

Exploration de réseaux par un robot

Pierre FRAIGNIAUD

David ILCINKAS

Guy PEER

Andrez PELC

David PELEG

Exploration de graphes

- But

- Une entité mobile doit **traverser** au moins une fois chaque arête d'un graphe **inconnu**, ce en un temps fini

Exploration de graphes

- **But**
 - Une entité mobile doit **traverser** au moins une fois chaque arête d'un graphe **inconnu**, ce en un temps fini
- **Motivation**
 - exploration ou cartographie d'endroits inaccessibles à l'homme
 - maintenance d'un réseau informatique
 - recherche d'informations (P2P, Web)

Graphes anonymes

Graphes anonymes

- Taille et topologie inconnues

Graphes anonymes

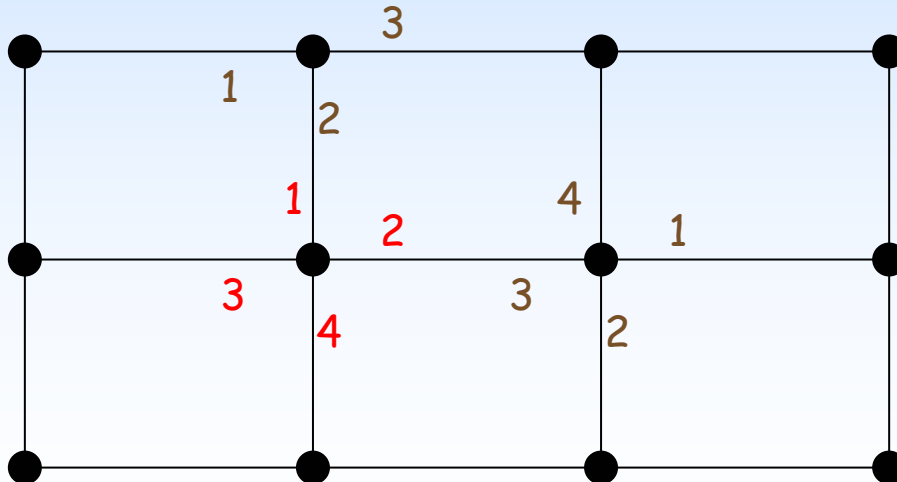
- Taille et topologie inconnues
- Pas d'étiquetage des sommets

Graphes anonymes

- Taille et topologie inconnues
- Pas d'étiquetage des sommets
- Numérotation locale des arêtes

Graphes anonymes

- Taille et topologie inconnues
- Pas d'étiquetage des sommets
- Numérotation locale des arêtes



Robot

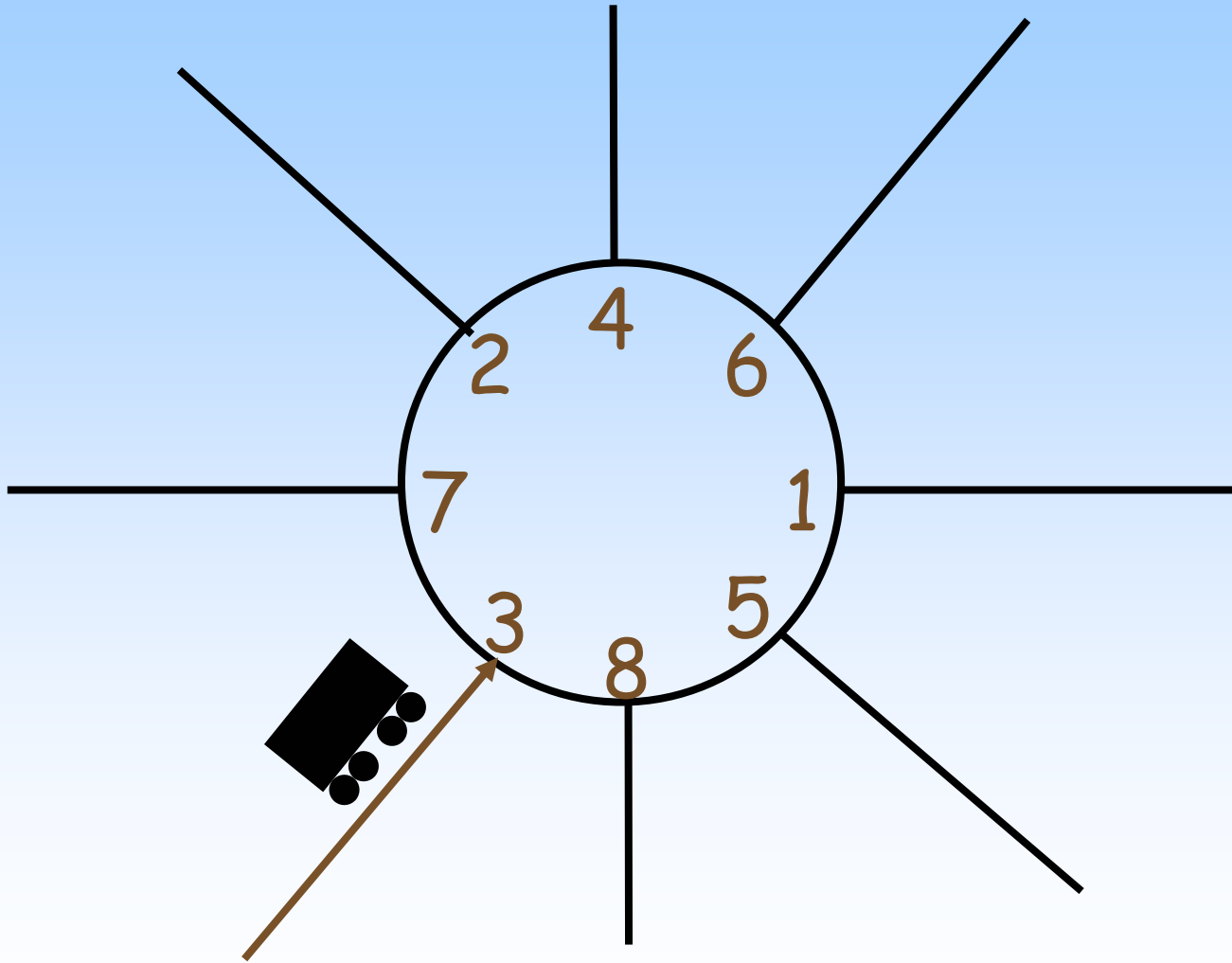
Robot

- **Automate** déterministe à **K états**
→ robot avec $\lceil \log K \rceil$ bits de mémoire

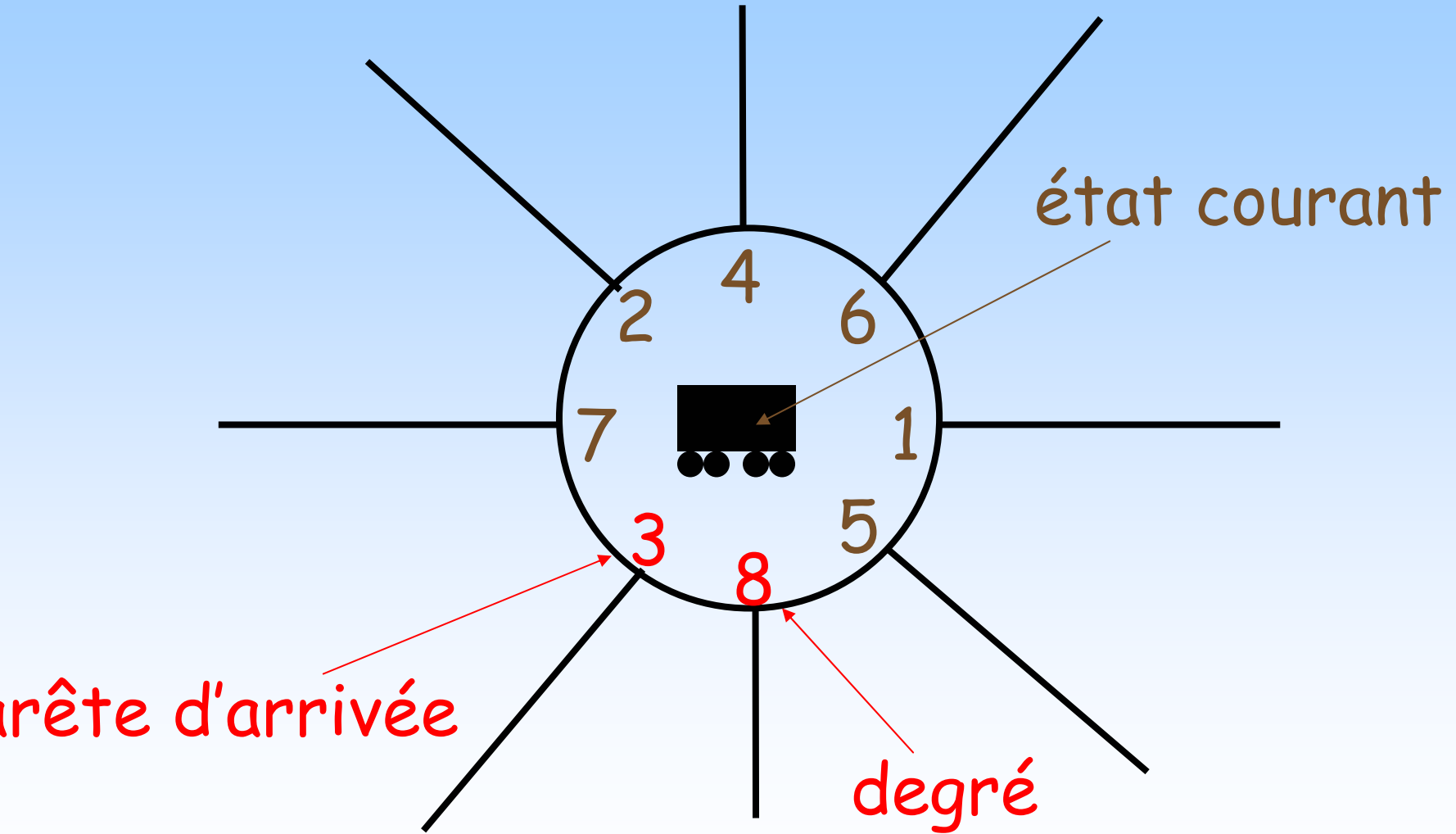
Robot

- **Automate** déterministe à **K états**
→ robot avec $\lceil \log K \rceil$ bits de mémoire
- Automate de Moore $\{I, P, S, \delta, \pi, s_0\}$
 - I : ensemble des entrées (degré, port)
 - P : ensemble des sorties (port)
 - S : ensemble des états
 - δ : fonction de transition ($I \times A \rightarrow A$)
 - π : fonction de déplacement ($A \rightarrow P$)
 - s_0 : état initial

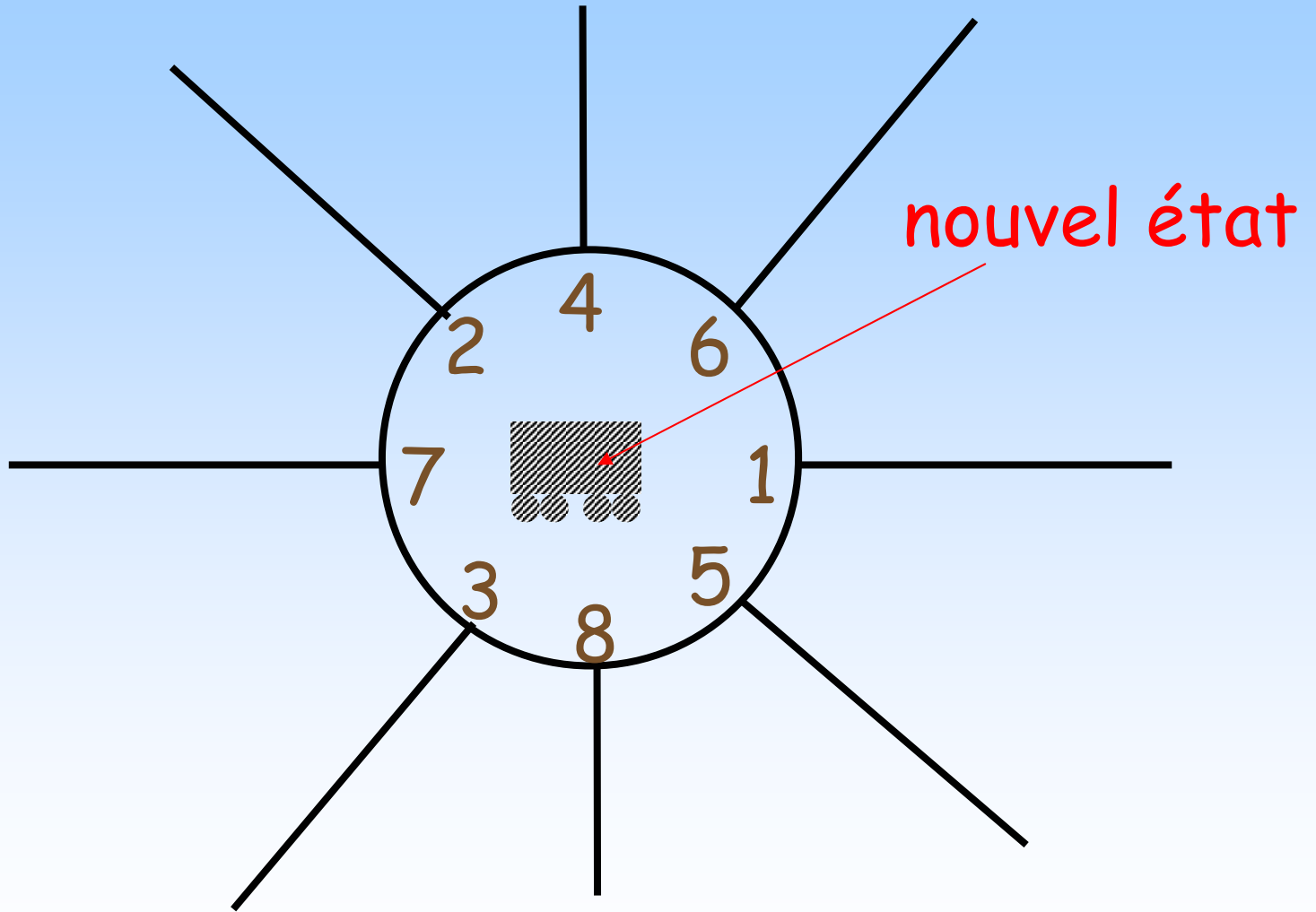
Actions du robot



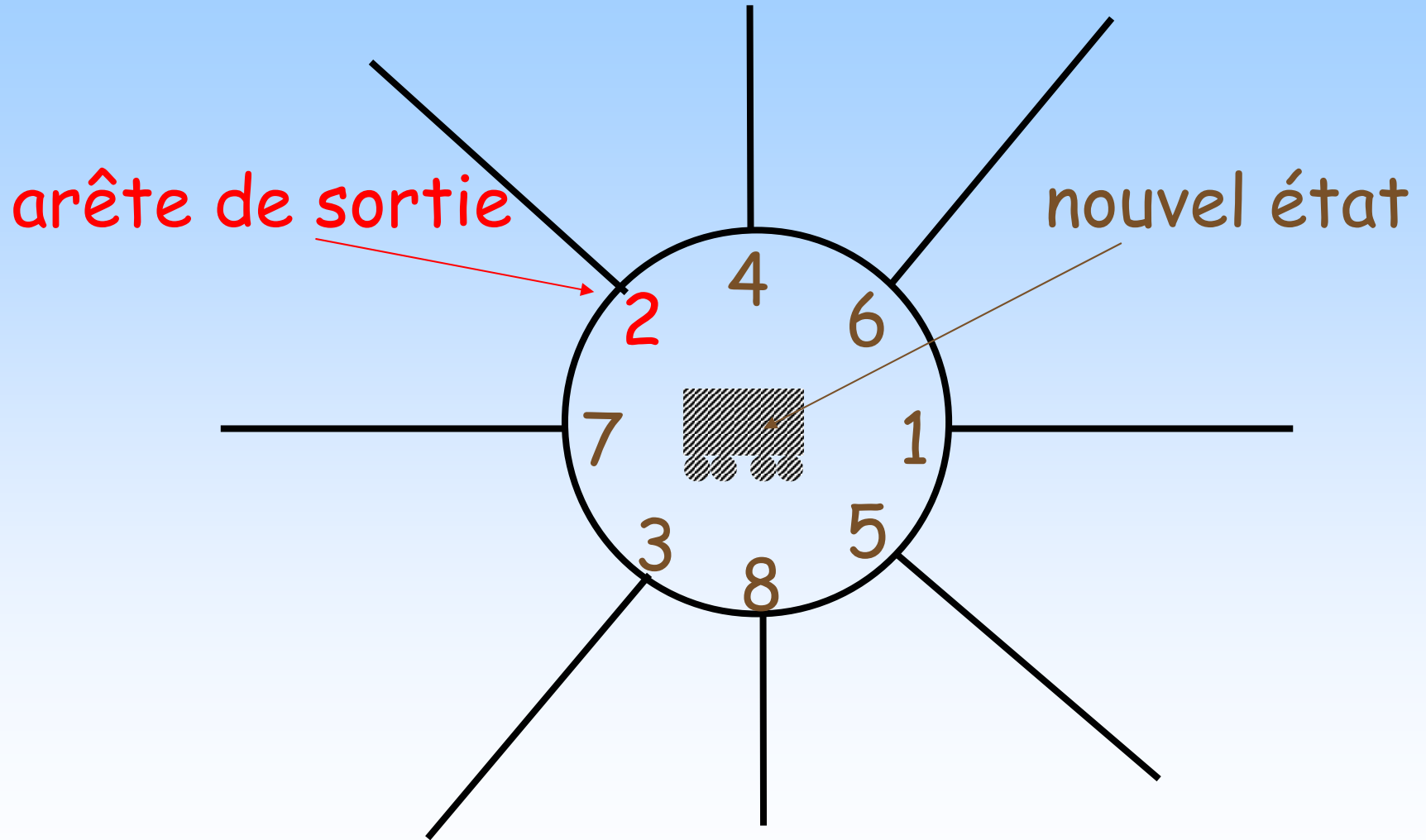
Actions du robot



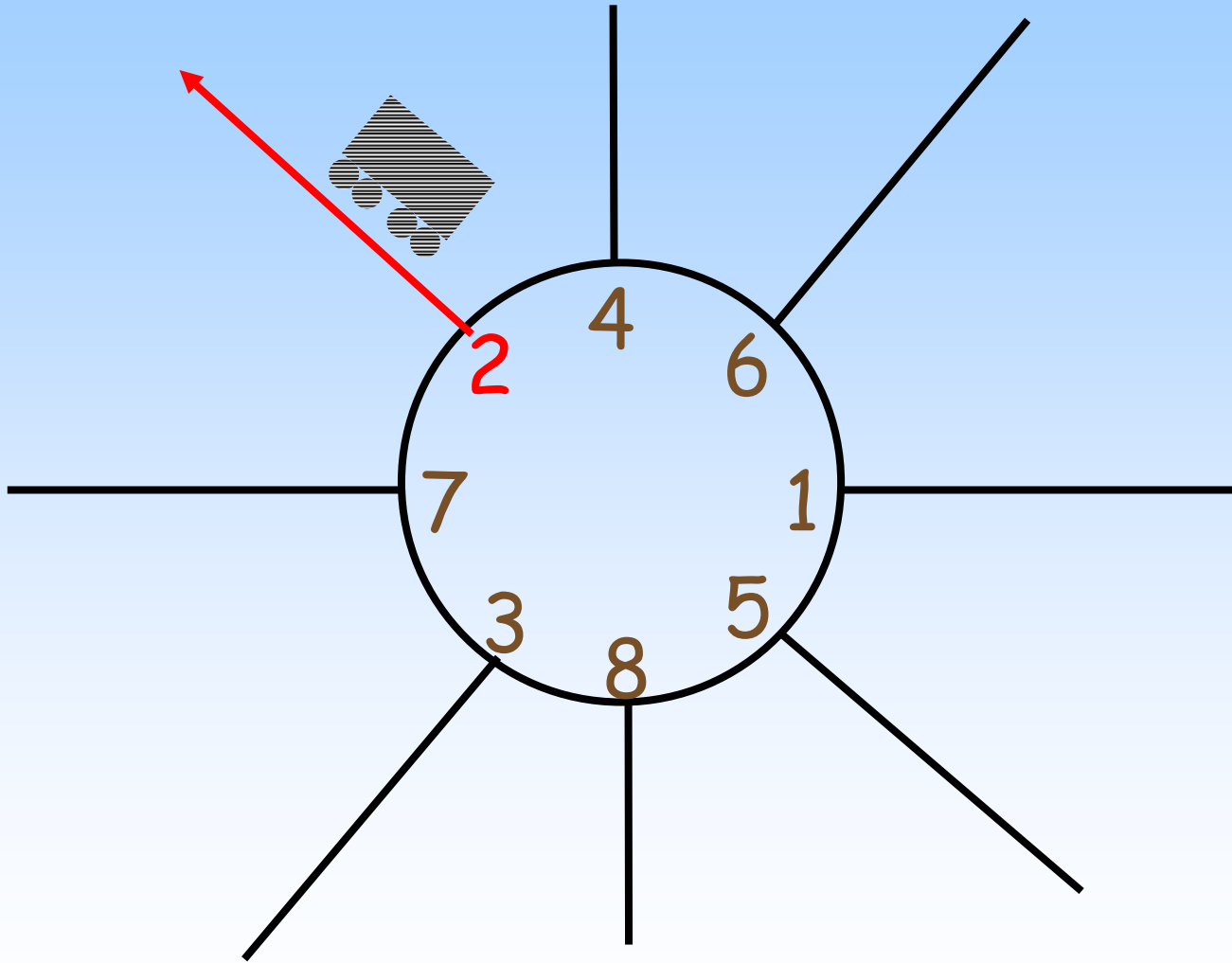
Actions du robot



Actions du robot



Actions du robot



Plan

- Historique
- Construction d'un piège (borne inférieure)
 - piège pour l'automate A = graphe que l'automate A n'explore pas entièrement
- Algorithme optimal (borne supérieure)

Historique (1)

- Première publication sur les labyrinthes
 - Wiener, 1873
- The mouse of Shannon
 - Shannon, Presentation of a maze-solving machine, 1951
- Communication orale
 - Rabin, Berkeley, 1966
- Arguments formels
 - Müller, Endliche Automaten und Labyrinth, 1971
 - Coy, Automata in labyrinths, 1977

Historique (2)

- Premier piège (labyrinthes)
 - **Budach**, Automata and Labyrinths, Math. Nachrichten, **1978**
- Piège pour plusieurs automates
 - **Rollik**, Automaten in planaren Graphen, Acta informatica, **1980**

Résultats (1)

- Théorème
 - Pour tout automate fini à K états, pour tout $d \geq 3$ il existe un piège de **degré d** ayant au plus **$K+1$** sommets.
- Corollaire
 - Pour explorer tous les graphes de **taille au plus n** , un automate fini doit avoir **$\Omega(\log n)$ bits**.

Résultats (2)

- Théorème
 - Il existe un automate de $O(D \log d)$ bits de mémoire capable d'explorer tous les graphes de diamètre au plus D et de degré maximum d .
- Théorème
 - Tout automate capable d'explorer tous les graphes de diamètre au plus D et de degré maximum d doit posséder $\Omega(D \log d)$ bits de mémoire.

Définitions

Définitions

- Pseudo-palindrome

- $\emptyset, L = a_1 a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$

Définitions

- Pseudo-palindrome
 - $\emptyset, L = a_1a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$
 - Exemple : **122331**

Définitions

- Pseudo-palindrome

- $\emptyset, L = a_1 a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$

- Exemple : **122331**

\emptyset

Définitions

- Pseudo-palindrome

- $\emptyset, L = a_1 a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$

- Exemple : **122331**

11

Définitions

- Pseudo-palindrome

- $\emptyset, L = a_1 a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$

- Exemple : **122331**

1331

Définitions

- Pseudo-palindrome

- $\emptyset, L = a_1 a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$

- Exemple : **122331**

122331

Définitions

- Pseudo-palindrome
 - $\emptyset, L = a_1a_2\dots a_k \Rightarrow a_1a_2\dots a_i b b a_{i+1}\dots a_k$
 - Exemple : **122331**
 - Palindrome de taille paire : **2112**

Définitions

- Pseudo-palindrome
 - $\emptyset, L = a_1 a_2 \dots a_k \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_i b b a_{i+1} \dots a_k$
 - Exemple : **122331**
 - Palindrome de taille paire : **2112**
 - pp-réduction : **3121123122331** \rightarrow 313

Définitions

- Pseudo-palindrome

- $\emptyset, L=a_1a_2\dots a_k \Rightarrow a_1a_2\dots a_i b b a_{i+1}\dots a_k$

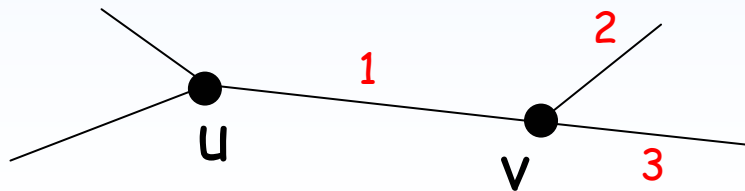
- Exemple : **122331**

- Palindrome de taille paire : **2112**

- pp-réduction : **3121123122331** \rightarrow 313

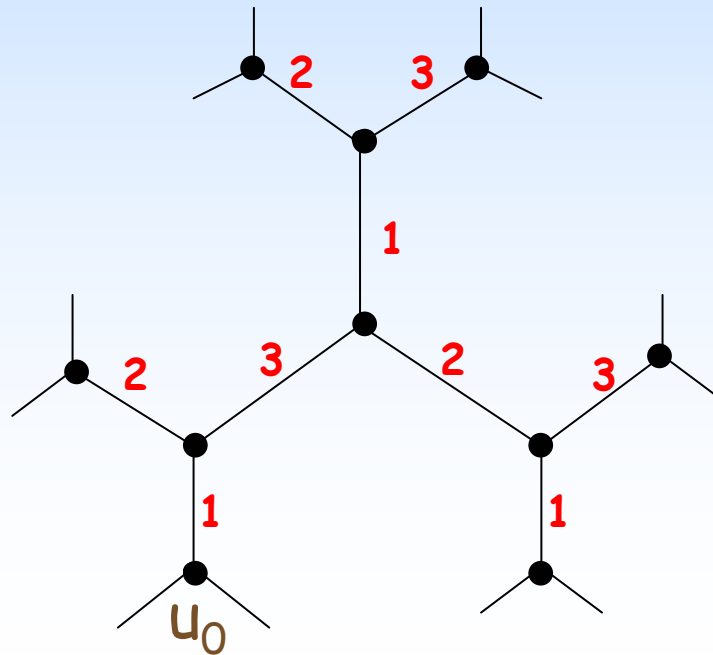
- Graphe à arêtes colorées

- chaque extrémité de l'arête est accessible par le même numéro de port



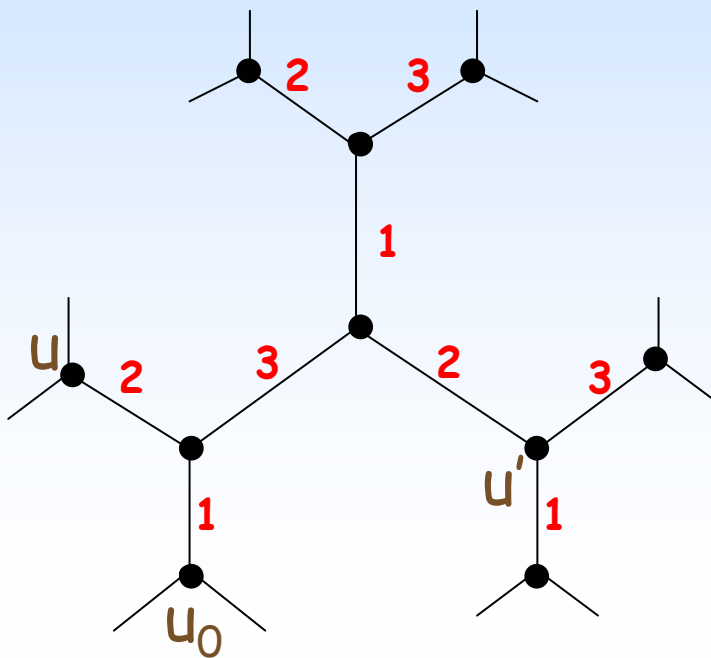
Squelette du piège (1)

- Objectif : piéger le robot dans un cycle
- Graphe de départ : arbre infini de degré 3, à arêtes colorées



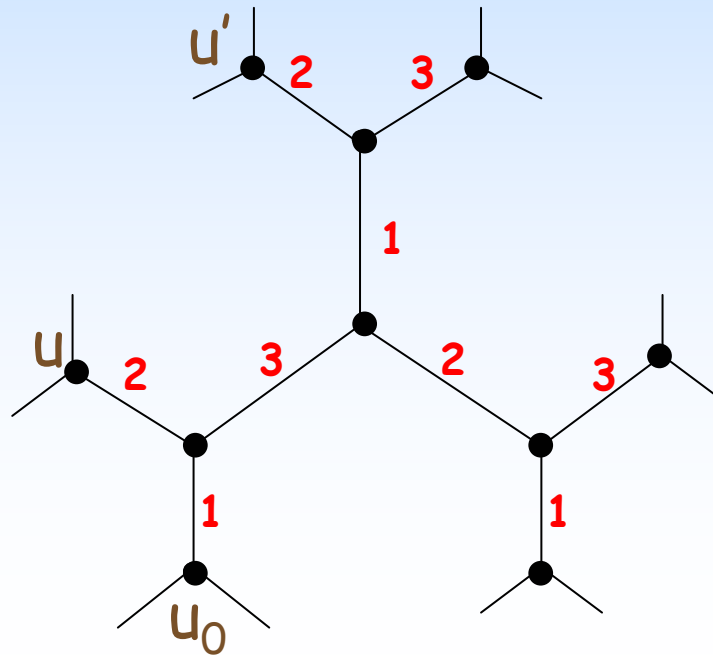
Squelette du piège (1)

- Objectif : piéger le robot dans un cycle
- Graphe de départ : arbre infini de degré 3, à arêtes colorées



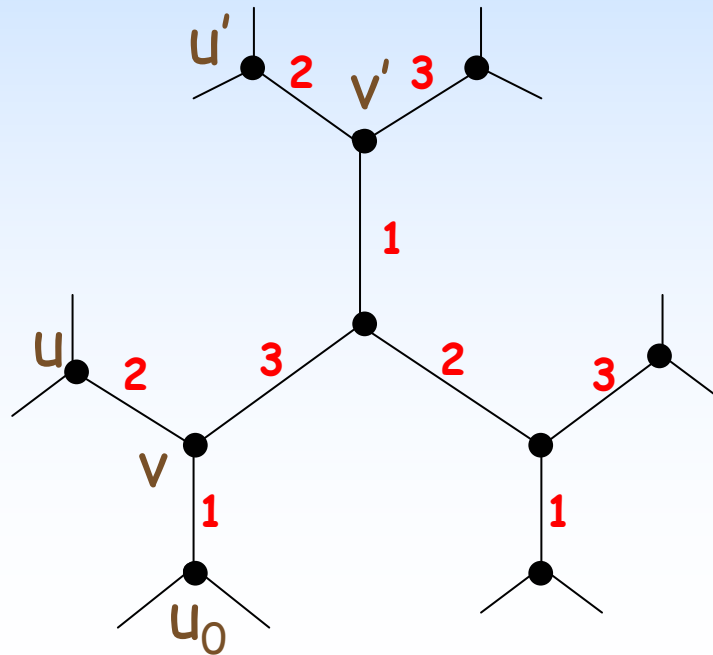
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



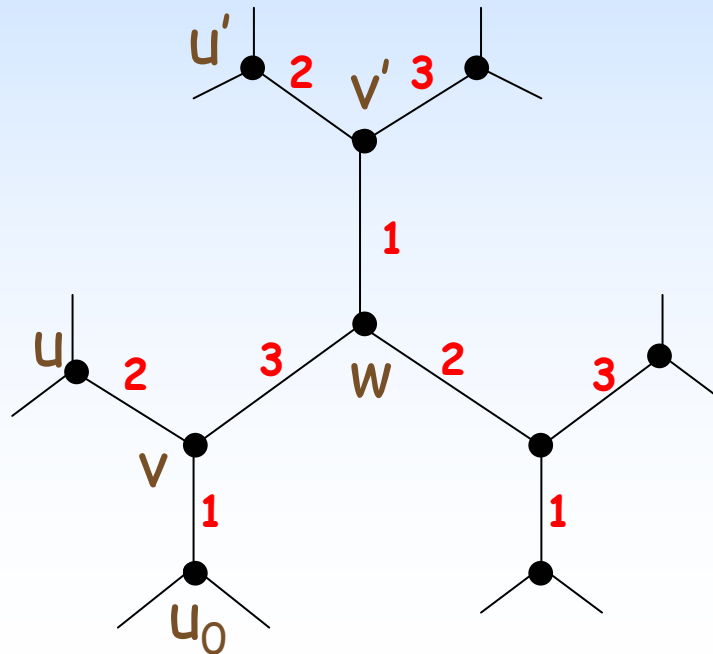
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



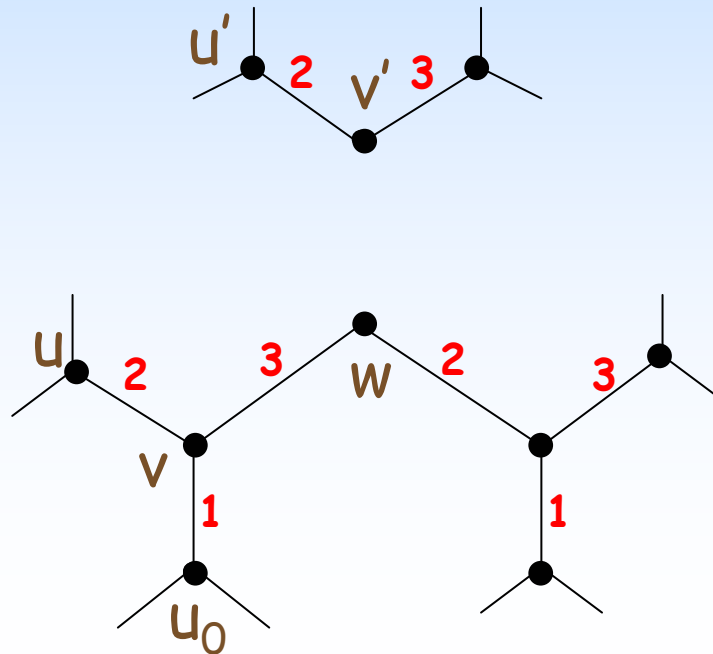
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



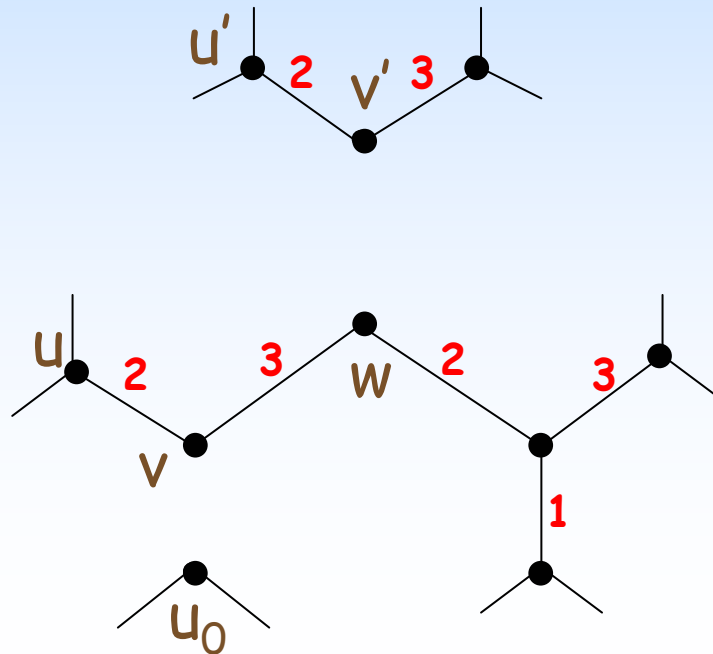
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



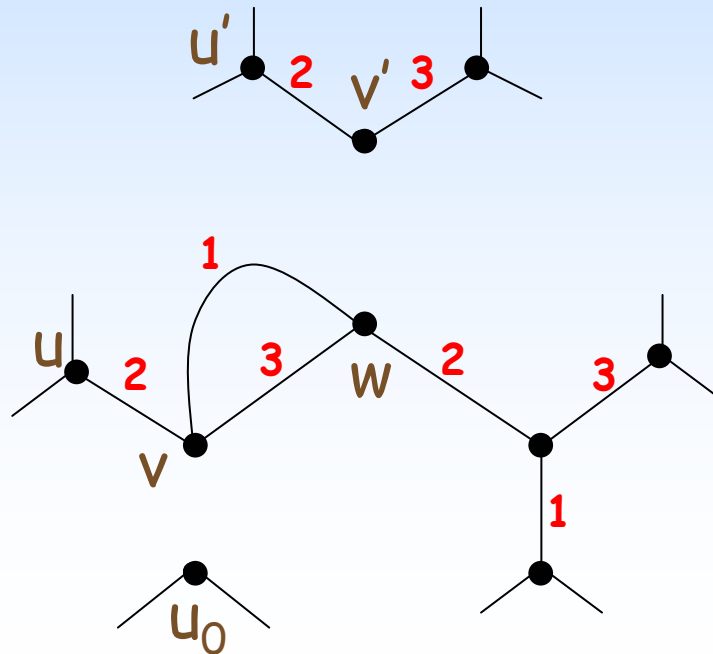
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



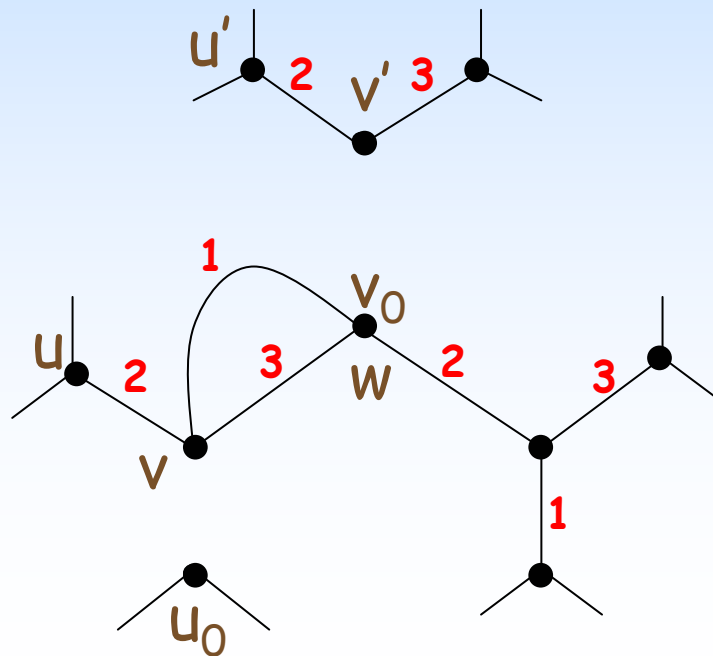
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



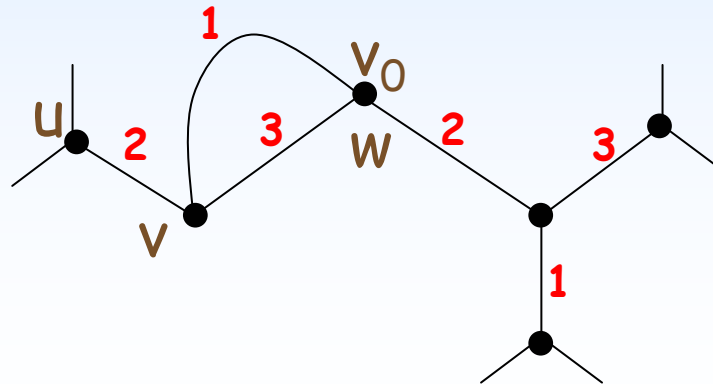
Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$



Squelette du piège (2)

- Cas où la pp-réduction n'est pas un palindrome
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty \rightarrow 2312 \rightarrow 31$

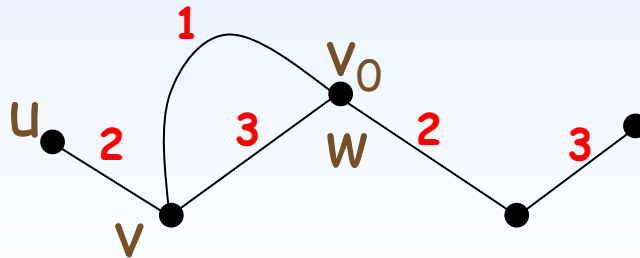


Résultat

- Il existe un piège d'au plus $K+1$ sommets

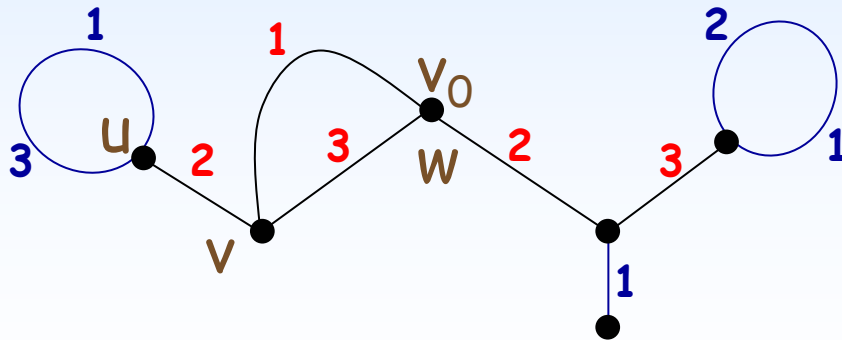
Résultat

- Il existe un piège d'au plus $K+1$ sommets
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty$



Résultat

- Il existe un piège d'au plus $K+1$ sommets
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty$



Algorithme d'exploration

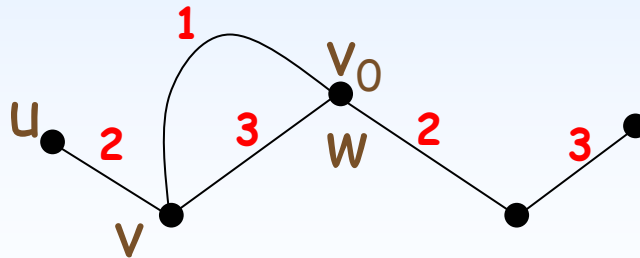
- Théorème
 - Un robot avec $O(D \log d)$ bits de mémoire peut explorer tous les graphes de degré maximum d et de diamètre au plus D
- Preuve
 - Parcours en profondeur d'abord (**DFS**) de profondeur croissante
 - Mémoire : **pile des numéros de port** menant à la racine $\rightarrow D \log(d)$ bits

Piège plus approprié

- Il existe un piège de diamètre au plus $4\lceil \log_{d-1}(K) \rceil + 2$

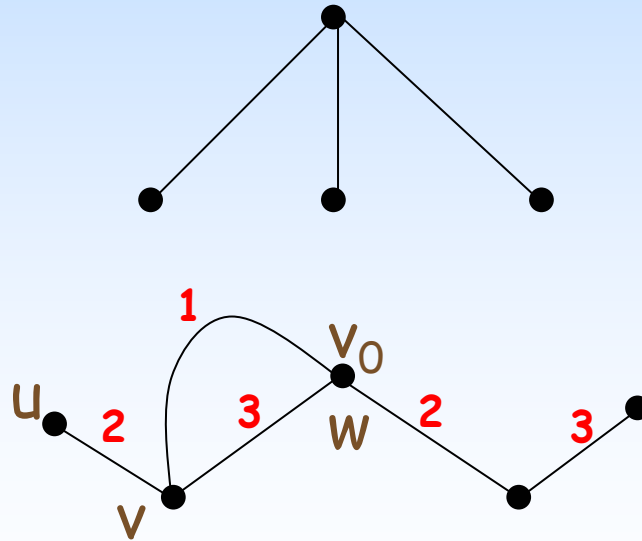
Piège plus approprié

- Il existe un piège de diamètre au plus $4\lceil \log_{d-1}(K) \rceil + 2$
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty$



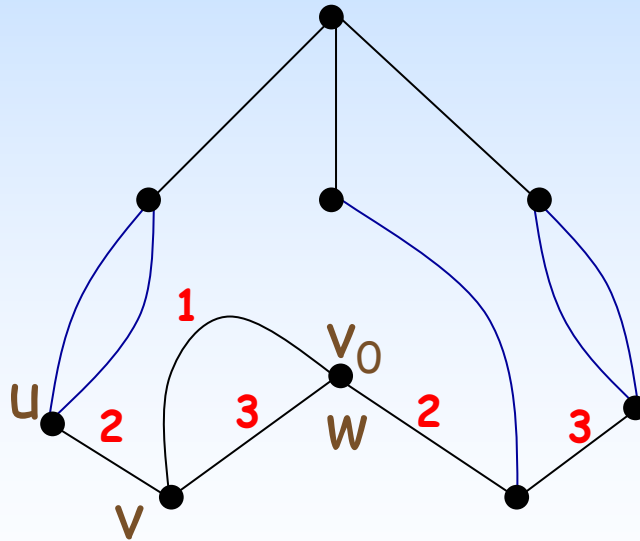
Piège plus approprié

- Il existe un piège de diamètre au plus $4\lceil \log_{d-1}(K) \rceil + 2$
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty$



Piège plus approprié

- Il existe un piège de diamètre au plus $4\lceil \log_{d-1}(K) \rceil + 2$
- Exemple : $1332-(23233212)^\infty$



Borne inférieure

- Théorème

- Pour tout automate fini à K états, il existe un piège de degré $d > 2$ de diamètre au plus $4\lceil \log_{d-1}(K) \rceil + 2$.

- Théorème

- Un robot qui peut explorer tous les graphes de degré maximum d et de diamètre au plus D nécessite $\Omega(D \log d)$ bits de mémoire.

Conclusion

- Résultats
 - Piège de $K+1$ sommets pour $d > 2$
 - Optimalité de la mémoire $\Theta(D \log d)$
 - Résultats valables aussi en **planaire**
- Perspectives
 - Exploration par plusieurs automates
 - Exploration de graphes étiquetés
 - Problème de l'arrêt