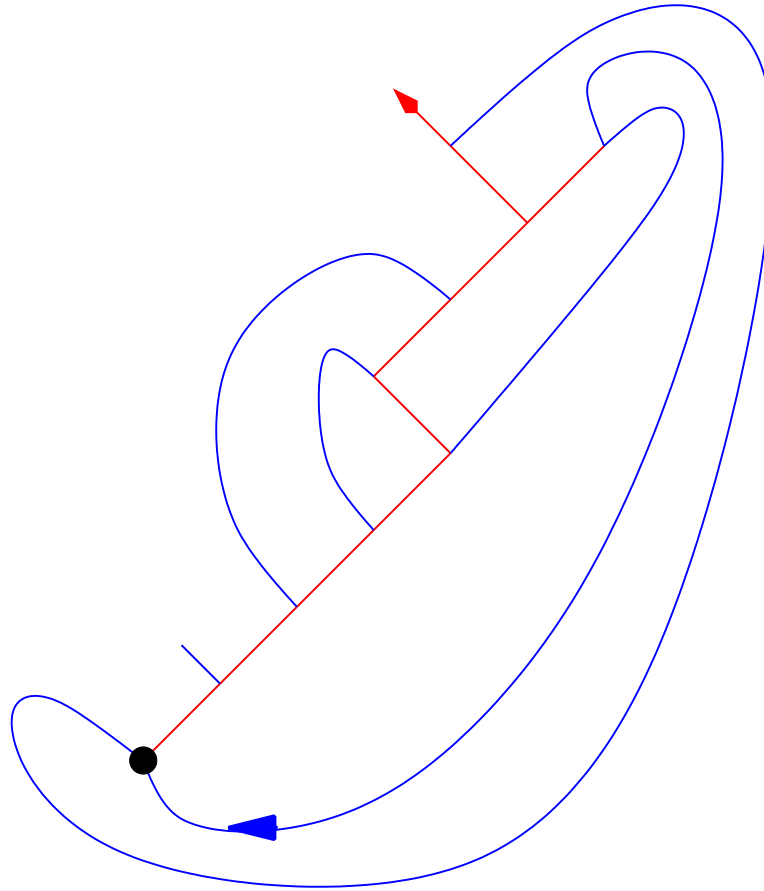
$w =$ *aaaabbcbcaaccac*



Une bijection

Exemple :

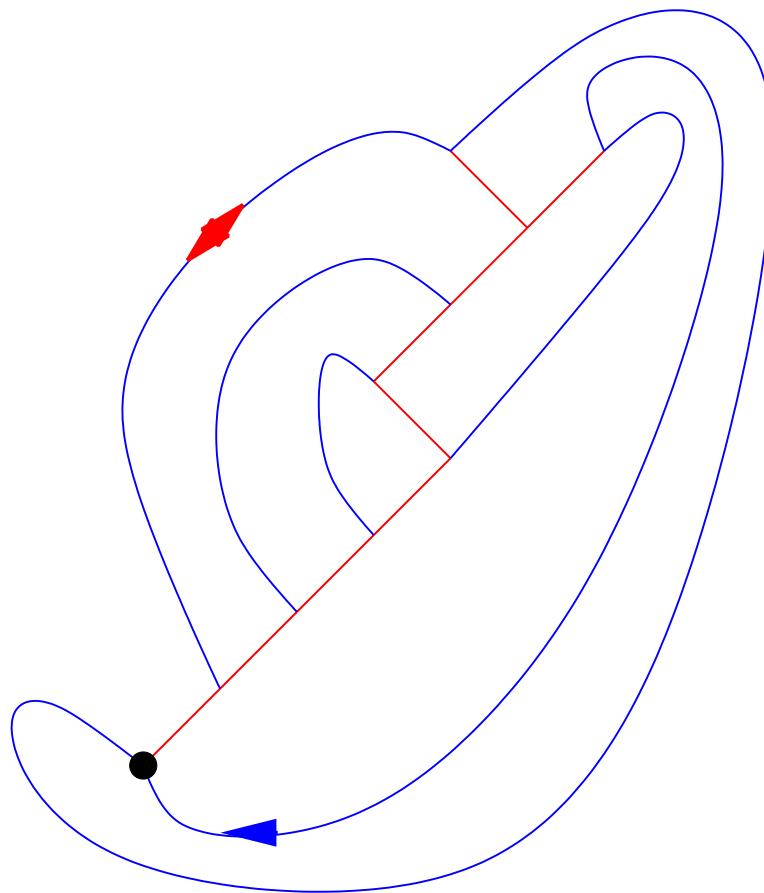
$w =$ *aaaabbcbaaccac*



Une bijection

Exemple :

$w = aaaabbcbaaccac$



Une bijection

Théorème [Bernardi 05]

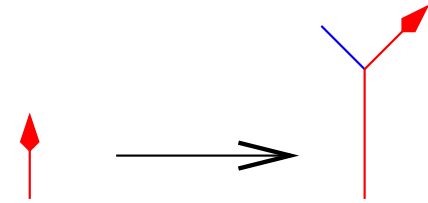
- Cette transformation Φ est une **bijection** entre
 - les chemins dans le demi-plan (longueur $3n$)
 - les cartes cubiques portant un arbre d'exploration, dont une arête, située en dehors de l'arbre, est marquée ($2n$ sommets).
- **De plus**, w est un chemin de Kreweras (c-à-d. confiné dans le quart de plan) ssi l'arête marquée de $\Phi(w)$ est l'arête racine.

- De plus, w est un chemin de Kreweras (c-à-d. confiné dans le quart de plan) ssi l'arête marquée de $\Phi(w)$ est l'arête racine.

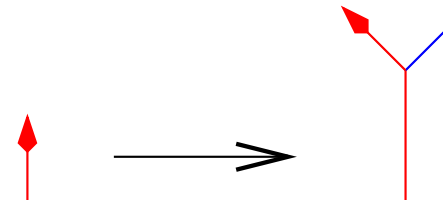
Preuve : Dans tout préfixe w' de w ,

$$|w'|_a \geq |w'|_c \quad \text{et} \quad |w'|_b \geq |w'|_c$$

L'opérateur a crée une patte à gauche de la racine



L'opérateur b crée une patte à droite



L'opérateur c "consomme" une patte à droite et une à gauche

\Rightarrow La patte racine ne disparaît pas.

Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

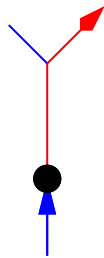
$w = aaaabbcbbcbbccac$



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

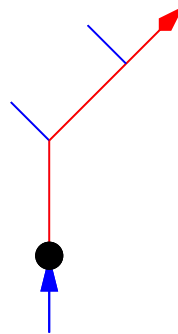
$w = a a a a b b c b c b b c c a c$



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

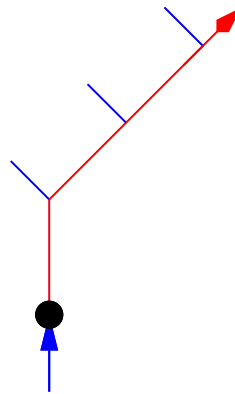
$w = aaabbcbbccac$



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

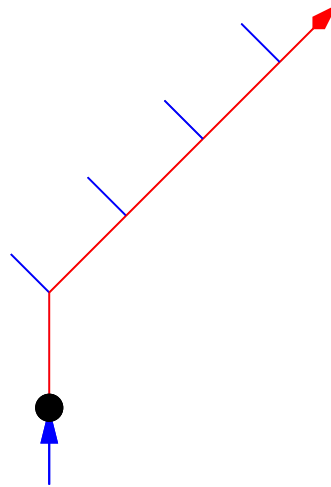
$w = \mathit{aaaabbcbcbccac}$



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

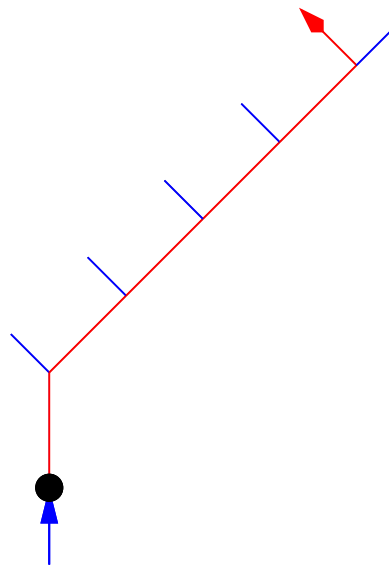
$w =$ *aaaa**bbcbcbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

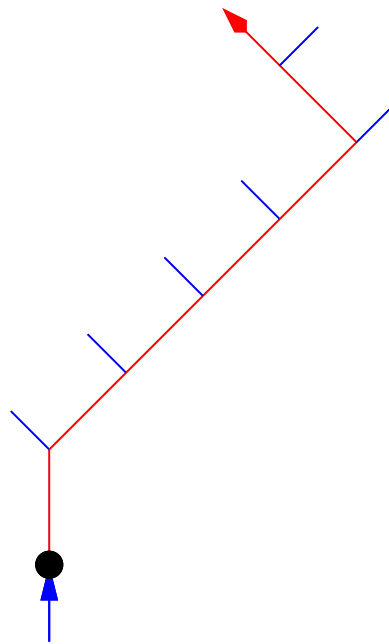
$w =$ *aaaabbcbbcbbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

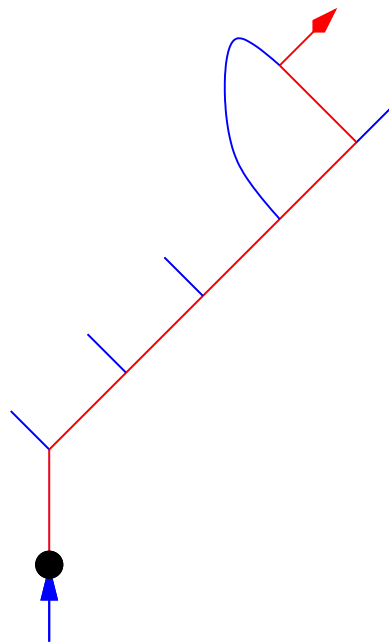
$w =$ *aaaabbcbcbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

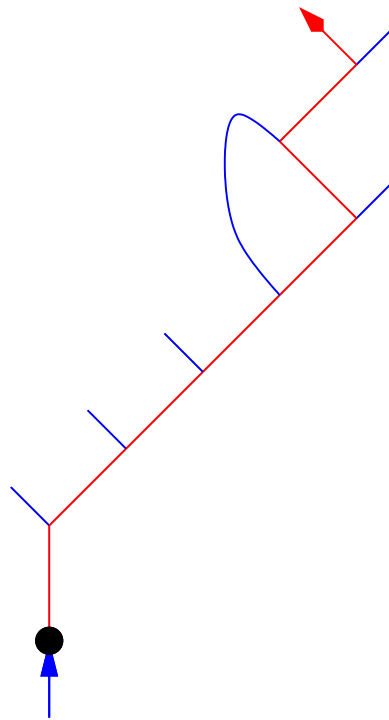
$w =$ *aaaabbc**bcbbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

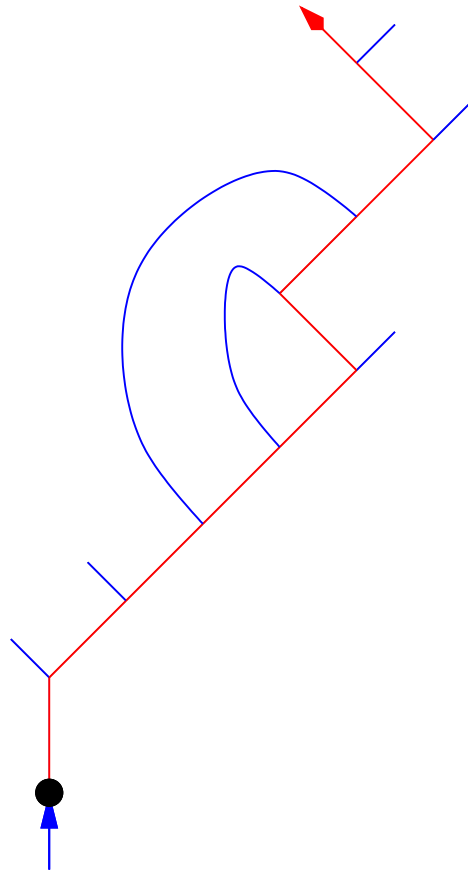
$w =$ *aaaabbcb**cbbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

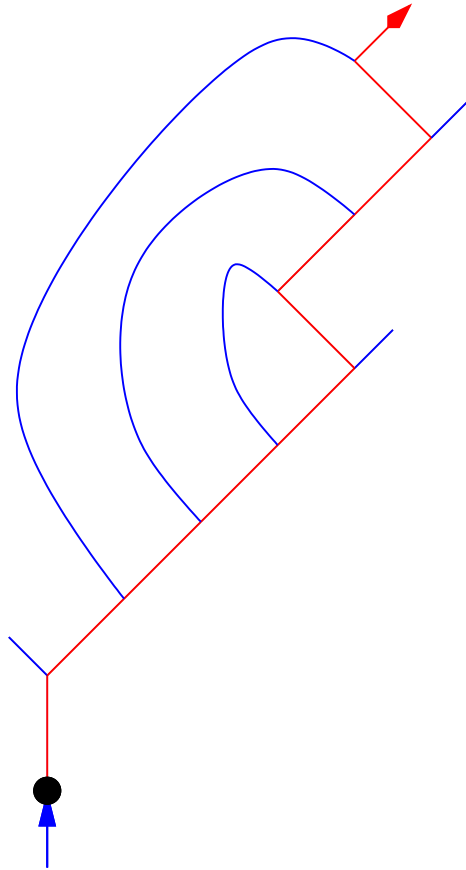
$w =$ *aaaabbcbcbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

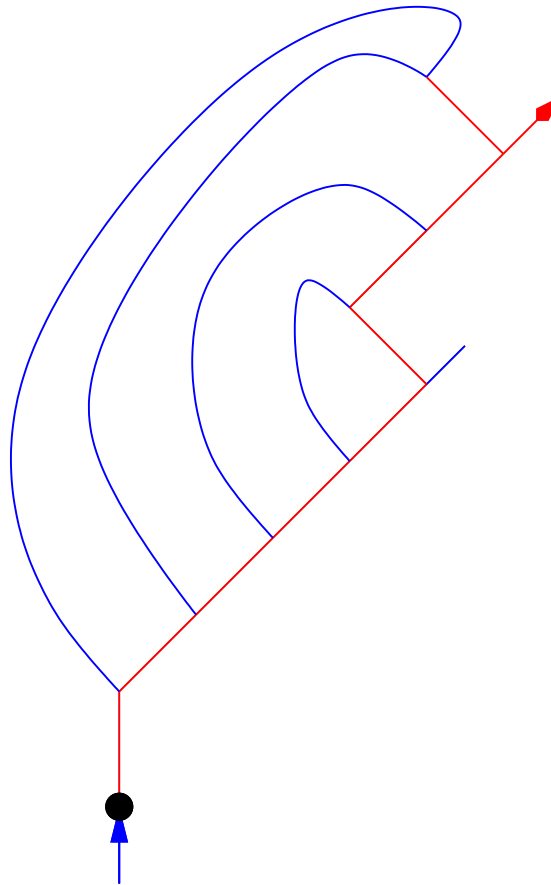
$w =$ *aaaabbcbbc**ccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

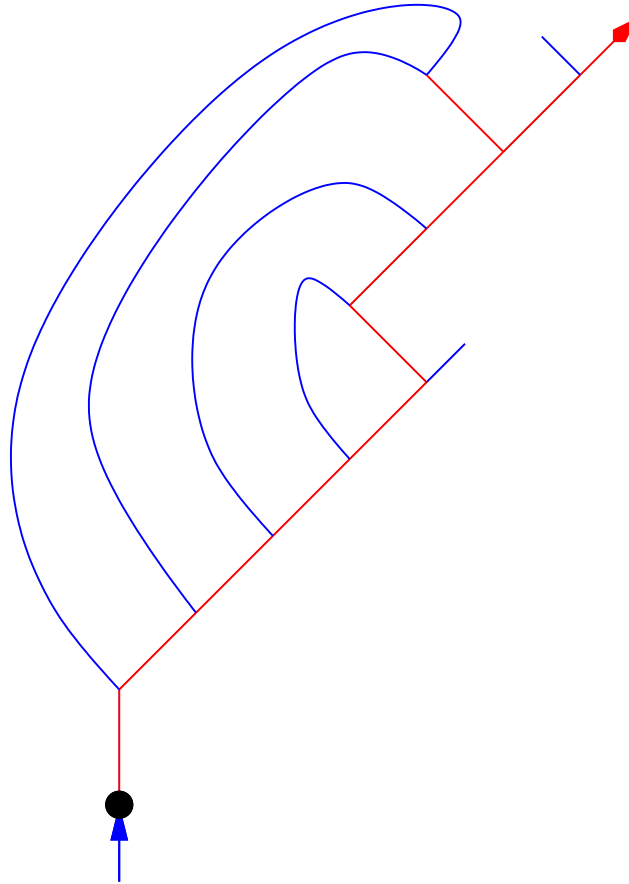
$w =$ *aaaabbcbbcbbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

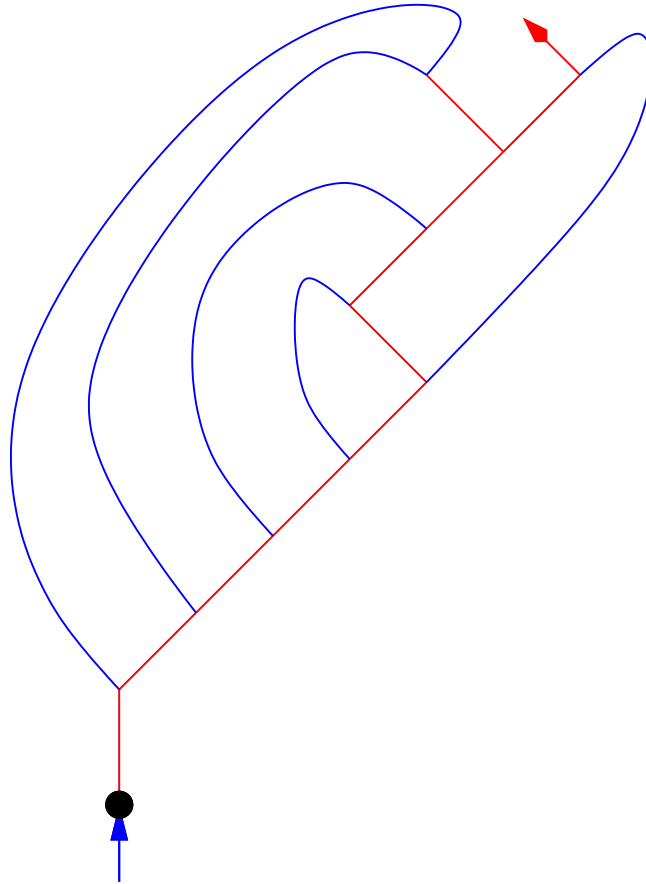
$w =$ *aaaabbcbcbccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

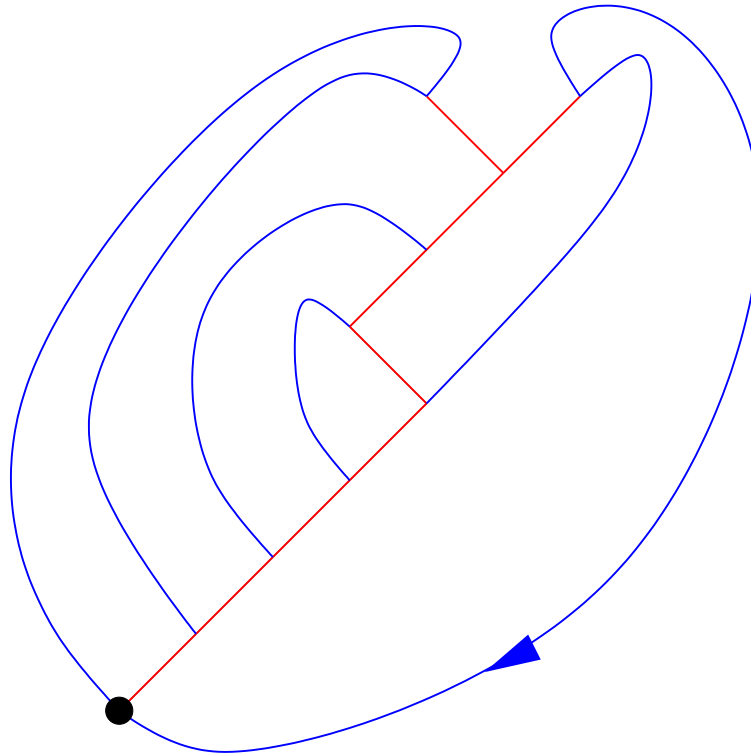
$w =$ *aaaabbcbcaaccac*



Le cas des chemins du quart de plan

Exemple :

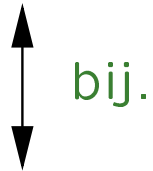
$w = aaaabbcbbcbbccac$



Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

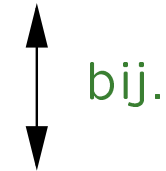


Cartes cubiques + arbre
+ arête marquée hors de l'arbre
 $2n$ sommets

Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) =$$



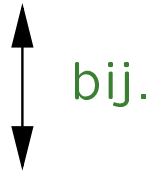
Cartes cubiques + arbre
 $2n$ sommets

Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

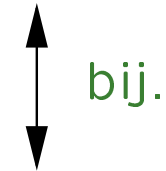


Cartes cubiques + arbre
+ arête marquée hors de l'arbre
 $2n$ sommets

Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) =$$



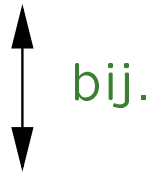
Cartes cubiques + arbre
 $2n$ sommets

Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$



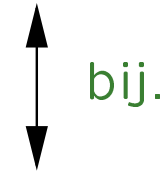
Cartes cubiques + arbre
+ arête marquée hors de l'arbre
 $2n$ sommets

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) =$$



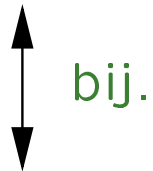
Cartes cubiques + arbre
 $2n$ sommets

Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$



Cartes cubiques + arbre
+ arête marquée hors de l'arbre
 $2n$ sommets

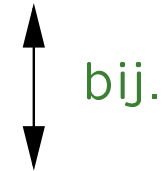
$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

$3n$ arêtes, dont $2n - 1$ dans l'arbre

Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) =$$



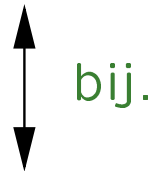
Cartes cubiques + arbre
 $2n$ sommets

Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$



Cartes cubiques + arbre
+ arête marquée hors de l'arbre
 $2n$ sommets

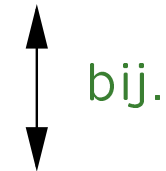
$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

$3n$ arêtes, dont $2n - 1$ dans l'arbre

Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) =$$



Cartes cubiques + arbre
 $2n$ sommets

$$\frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

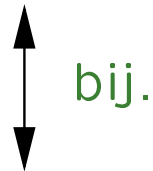
diviser par
→
 $n+1$

Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$



Cartes cubiques + arbre
 + arête marquée hors de l'arbre
 $2n$ sommets

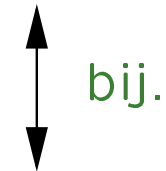
$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

$3n$ arêtes, dont $2n - 1$ dans l'arbre

Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$



Cartes cubiques + arbre
 $2n$ sommets

$$\frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

diviser par
 $\xrightarrow{\quad}$
 $n+1$

Comptage des cartes cubiques

Déjà vu : Le nombre de cartes cubiques à $2n$ sommets portant un arbre d'exploration est :

$$\frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

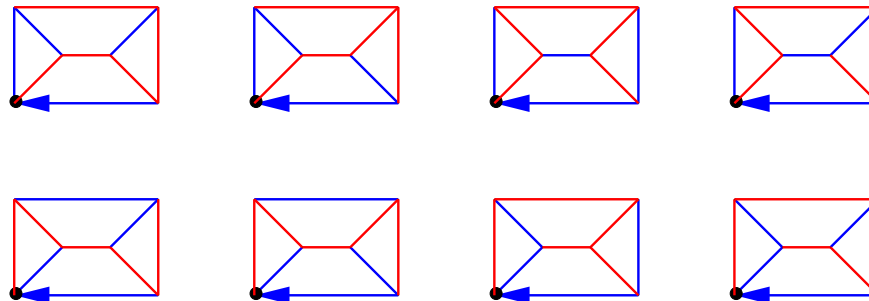
Comptage des cartes cubiques

Déjà vu : Le nombre de cartes cubiques à $2n$ sommets portant un arbre d'exploration est :

$$\frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

Prop. Toute carte cubique à $2n$ sommets admet 2^n arbres d'exploration (ne contenant pas la racine).

Exemple : $n=3$



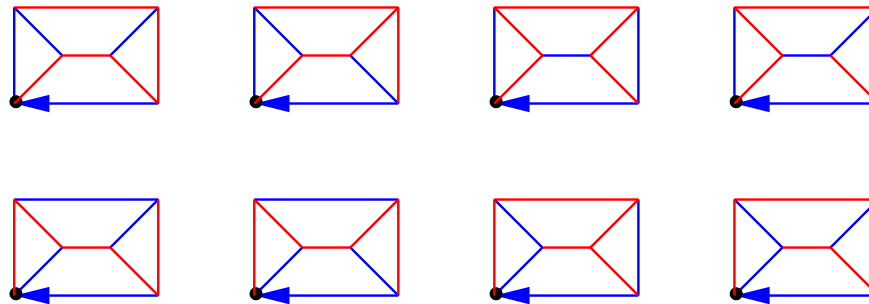
Comptage des cartes cubiques

Déjà vu : Le nombre de cartes cubiques à $2n$ sommets portant un arbre d'exploration est :

$$\frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

Prop. Pour toute carte cubique de taille n ($3n$ arêtes) il existe 2^n arbres d'exploration (ne contenant pas la racine).

Exemple : $n=3$



Corollaire : Il y a

$$\frac{2^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

cartes cubiques à $2n$ sommets.

Quelques perspectives

- Chemins et triangulations : cas général

$$\begin{aligned} q(i, 0; 3n + 2i) &= 2^n t(i + 2, 2n + i) \\ &= \frac{4^n (2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n} \end{aligned}$$

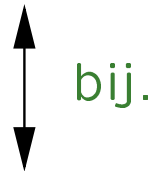
- Décrire la construction sur les chemins eux-mêmes

Corollaire énumératif : comptage des chemins de Kreweras

Chemins du demi-plan

Longueur $3n$

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$



Cartes cubiques + arbre

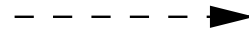
+ arête marquée hors de l'arbre

$2n$ sommets

$$\frac{4^n}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

$3n$ arêtes, dont $2n - 1$ dans l'arbre

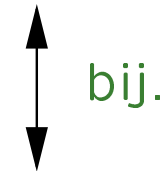
?



Chemins du quart de plan

Longueur $3n$

$$q_n(0, 0, 3n) = \frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

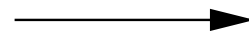


Cartes cubiques + arbre

$2n$ sommets

$$\frac{4^n}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

diviser par



$n+1$

Quelques perspectives

- Chemins et triangulations : cas général

$$\begin{aligned} q(i, 0; 3n + 2i) &= 2^n t(i + 2, 2n + i) \\ &= \frac{4^n (2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n} \end{aligned}$$

- Décrire la construction sur les chemins eux-mêmes
- Autres familles de cartes ?