

Impact de la dynamique sur la fiabilité d'informations de routage[†]

Christian Glacet¹, Nicolas Hanusse² et David Ilcinkas²

¹ LaBRI - Université de Bordeaux ; ² LaBRI - CNRS

Pour permettre le routage dans un graphe, les nœuds doivent connaître des portions de route. La dynamique du graphe peut rendre les informations stockées erronées. Cet article s'intéresse à la caractérisation de la quantité d'informations erronées, ainsi qu'au nombre de changements de distances dans le graphe suite à \mathcal{M} suppressions d'arêtes et \mathcal{M}' suppressions de nœuds. Nous considérons un graphe G de diamètre D possédant n nœuds et m arêtes. Nous montrons que l'espérance du nombre d'erreurs et de changement de distance est d'au plus $D \cdot (\frac{\mathcal{M}n}{m} + \mathcal{M}')$.

Keywords: Graphe dynamique, routage, erreurs, distances

1 Motivation de l'étude

Nous nous intéressons ici aux réseaux, ou systèmes distribués, dynamiques. Plus précisément nous étudions l'impact de la dynamique du réseau sur la fiabilité des informations que stockent les nœuds dans l'optique de répondre à une requête de routage. Nous considérons un graphe $G = (V, E)$ tel que $|V| = n$ et $|E| = m$ et de diamètre D . Pour permettre le routage vers une destination fixée $t \in V$, tout nœud connaît un chemin dans le réseau vers cette destination. Le stockage d'un chemin dans sa totalité n'est cependant pas nécessaire si les nœuds se coordonnent pour effectuer une même tâche, comme router vers une même destination t . Dans ce dernier cas, un simple *conseil* vers un nœud voisin se trouvant sur un plus court chemin vers t suffit.

La dynamique du réseau ainsi que sa grande taille ont un impact néfaste sur la fiabilité de ces conseils. Après une panne, les nœuds dans un état instable, délivrant des informations de routage erronées, sont habituellement qualifiés de *menteurs*. Ce terme est utilisé bien que les nœuds menteurs n'aient pas nécessairement d'intentions malveillantes. En utilisant des techniques de routage classiques telles que celles présentées dans [Hed88, RLH06], la présence de menteurs défait toute garantie de routage.

Il existe cependant des algorithmes permettant de router en présence de menteurs. C'est ce que montre une série d'articles, [HKK04, HKKK08, HIKN10], concernant la localisation de cibles/objectifs dans un réseau contenant des menteurs. Cette tâche est équivalente à un routage vers un nœud cible donné. Un premier modèle, introduit par Kranakis et Krizanc [KK99], décrit un algorithme de localisation dans un réseau distribué de topologie anneau ou tore, dans lequel chaque nœud a une probabilité constante d'être un menteur. Un second modèle, plus réaliste, proposé par Hanusse *et al.* [HKK04] définit les menteurs comme un sous-ensemble $V_k \subset V$ de taille k . Il est de plus considéré dans cet article que l'ensemble V_k reste inchangé durant la phase de recherche, autrement dit durant le routage d'un paquet. Sur ce modèle, différents algorithmes, génériques ou dédiés à des topologies spécifiques, ont été présentés dans [HKK04, HKKK08, HIKN10]. Les bornes données dans ce domaine d'étude sont typiquement de la forme $O(d + 2^{O(k)})$ pour les graphes de degré borné, avec d la distance entre la source et le nœud destination en nombre de sauts. En outre, pour les chaînes/anneaux et expandeurs l'algorithme générique [HIKN10] garantit un routage en au plus $d + k^{O(1)}$ sauts. Beaucoup de graphes de terrains, tels que CAIDA [Cai] possèdent des propriétés "proches" de celles des expandeurs. Dans ces articles, une supposition implicite est faite : *le nombre de menteurs est faible*.

L'objectif de cette étude est de caractériser, partant d'une configuration sans menteurs, le nombre de menteurs créés par une ou plusieurs modifications atomiques aléatoires de la topologie. Les modifications

[†]Supporté par le projet européen EULER – STREP 7 et le projet ANR DISPLEXITY.

atomiques considérées étant la suppression d'une arête ou d'un nœud. On notera k le nombre de menteurs présents dans une configuration donnée et $|\mathcal{S}|$ le nombre de changements de distances par rapport à la configuration initiale.

Le résultat présenté dans cet article est annoncé par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Considérons un graphe $G = (V, E)$ avec n nœuds, m arêtes et un diamètre D . Pour toute cible, après \mathcal{M} suppressions d'arêtes et \mathcal{M}' suppressions de nœuds, choisis de manière aléatoire uniforme dans E (resp. V), l'espérance du nombre de menteurs est $\mathbb{E}(k) \leq D \cdot \left(\frac{\mathcal{M}n}{m} + \mathcal{M}'\right)$. De plus, l'espérance du nombre de changement de distances observés dans G admet la même borne, i.e. $\mathbb{E}(|\mathcal{S}|) \leq D \cdot \left(\frac{\mathcal{M}n}{m} + \mathcal{M}'\right)$.*

En particulier, pour des graphes de terrain, ayant des diamètre de l'ordre de $O(\log n)$ l'espérance du nombre de menteurs est polylogarithmique.

2 Modèle et premières observations

Le graphe considéré est non pondéré, non nécessairement connexe après les différentes suppressions. Un nœud spécifique appelé destination sera noté t . Tout nœud $u \in V \setminus \{t\}$ possède un *conseil* vers un nœud voisin $\text{Adv}(u) \in \Gamma(u)$, avec $\Gamma(u)$ l'ensemble fermé des voisins de u , i.e. $u \in \Gamma(u)$. Si le nœud $\text{Adv}(u)$ est sur un plus court chemin de u vers t alors le nœud u est dit *vérace*, sinon il est qualifié de *menteur*. L'ensemble des conseils (arcs) \mathbb{A} de cardinalité $n - 1$, appelé *configuration*, induit un sous-graphe orienté de G , noté $G_{\mathbb{A}} = (V, \mathbb{A})$. Si la configuration \mathbb{A} ne contient pas de menteur elle est également qualifiée de *configuration vérace*. Pour deux nœuds $(u, v) \in V^2$, il existe un arc (u, v) dans $G_{\mathbb{A}}$, i.e. $(u, v) \in \mathbb{A}$, si et seulement si $\text{Adv}(u) = v$. Lorsque \mathbb{A} est vérace, le graphe $G_{\mathbb{A}}$ est un arbre de plus court chemin enraciné en t couvrant G . Pour un graphe $G = (V, E)$, l'ensemble des graphes $\mathcal{G}_{G, \mathcal{M}}$ se définit comme l'ensemble des graphes pouvant être obtenus après \mathcal{M} suppressions d'arêtes dans G :

$$\forall \tilde{G} = (V, \tilde{E}) : [\tilde{G} \in \mathcal{G}_{G, \mathcal{M}}] \iff [(\tilde{E} \subset E) \wedge (|\tilde{E}| = |E| - \mathcal{M})]$$

Étant donné deux graphes G et $\tilde{G} \in \mathcal{G}_{G, \mathcal{M}}$ et une configuration vérace \mathbb{A} , les propriétés observées sont : (i) $|\mathcal{S}|$, la taille de l'ensemble des nœuds dont la distance à t est différente dans G et \tilde{G} , ces distances seront notées respectivement, pour un nœud u , $d_G(u, t)$ et $d_{\tilde{G}}(u, t)$; (ii) ainsi que le nombre de menteurs $k = k_{\tilde{G}}(\mathbb{A})$.

Remarque. Il est possible que \mathcal{M} conseils de la configuration \mathbb{A} doivent être redirigés dans \tilde{G} . En effet, du point de vue d'un nœud u , si une arête $\{u, v\}$ telle que $\{u, v\} \in E$ et $(u, v) \in \mathbb{A}$ (i.e. $\text{Adv}(u) = v$) est supprimée alors dans \tilde{G} le nœud u a un conseil qui pointe vers un nœud dont il n'est pas voisin. Le nœud u devra donc choisir un autre conseil dans son nouvel ensemble de voisins, la stratégie de sélection sera précisée par la suite. Si l'ensemble des voisins d'un nœud est vide, son conseil pointerait vers lui-même ($\text{Adv}(u) = u$).

La [Figure 1](#) montre un exemple de graphes et de conseils. Après une suppression d'arête, il y a $n - (D + 1)$ nœuds menteurs pointant vers une "impasse" dans la partie extrême droite ainsi que $D - 1$ nœuds dont la distance à t a changé. Il est à noter que l'un des nœuds a également changé son conseil.

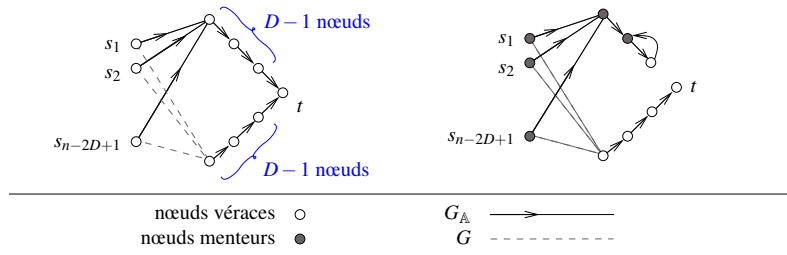


FIGURE 1: Suppression d'une arête conservant la connexité du graphe et créant $n - (D + 1)$ menteurs.

Il est également possible que le graphe \tilde{G} soit déconnecté. Les nœuds n'appartenant plus à la composante connexe de t deviennent alors menteurs.

Le modèle d'adversaire considéré pour l'étude est celui d'un **modèle à fautes aléatoires**. L'intérêt de ce modèle est d'analyser l'impact en moyenne des suppressions d'arêtes. Pour un graphe $G = (V, E)$ donné, le choix de la configuration de conseils \mathbb{A} est fait de manière aléatoire uniforme dans l'ensemble des configurations véraçes. Le graphe \tilde{G} est lui aussi choisi de manière aléatoire uniforme dans $\mathcal{G}_{G, \mathcal{M}}$. De plus, dans le cas où un nœud u a pour conseil $\text{Adv}(u) = v$ et que l'arête $\{u, v\}$ n'appartient pas à \tilde{E} , le nouveau conseil de u est choisi de manière aléatoire uniforme dans $\Gamma(u) \setminus \{u\}$. Rappelons à nouveau que $\Gamma(u) = \{u\} \implies \text{Adv}(u) = u$.

3 Bornes supérieures, distances et nombre de menteurs

3.1 Distances

Dans le modèle aléatoire uniforme, toute arête d'un graphe à m arêtes a une probabilité $\frac{\mathcal{M}}{m}$ d'être supprimée. La probabilité de changer de distance est donc bornée pour tout nœud :

Lemme 3.1. *Pour des graphes $G = (V, E)$ et $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ choisi de manière aléatoire uniforme dans $\mathcal{G}_{G, \mathcal{M}}$, la probabilité qu'un nœud $u \in V$ ait une distance différente dans G que dans \tilde{G} est $\Pr[u \in \mathcal{S}] \leq d_G(u, t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m}$.*

Démonstration. Les distances $d_G(u, t)$ et $d_{\tilde{G}}(u, t)$ sont différentes si et seulement si pour tout plus court chemin $P = \{u_0 = u, u_1, \dots, u_{d_G(u, t)} = t\}$ au moins une arête $\{u_i, u_{i+1}\}$ n'appartient pas à \tilde{E} . Pour \mathcal{M} suppressions d'arêtes distinctes choisies de manière aléatoire uniforme dans E , la probabilité d'apparition d'un tel événement est bornée par la probabilité de supprimer une arête appartenant à au moins un des plus courts chemins de u à t , et donc

$$\Pr[d_G(u, t) \neq d_{\tilde{G}}(u, t)] \leq d_G(u, t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m}.$$

Autrement dit, $\Pr[u \in \mathcal{S}] \leq d_G(u, t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m}$. ■

En bornant $d_G(u, t)$ par D , la borne donnée dans le [théorème 1.1](#) sur le nombre de changement de distances après \mathcal{M} suppressions aléatoires peut être obtenue. Notons tout d'abord X_u la variable aléatoire ayant pour valeur 1 si $u \in \mathcal{S}$ et 0 sinon. L'espérance étant linéaire, la taille de l'ensemble \mathcal{S} est bornée comme suit :

$$\mathbb{E}(|\mathcal{S}|) = \sum_{u \in V} \mathbb{E}(X_u) = \sum_{u \in V} \Pr[u \in \mathcal{S}]$$

Et donc l'espérance du nombre de nœuds ayant changé de distance après \mathcal{M} suppressions d'arêtes est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathcal{S}|) &\leq \sum_{u \in V} d_G(u, t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m} \\ &\leq \frac{\mathcal{M}}{m} \sum_{u \in V} d_G(u, t) \leq \mathcal{M} \cdot \frac{nD}{m} \end{aligned}$$

De la même façon, $\mathbb{E}(|\mathcal{S}|)$ peut être bornée par $D \cdot \mathcal{M}'$ suite à \mathcal{M}' suppressions de nœuds aléatoire uniforme.

3.2 Nombre de menteurs

Considérons les graphes $G = (V, E)$ et $\tilde{G} = (V, \tilde{E}) \in \mathcal{G}_{G, \mathcal{M}}$ ainsi que l'ensemble de conseils \mathbb{A} .

Lemme 3.2. *Si un nœud $u \in V$ est menteur dans \tilde{G} alors son conseil pointe vers un nœud dont la distance est différente dans G et dans \tilde{G} ou son conseil a changé suite à une suppression. Autrement dit, u ment uniquement si :*

$$u \text{ ment dans } \tilde{G} \implies [((u, v) \in \mathbb{A}) \wedge (v \in \mathcal{S})] \vee [\{u, v\} \notin \tilde{E}]$$

Démonstration. Prouvons la contraposée de cette implication. Dans la configuration de départ, le conseil $(u, v) \in \mathbb{A}$ est véraçe, car \mathbb{A} est véraçe par hypothèse. Donc $d_G(u, t) = d_G(v, t) + 1$, or v appartient à \mathcal{S} , il ne change pas de distance après les \mathcal{M} suppressions, donc $d_G(v, t) = d_{\tilde{G}}(v, t)$, de plus le nœud u ne peut pas

diminuer sa distance à t (i.e. $d_{\tilde{G}}(u,t) \leq d_{\tilde{G}}(v,t) + 1$). Finalement, si l'arête $\{u,v\}$ appartient à \tilde{E} alors u et v sont voisins et $d_{\tilde{G}}(u,t) = d_{\tilde{G}}(v,t) + 1$, ainsi u n'est pas menteur. ■

Le lemme suivant peut être déduit :

Lemme 3.3. *Un nœud $u \in V$ est menteur dans le graphe \tilde{G} avec une probabilité inférieure à $(d_G(u,t)) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m}$.*

Démonstration. D'après les lemmes 3.1 et 3.2, on peut déduire que pour un nœud donné $u \in V$ ayant pour conseil $\text{Adv}(u) = v$, la probabilité que u soit un menteur dans \tilde{G} se réduit à :

$$\begin{aligned} \Pr [u \text{ ment dans } \tilde{G}] &\leq \Pr [v \in \mathcal{S}] + \Pr [\{u,v\} \notin \tilde{E}] \\ &\leq d_G(v,t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m} + \frac{\mathcal{M}}{m} \\ &\leq d_G(u,t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m} \end{aligned}$$

Notons $X_{s,t}$ la variable aléatoire ayant pour valeur 1 si s ment dans \tilde{G} et 0 sinon. D'après le lemme 3.3, on peut déduire que l'espérance du nombre de menteurs dans \tilde{G} est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(k(\tilde{G}, \mathbb{A})) &= \mathbb{E} \left(\sum_{s \in V \setminus \{t\}} X_{s,t} \right) \\ &= \sum_{s \in V \setminus \{t\}} \mathbb{E}(X_{s,t}) = \sum_{s \in V \setminus \{t\}} \Pr [u \text{ ment dans } \tilde{G}] \\ &\leq \sum_{s \in V \setminus \{t\}} d_G(s,t) \cdot \frac{\mathcal{M}}{m} \leq \sum_{s \in V \setminus \{t\}} D \cdot \frac{\mathcal{M}}{m} \leq D \cdot \frac{\mathcal{M}n}{m} \end{aligned}$$

Pour la suppression de nœuds L'espérance du nombre de menteurs créé par la suppression d'un nœud peut être calculée en utilisant les mêmes techniques que pour la suppression d'arêtes. Assez brièvement, la probabilité de changer de distance pour tout nœud à distance d de t après \mathcal{M}' suppression de nœuds peut être borné par $d \cdot \frac{\mathcal{M}'}{n}$. De cette borne peut être calculée la probabilité de mentir qui peut être bornée pour tout nœud par $D \cdot \frac{\mathcal{M}'}{n}$. L'espérance du nombre de menteurs créée par \mathcal{M}' suppressions de nœuds serait donc $\mathbb{E}(k') \leq \mathcal{M}' \cdot D$. Un nœud devient donc menteur suite à une suppression d'arête ou une suppression de nœud, ces deux événements étant disjoints, nous obtenons que l'espérance du nombre de menteurs est de :

$$\mathbb{E}(k) \leq D \cdot \left(\frac{\mathcal{M}n}{m} + \mathcal{M}' \right)$$

La même borne est atteinte pour le nombre de changements de distances, ce qui termine la preuve du [théorème 1.1](#).

Références

- [Cai] CAIDA maps - as relationships. <http://www.caida.org/data/active/as-relationships/>. Dernière visite : 2013-07-18.
- [Hed88] Charles L Hedrick. Routing information protocol. 1988.
- [HIKN10] Nicolas Hanusse, David Ilcinkas, Adrian Kosowski, and Nicolas Nisse. Locating a Target with an Agent Guided by Unreliable Local Advice. In *Proceedings of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGOPS Symposium on Principles of Distributed Computing PODC 2010*, pages 355–364, Zurich Suisse, 2010. ACM New York, NY, USA.
- [HKK04] N. Hanusse, E. Kranakis, and D. Krizanc. Searching with mobile agents in networks with liars. *Discrete Applied Mathematics*, 137 :69–85, 2004.
- [HKKK08] N. Hanusse, D. J. Kavvadias, E. Kranakis, and D. Krizanc. Memoryless search algorithms in a network with faulty advice. *Theor. Comput. Sci.*, 402(2-3) :190–198, 2008.
- [KK99] E. Kranakis and D. Krizanc. Searching with uncertainty. pages 194–203, 1999.
- [RLH06] Y Rekhter, T Li, and S Hares. Rfc 4271 : Border gateway protocol 4, 2006.