

# Familles de graphes à mineurs exclus : une introduction à la combinatoire énumérative et analytique

Mireille Bousquet-Mélou

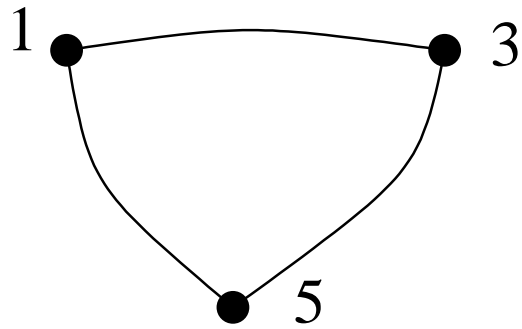
CNRS, LaBRI, Bordeaux, France

travail en commun avec Kerstin Weller, Oxford

## **A. Classes de graphes à mineurs exclus**

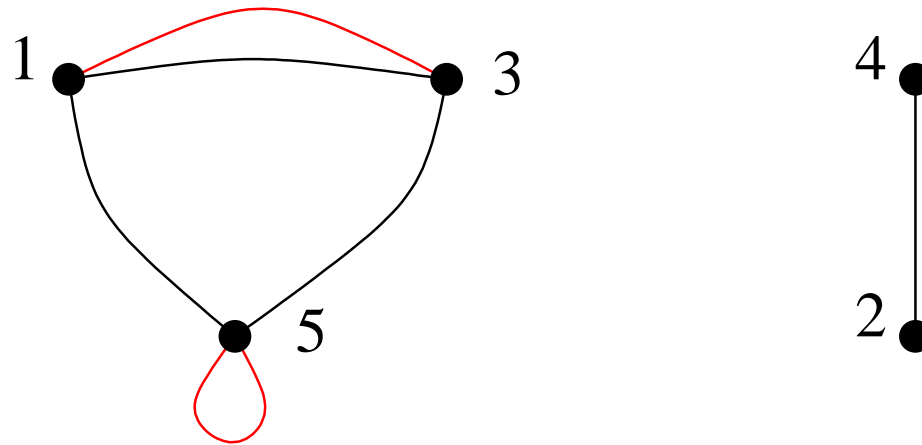
## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$



## Classes de graphes à mineurs exclus

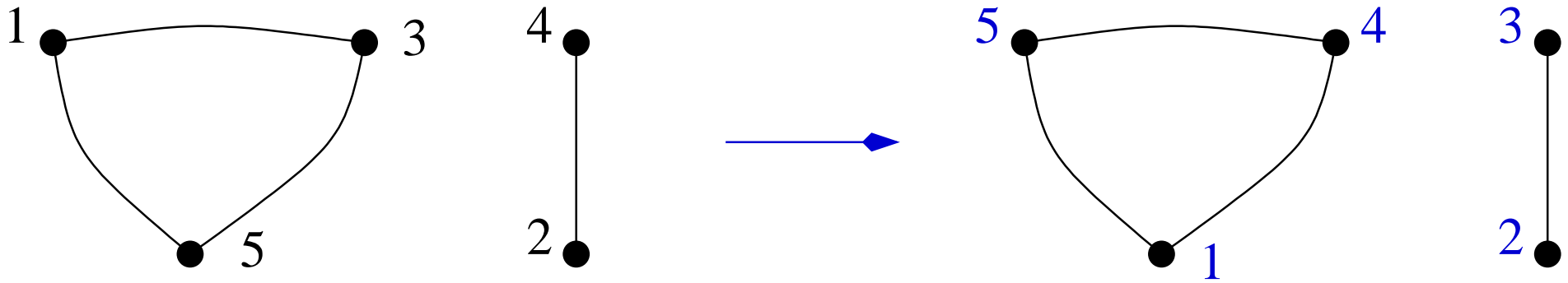
- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$



Pas de boucle, ni d'arête multiple

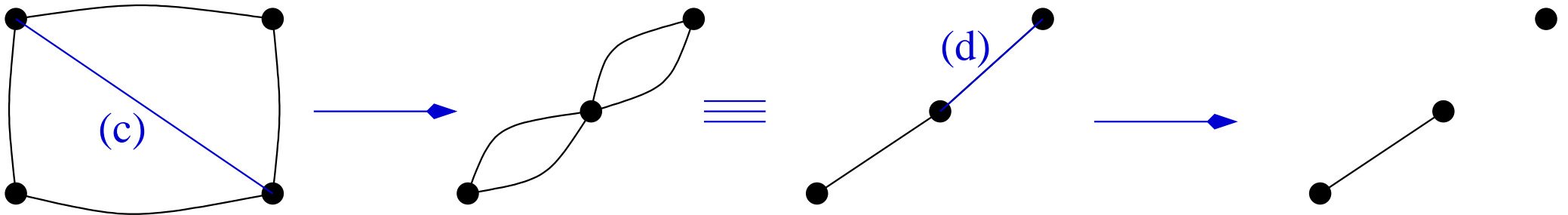
## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$
- Un ensemble de graphes est une **classe** s'il est stable par réétiquetage.



## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$
- Un ensemble de graphes est une **classe** s'il est stable par réétiquetage.
- Un **mineur** d'un graphe non étiqueté est obtenu par contraction et destruction d'arêtes, et suppression de sommets isolés.



## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$
- Un ensemble de graphes est une **classe** s'il est stable par réétiquetage.
- Un **mineur** d'un graphe non étiqueté est obtenu par contraction et destruction d'arêtes, et suppression de sommets isolés.
- La classe  $\mathcal{A}$  est **close par mineur** si tous les mineurs des graphes de  $\mathcal{A}$  sont dans  $\mathcal{A}$ .

## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$
- Un ensemble de graphes est une **classe** s'il est stable par réétiquetage.
- Un **mineur** d'un graphe non étiqueté est obtenu par contraction et destruction d'arêtes, et suppression de sommets isolés.
- La classe  $\mathcal{A}$  est **close par mineur** si tous les mineurs des graphes de  $\mathcal{A}$  sont dans  $\mathcal{A}$ .
- **Exemples** :  $\mathcal{A}$  peut être l'ensemble des forêts, celui des graphes planaires...

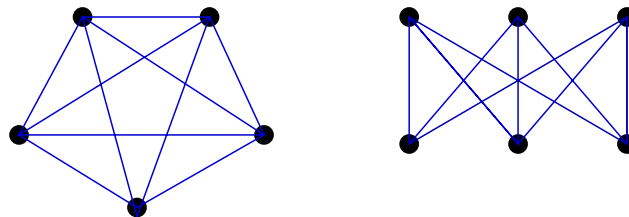


## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$
- Un ensemble de graphes est une **classe** s'il est stable par réétiquetage.
- Un **mineur** d'un graphe non étiqueté est obtenu par contraction et destruction d'arêtes, et suppression de sommets isolés.
- La classe  $\mathcal{A}$  est **close par mineur** si tous les mineurs des graphes de  $\mathcal{A}$  sont dans  $\mathcal{A}$ .
- **Exemples** :  $\mathcal{A}$  peut être l'ensemble des forêts, celui des graphes planaires...
- **Théorème [Robertson & Seymour 04]** : toute classe close par mineur peut être décrite en excluant un **nombre fini** de mineurs.

## Classes de graphes à mineurs exclus

- Graphes simples sur les sommets  $1, 2, \dots, n$
- Un ensemble de graphes est une **classe** s'il est stable par réétiquetage.
- Un **mineur** d'un graphe non étiqueté est obtenu par contraction et destruction d'arêtes, et suppression de sommets isolés.
- La classe  $\mathcal{A}$  est **close par mineur** si tous les mineurs des graphes de  $\mathcal{A}$  sont dans  $\mathcal{A}$ .
- **Exemples** :  $\mathcal{A}$  peut être l'ensemble des forêts, celui des graphes planaires...
- **Théorème [Robertson & Seymour 04]** : toute classe close par mineur peut être décrite en excluant un **nombre fini** de mineurs.
- **Exemples** : pour les forêts, on exclut le 3-cycle. Pour les graphes planaires,  $K_5$  et  $K_{3,3}$ .



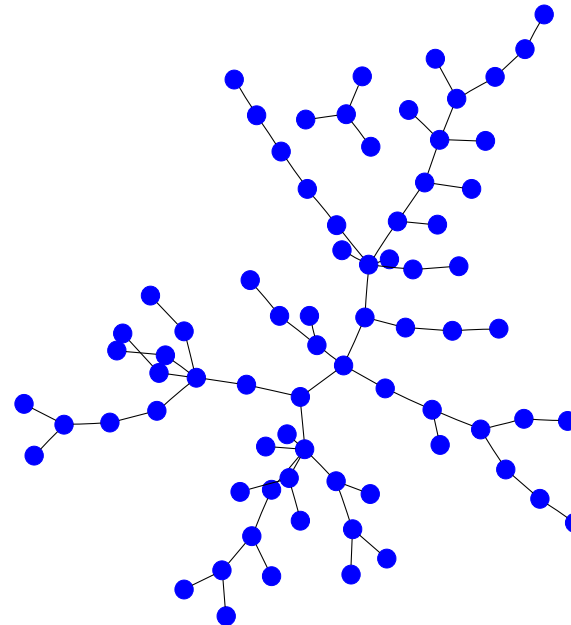
## Graphes aléatoires

Pour  $n$  fixé (et grand), soit  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des graphes de taille  $n$  ( $n$  sommets) dans la classe  $\mathcal{A}$ . Soit  $\mathcal{G}_n$  un graphe **aléatoire uniforme** de  $\mathcal{A}_n$  : pour tout  $G$  dans  $\mathcal{A}_n$ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_n = G) = \frac{1}{a(n)}$$

où  $a(n) = |\mathcal{A}_n|$ .

Forêt uniforme aléatoire  
sur 75 sommets  
(2 composantes connexes)



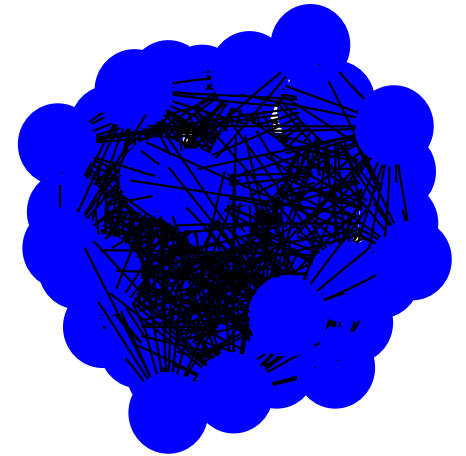
## Quelques propriétés des classes (propres) closes par mineurs

- Pas de mineur exclu :

$$a(n) = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Le nombre moyen d'arêtes est quadratique :

$$\mathbb{E}(e(\mathcal{G}_n)) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$



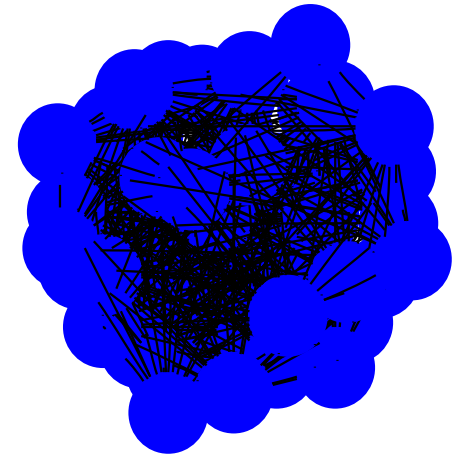
## Quelques propriétés des classes (propres) closes par mineurs

- Pas de mineur exclu :

$$a(n) = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Le nombre moyen d'arêtes est quadratique :

$$\mathbb{E}(e(\mathcal{G}_n)) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$



- Au moins un mineur exclu :

$$a(n) \leq n! \mu^n$$

pour une constante  $\mu$  [Norine, Seymour, Thomas & Wollan 06].

Le nombre d'arêtes est au plus linéaire : pour *tout* graphe de  $\mathcal{A}_n$ ,

$$e(G) \leq \alpha n$$

pour une constante  $\alpha$  qui dépend des mineurs exclus.

[Mader 68]

## Des propriétés plus fines : le nombre et la taille des composantes

- Quelle est la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe ?
- Plus généralement, quelle est la loi (distribution) de  $N_n$ , le nombre de composantes ?

## Des propriétés plus fines : le nombre et la taille des composantes

- Quelle est la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe ?
- Plus généralement, quelle est la loi (distribution) de  $N_n$ , le nombre de composantes ?
- Quelle est la taille  $R_n$  de la composante racine, c'est-à-dire celle qui contient le sommet 1 ?
- Quelle est la taille  $M_n$  de la composante maximale ?

## Des propriétés plus fines : le nombre et la taille des composantes

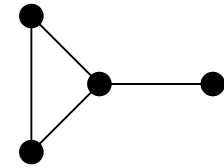
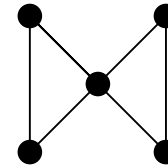
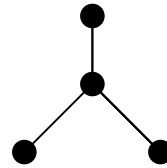
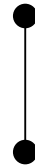
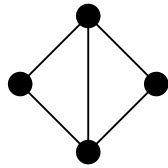
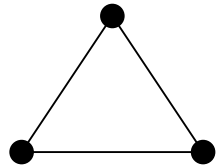
- Quelle est la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe ?
- Plus généralement, quelle est la loi (distribution) de  $N_n$ , le nombre de composantes ?
- Quelle est la taille  $R_n$  de la composante racine, c'est-à-dire celle qui contient le sommet 1 ?
- Quelle est la taille  $M_n$  de la composante maximale ?

**Remarque :** si on n'interdit aucun mineur, la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe tend vers 1 si  $n \rightarrow \infty$ , et ces questions ont des réponses simplissimes.



## Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes

Graphes 2-connexes : au moins deux chemins disjoints entre deux sommets



2-connexe

pas 2-connexe

(un sommet de degré 1

ou un point d'articulation)

## Séries génératrices

- Soit  $a(n)$  le nombre de graphes de taille  $n$  dans  $\mathcal{A}$ , et soit

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) \frac{z^n}{n!}$$

la série génératrice exponentielle associée.

- Notations similaires ( $c(n)$  et  $C(z)$ ) pour les graphes **connexes** de  $\mathcal{A}$ .
- Extraction de coefficient :  $[z^n]A(z) := a(n)/n!$
- Si tous les mineurs exclus sont connexes, les graphes de  $\mathcal{A}$  sont des ensembles arbitraires de graphes de  $\mathcal{C}$  et

$$A(z) = \exp(C(z)).$$

Preuve :

$$a(n) = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} c(n_1) \cdots c(n_k) \frac{n!}{n_1! \cdots n_k! k!}$$

## Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes

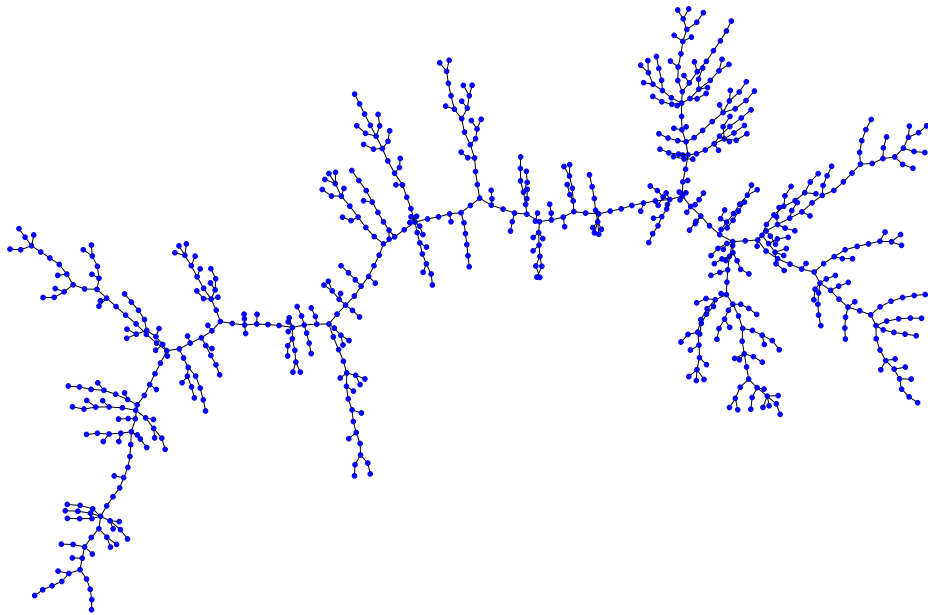
**Théorème [McDiarmid 09]** : Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes,

- $C(z)$  et  $A(z)$  convergent en leur rayon de convergence (commun)  $\rho$

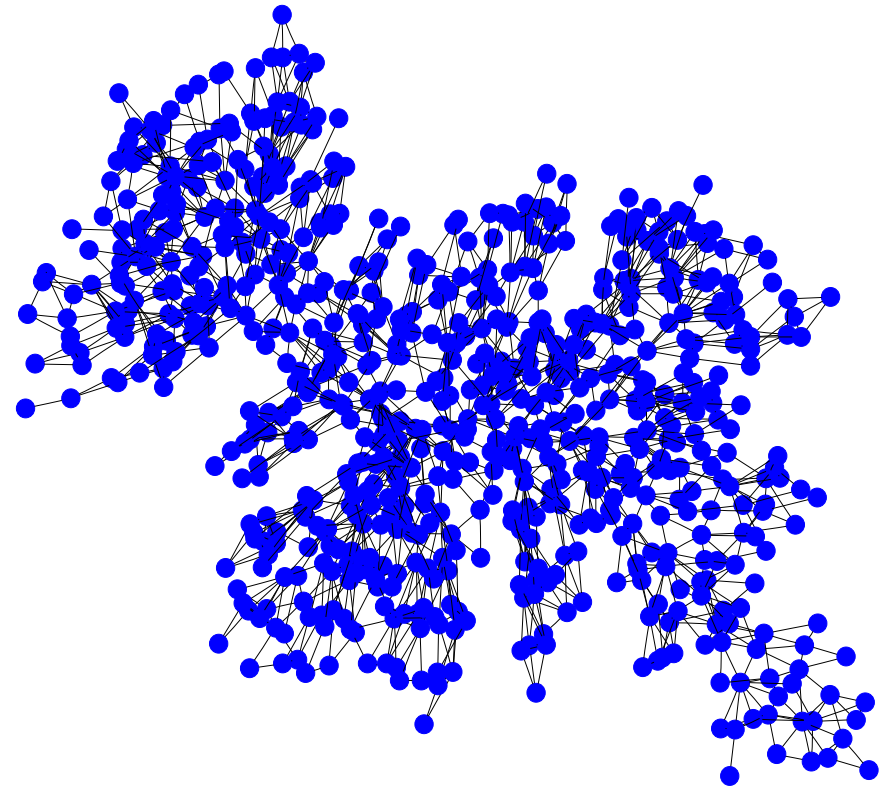
## Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes

**Théorème [McDiarmid 09]** : Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes,

- $C(z)$  et  $A(z)$  convergent en leur rayon de convergence (commun)  $\rho$
- la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe tend vers  $1/A(\rho)$ , qui est dans l'intervalle  $[1/\sqrt{e}, 1)$



Forêts :  $1/A(\rho) = 1/\sqrt{e} = 0.60\dots$



Graphes planaires :  $1/A(\rho) = 0.97\dots$   
[Gimenez & Noy 09]

## Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes

**Théorème [McDiarmid 09]** : Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes,

- $C(z)$  et  $A(z)$  convergent en leur rayon de convergence (commun)  $\rho$
- la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe tend vers  $1/A(\rho)$ , qui est dans l'intervalle  $[1/\sqrt{e}, 1)$
- en fait,  $N_n - 1$  converge vers une distribution de Poisson de paramètre  $C(\rho)$  :

$$\mathbb{P}(N_n = i + 1) \rightarrow \frac{C(\rho)^i}{i!A(\rho)}$$

## Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes

**Théorème [McDiarmid 09]** : Si tous les mineurs exclus sont 2-connexes,

- $C(z)$  et  $A(z)$  convergent en leur rayon de convergence (commun)  $\rho$
- la probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe tend vers  $1/A(\rho)$ , qui est dans l'intervalle  $[1/\sqrt{e}, 1)$  (\*)
- en fait,  $N_n - 1$  converge vers une distribution de Poisson de paramètre  $C(\rho)$  :

$$\mathbb{P}(N_n = i + 1) \rightarrow \frac{C(\rho)^i}{i!A(\rho)}$$

- la composante racine contient presque tous les sommets ; plus précisément,

$$\mathbb{P}(R_n = n - k) \rightarrow \frac{1}{A(\rho)} \frac{a(k)\rho^k}{k!}$$

(\*) [Addario Berry, McDiarmid & Reed 11], [Kang & Panagiotou 11]

## Et si certains des mineurs exclus ne sont pas 2-connexes?

Les résultats ci-dessus ne peuvent pas être toujours vrais

**Exemple** : on exclut le graphe réduit à une arête (et 2 sommets). Alors :

- $\mathcal{G}_n$  n'est jamais connexe (si  $n \geq 2$ ),
- le nombre de composantes est maximal :  $N_n = n$ ,
- la composante racine est maximale, de taille  $R_n = M_n = 1$ .

Plus de composantes, plus petites :

les graphes s'émettent un peu plus

## Nos résultats : une collection d'exemples

### ... et quelques prédictions

Pour une collection de classes closes par mineur évitant certains mineurs non 2-connexes,

- détermination des séries  $C(z)$  et  $A(z)$ ,
- comportement asymptotique de  $N_n$  (nombre de composantes),
- comportement asymptotique de  $R_n$  (taille de la composante racine),
- pour certaines classes, comportement asymptotique de  $M_n$  (taille de la composante maximale),
- générateurs aléatoires efficaces (uniformes dans  $\mathcal{A}_n$ ).

**Note** : tous nos mineurs exclus sont connexes, et donc  $A(z) = \exp(C(z))$



Exemple : forêts de chemins ( $n_i \triangle n_i \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array}$ )



taille 597

## Exemple : forêts de chemins (ni $\triangle$ ni $\blacktriangledown$ )

- Énumération exacte :

$$C(z) = \sum_{n \geq 1} c(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{z(2-z)}{2(1-z)}, \quad A(z) = \exp(C(z))$$

- Énumération asymptotique :

$$c(n) = \frac{n!}{2} \quad \text{et} \quad a(n) \sim \frac{n! (e/2)^{1/4}}{2 \sqrt{\pi n^{3/4}}} e^{\sqrt{2n}}.$$

En particulier,  $\frac{c(n)}{a(n)} \rightarrow 0$ .

## Exemple : forêts de chemins ( $ni \triangle ni \curvearrowright$ )

- Énumération exacte :

$$C(z) = \sum_{n \geq 1} c(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{z(2-z)}{2(1-z)}, \quad A(z) = \exp(C(z))$$

- Énumération asymptotique :

$$c(n) = \frac{n!}{2} \quad \text{et} \quad a(n) \sim \frac{n! (e/2)^{1/4}}{2 \sqrt{\pi n^{3/4}}} e^{\sqrt{2n}}.$$

En particulier,  $\frac{c(n)}{a(n)} \rightarrow 0$ .

- La moyenne et la variance de  $N_n$  satisfont :

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \sqrt{n/2}, \quad \mathbb{V}(N_n) \sim \sqrt{n/8},$$

et la variable aléatoire normalisée  $\frac{N_n - \sqrt{n/2}}{(n/8)^{1/4}}$  converge en loi vers une distribution normale standard :

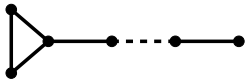






$$\mathbb{P} \left( \frac{N_n - \sqrt{n/2}}{(n/8)^{1/4}} \leq y \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx.$$

- La moyenne et la variance de  $R_n$  satisfont :

$$\mathbb{E}(R_n) \sim 2\sqrt{2n}, \quad \mathbb{V}(R_n) \sim 4n,$$

et la variable aléatoire normalisée  $R_n/\sqrt{2n}$  converge en loi vers une loi Gamma(2, 1)

$$\mathbb{P}\left(R_n/\sqrt{2n} \leq y\right) \rightarrow \int_0^y x e^{-x} dx.$$

Mineurs exclus	2-conn. ou 	 et 		 ou  et 	tous les connexes de taille $k + 1$
$C(z)$ $z \rightarrow \rho$	$< \infty$	$\log \frac{1}{1-z/\rho}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z/\rho}}$	$\frac{1}{1-z/\rho}$	entière
$\mathbb{P}(\text{conn.})$	$\rightarrow p > 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$N_n$	$O(1)$ Poisson	$\log n$ gaussienne	$n^{1/3}$ gaussienne	$n^{1/2}$ gaussienne	$n/k$ gaussienne (*)
$R_n$	$n - R_n$ $\rightarrow$ discr.	$n$ $\frac{1}{4}(1-x)^{-3/4}$	$n^{2/3}$ $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}e^{-x}$	$n^{1/2}$ $xe^{-x}$	$k$ Dirac
$M_n$	$n - R_n$ $\rightarrow$ discr.	$n$ Poisson-Dir.	?	$n^{1/2} \log n$ Gumbel	$k$ Dirac

(\*) [Canfield 77]

## Observations

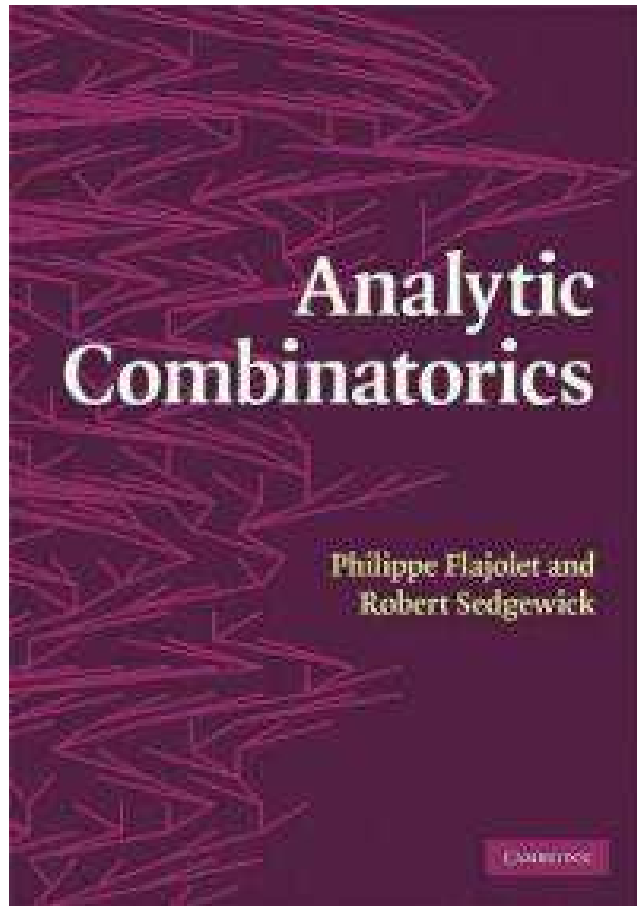
Plus  $C(z)$  diverge brutalement en  $\rho$ ,  
plus on a de composantes,  
et plus elles sont petites

- La probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe,  $c(n)/a(n)$ , tend toujours vers  $1/A(\rho) \in [0, 1)$ .

- Un premier schéma : si  $C(z) \sim (1 - z/\rho)^{-\alpha}$ , avec  $\alpha > 0$ ,

$$N_n \simeq n^{\alpha/(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad R_n \simeq n^{1/(1+\alpha)}$$

## B. Techniques : combinatoire analytique



Philippe Flajolet, Robert Sedgewick

## **B1. Énumération exacte**



## Écrire directement des équations à partir d'une description récursive des objets

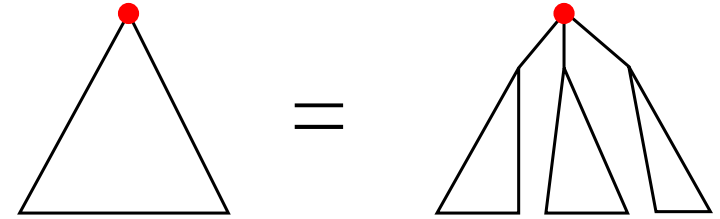
Construction	Nombres	Série génératrice
Union $\mathcal{A} = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$	$a(n) = b(n) + c(n)$	$A(z) = B(z) + C(z)$
Produit $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$  $ (\beta, \gamma)  =  \beta  +  \gamma $	$a(n) = \sum_i \binom{n}{i} b(i) c(n - i)$	$A(z) = B(z) \cdot C(z)$
Suite $\mathcal{A} = \text{Seq}(\mathcal{B})$		$A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}$
Ensemble $\mathcal{A} = \text{Set}(\mathcal{B})$		$A(z) = \exp(B(z))$
Cycle (orienté) $\mathcal{A} = \text{Cyc}(\mathcal{B})$		$A(z) = \log \frac{1}{1 - B(z)}$

$$A(z) = \sum_n a(n) \frac{z^n}{n!}$$

## Un exemple de base : les forêts (pas de $\Delta$ )

- Un arbre enraciné (en un sommet) est constitué d'un sommet racine et d'un ensemble d'arbres ( $T(z)$  pour chacun) :

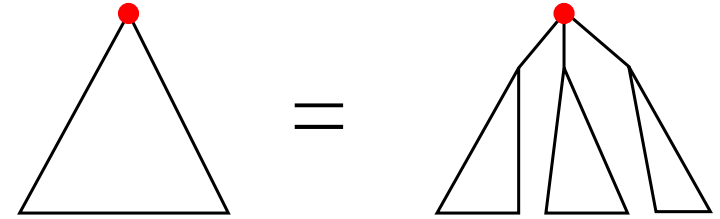
$$T(z) = z \exp(T(z)).$$



## Un exemple de base : les forêts (pas de $\Delta$ )

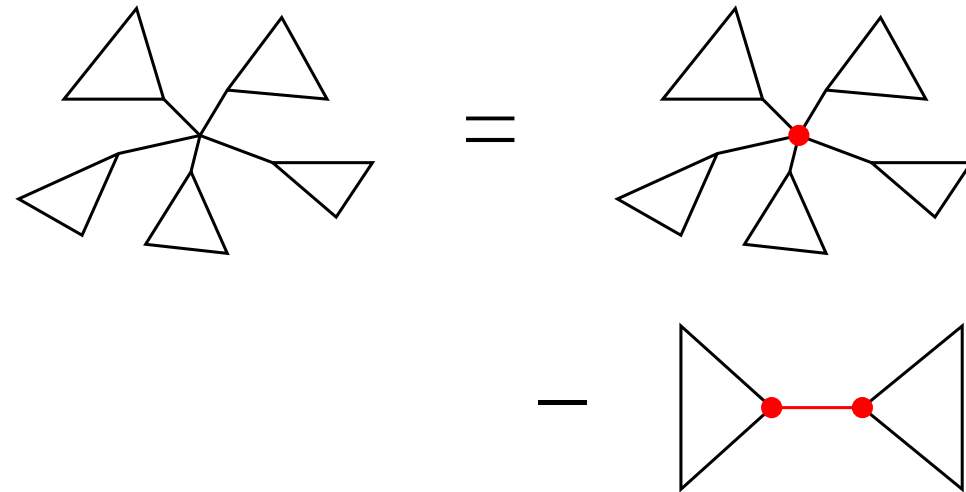
- Un arbre enraciné (en un sommet) est constitué d'un sommet racine et d'un ensemble d'arbres ( $T(z)$  pour chacun) :

$$T(z) = z \exp(T(z)).$$



- Un arbre à  $n$  sommets a  $n - 1$  arêtes, et un arbre enraciné sur une arête est une paire d'arbres enracinés sur un sommet :

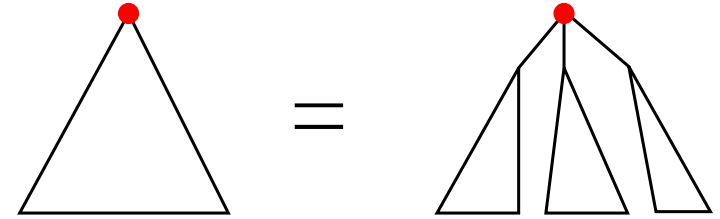
$$C(z) = T(z) - \frac{1}{2}T(z)^2.$$



## Un exemple de base : les forêts (pas de $\Delta$ )

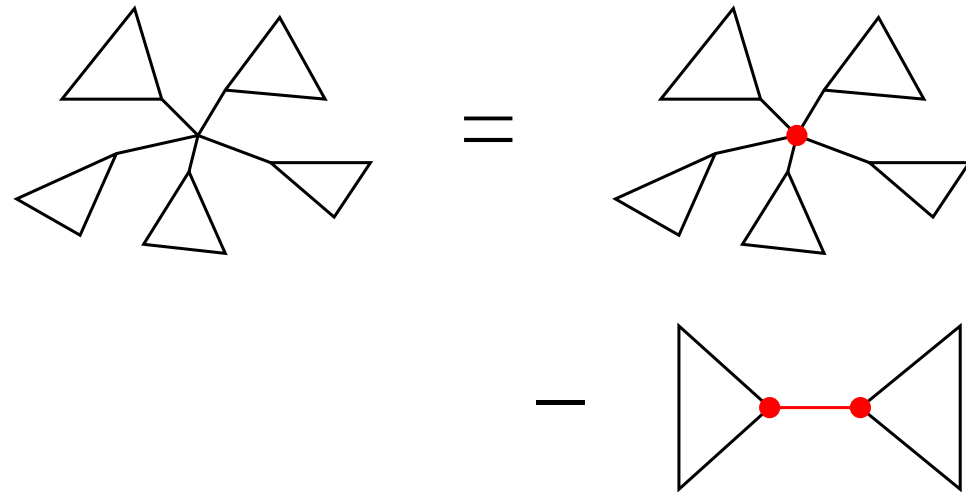
- Un arbre enraciné (en un sommet) est constitué d'un sommet racine et d'un ensemble d'arbres ( $T(z)$  pour chacun) :

$$T(z) = z \exp(T(z)).$$



- Un arbre à  $n$  sommets a  $n - 1$  arêtes, et un arbre enraciné sur une arête est une paire d'arbres enracinés sur un sommet :

$$C(z) = T(z) - \frac{1}{2}T(z)^2.$$



- Une forêt est un ensemble d'arbres non enracinés :

$$A(z) = \exp(C(z)).$$

## Le nombre et la taille des composantes

- La série génératrice des forêts à  $k$  composantes est

$$\frac{C(z)^k}{k!},$$

et donc la probabilité qu'une forêt de taille  $n$  ait  $k$  composantes est

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{[z^n]C(z)^k}{a(n)}.$$

## Le nombre et la taille des composantes

- La série génératrice des forêts à  $k$  composantes est

$$\frac{C(z)^k}{k!},$$

et donc la probabilité qu'une forêt de taille  $n$  ait  $k$  composantes est

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{[z^n]C(z)^k}{a(n)}.$$

- Le nombre de forêts à  $n$  sommets dont la composante racine a taille  $k$  est :

$$\binom{n-1}{k-1} c(k) a(n-k)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(R_n = k) = \frac{c(k) a(n-k) \binom{n-1}{k-1}}{a(n)}.$$

Remarque : valable en toute généralité

## **B2. Énumération asymptotique et lois limites**

# Comment extraire d'une série le comportement asymptotique de ses coefficients ?

Une correspondance générale entre

le développement singulier d'une série  $A(z)$  près de ses singularités  
dominantes

et

le développement asymptotique du  $n^e$  coefficient  $a(n)$  de cette série

**Exemple** : si les singularités dominantes ont module  $\rho$ , les coefficients satisfont

$$\limsup a(n)^{1/n} = 1/\rho.$$

## ANALYSE COMPLEXE

Deux méthodes principales : analyse de singularités et méthode du col



## Un exemple de base : les forêts

- Les séries génératrices des arbres enracinés, non enracinés, et des forêts sont données par

$$T(z) = z \exp(T(z)), \quad C(z) = T(z) - \frac{1}{2}T(z)^2, \quad A(z) = \exp(C(z))$$

## Un exemple de base : les forêts

- Les séries génératrices des arbres enracinés, non enracinés, et des forêts sont données par

$$T(z) = z \exp(T(z)), \quad C(z) = T(z) - \frac{1}{2}T(z)^2, \quad A(z) = \exp(C(z))$$

- Ces séries ont rayon  $\rho = 1/e$ , avec pour développements singuliers

$$T(z) = 1 - \sqrt{2}(1 - ze)^{1/2} + \frac{2}{3}(1 - ze) - \frac{11}{18\sqrt{2}}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

## Un exemple de base : les forêts

- Les séries génératrices des arbres enracinés, non enracinés, et des forêts sont données par

$$T(z) = z \exp(T(z)), \quad C(z) = T(z) - \frac{1}{2}T(z)^2, \quad A(z) = \exp(C(z))$$

- Ces séries ont rayon  $\rho = 1/e$ , avec pour développements singuliers

$$T(z) = 1 - \sqrt{2}(1 - ze)^{1/2} + \frac{2}{3}(1 - ze) - \frac{11}{18\sqrt{2}}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

$$C(z) = 1/2 - (1 - ze) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

$$A(z) = e^{1/2} \left( 1 - (1 - ze) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} \right) + O((1 - ze)^2).$$

## Un exemple de base : les forêts

- Les séries génératrices des arbres enracinés, non enracinés, et des forêts sont données par

$$T(z) = z \exp(T(z)), \quad C(z) = T(z) - \frac{1}{2}T(z)^2, \quad A(z) = \exp(C(z))$$

- Ces séries ont rayon  $\rho = 1/e$ , avec pour développements singuliers

$$T(z) = 1 - \sqrt{2}(1 - ze)^{1/2} + \frac{2}{3}(1 - ze) - \frac{11}{18\sqrt{2}}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

$$C(z) = 1/2 - (1 - ze) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

$$A(z) = e^{1/2} \left( 1 - (1 - ze) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} \right) + O((1 - ze)^2).$$

- Par analyse de singularités (théorèmes de transfert),

$$c(n) \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}} \quad \text{et} \quad a(n) \sim e^{1/2} c(n).$$

La probabilité que  $\mathcal{G}_n$  soit connexe tend vers  $e^{-1/2}$ .

## Forêts : le nombre $N_n$ de composantes

- On a

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{[z^n] C(z)^k}{a(n)}.$$

## Forêts : le nombre $N_n$ de composantes

- On a

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{[z^n]C(z)^k}{a(n)}.$$

- Avec

$$C(z) = \frac{1}{2} - (1 - ze) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

on obtient

$$C(z)^k = \frac{1}{2^k} + \alpha(1 - ze) + \frac{k}{2^{k-1}} \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

## Forêts : le nombre $N_n$ de composantes

- On a

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{[z^n]C(z)^k}{a(n)}.$$

- Avec

$$C(z) = \frac{1}{2} - (1 - ze) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

on obtient

$$C(z)^k = \frac{1}{2^k} + \alpha(1 - ze) + \frac{k}{2^{k-1}} \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - ze)^{3/2} + O((1 - ze)^2),$$

et donc

$$\mathbb{P}(N_n = k) \rightarrow \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

et  $N_n - 1$  suit une loi de Poisson de paramètre  $1/2$ .

## Forêts : la taille de la composante racine

On a trouvé

$$c(n) \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}} \quad \text{et} \quad a(n) \sim e^{1/2} c(n).$$

Donc pour tout  $k$  fixé,

$$\mathbb{P}(R_n = n - k) = \frac{c(n - k) a(k) \binom{n-1}{k}}{a(n)} \rightarrow \frac{1}{e^{1/2}} \frac{a(k)}{k! e^k}.$$



## Avec les mêmes outils : si $\mathcal{A}$ est dominée par les forêts

**Définition** : la classe  $\mathcal{A}$  est dominée par les forêts si

$$C(z) = T(z) - T(z)^2/2 + D(z),$$

où  $D(z)$  a un rayon strictement plus grand que  $1/e$  (le rayon de  $T$ ).

**Proposition** : dans ce cas,

$$c(n) \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}} \quad \text{et} \quad a(n) \sim A(1/e)c(n),$$

- $N_n - 1$  converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre  $C(1/e) = 1/2 + D(1/e)$ ,
- la composante racine contient presque tous les sommets, et

$$\mathbb{P}(R_n = n - k) = \frac{1}{A(1/e)} \frac{a(k)e^{-k}}{k!},$$

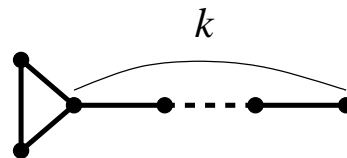
- la composante maximale satisfait les mêmes propriétés.

## Exemples où $\mathcal{A}$ est dominée par les forêts

**Proposition** : soit  $k \geq 1$ . Soit  $\mathcal{A}$  une classe de graphes fermée par mineurs qui contient tous les arbres, mais pas la  $k$ -cuillère. Alors  $\mathcal{A}$  est dominée par les forêts :

$$C(z) = T(z) - T(z)^2/2 + D(z),$$

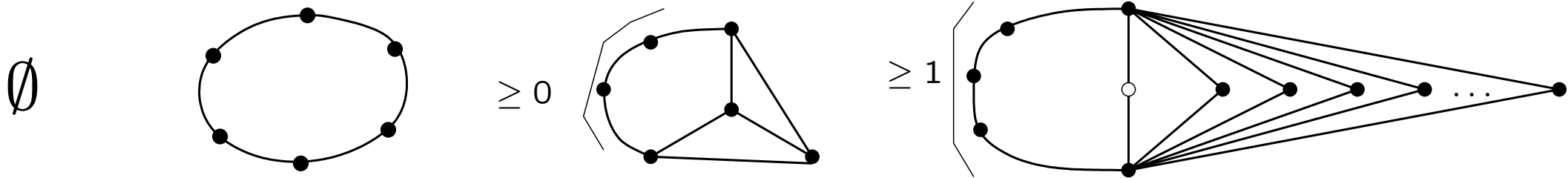
avec  $\rho(D) > 1/e$ .



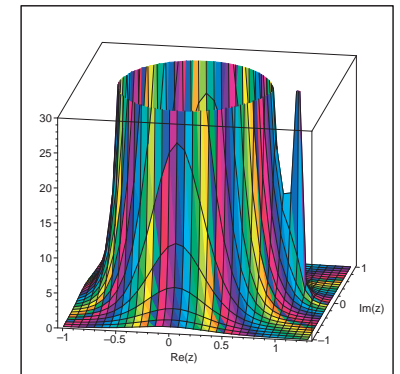
# Un exemple plus coriace : on exclut le noeud pap'

- Analyse de la structure de ces graphes, et partition et sous-classes disjointes
- Série génératrice des graphes connexes :

$$C(z) = \frac{T^2 (1 - T + T^2) e^T}{1 - T} + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{1 - T} \right) + \frac{T (12 - 54T + 18T^2 - 5T^3 - T^4)}{24(1 - T)}.$$



- Résultats asymptotiques et lois limite via la méthode du col



## B3. Génération aléatoire : générateurs de Boltzmann

Les objets d'une classe  $\mathcal{A}$  dotée d'une description récursive simple peuvent souvent être engendrés aléatoirement de façon efficace selon la loi de Boltzmann associée : un objet  $G$  de taille  $n$  a probabilité

$$\mathbb{P}(G) = \frac{x^n}{n! A(x)}$$

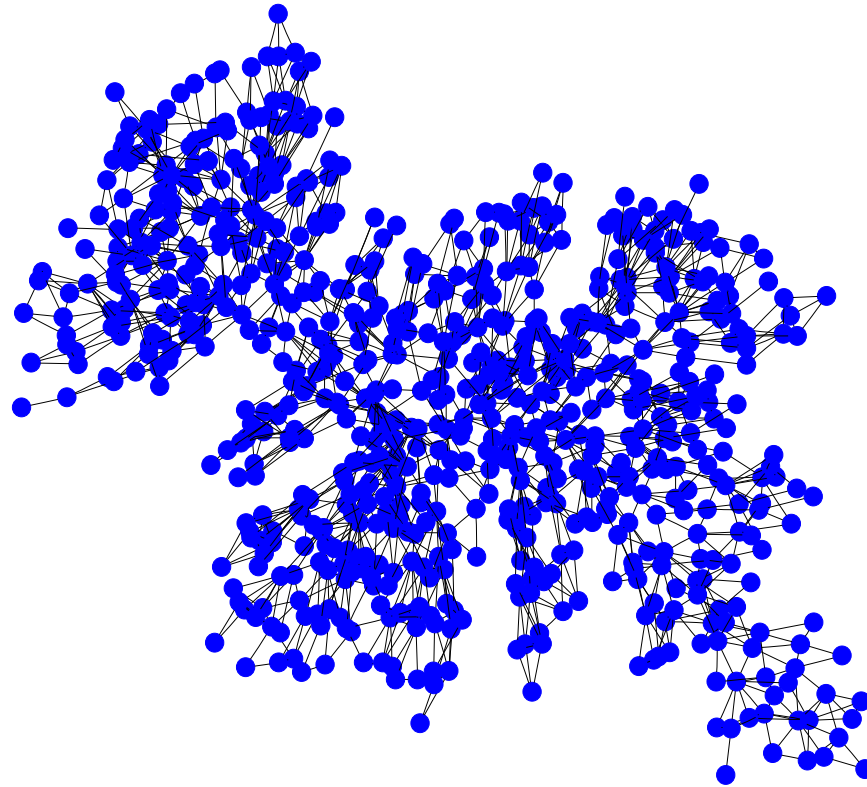
où  $A(x) = \sum_n a(n) \frac{x^n}{n!}$  et  $x \in (0, \rho]$ .

En particulier, tous les objets de taille  $n$  ont même probabilité.

[Duchon, Flajolet, Louchard, Schaeffer 04]

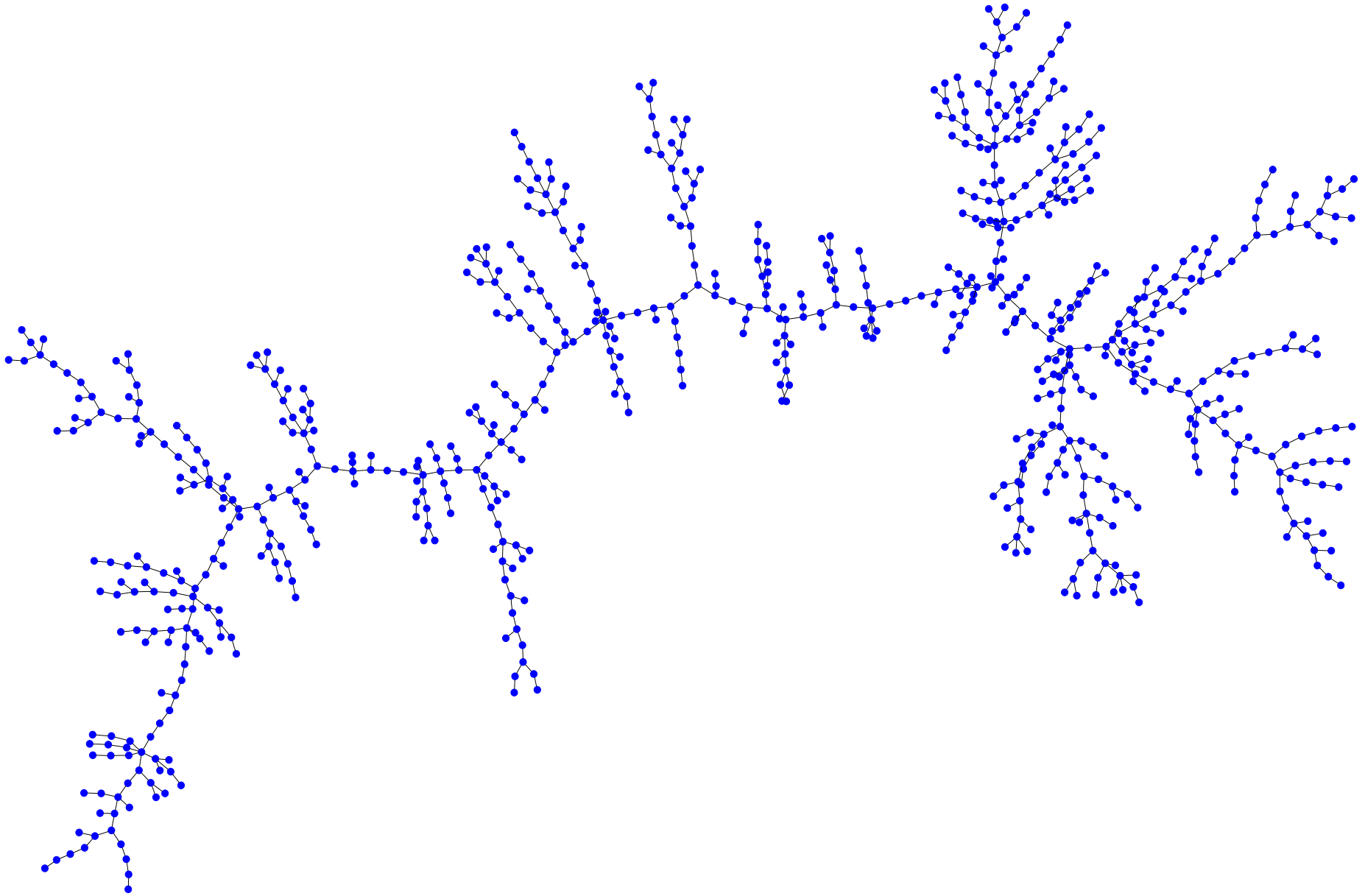
## Un graphe planaire aléatoire de taille 727

[Fusy 09] (100,000 sommets en quelques secondes)



$$\mathbb{E}(N_n) = \Theta(1) \quad \mathbb{E}(R_n) \sim n$$

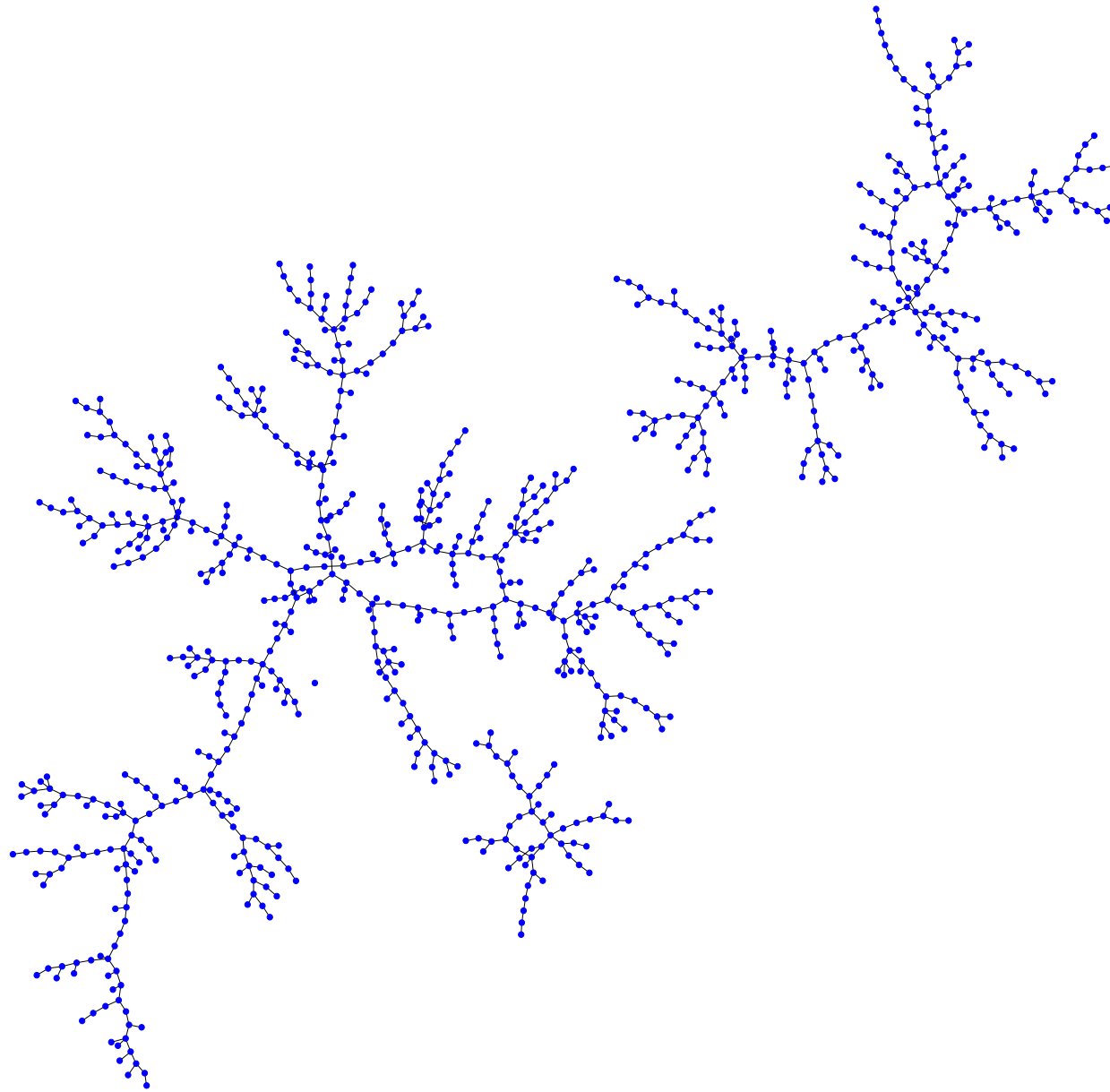
## Une forêt aléatoire de taille 745



$$\mathbb{E}(N_n) = \frac{3}{2}$$

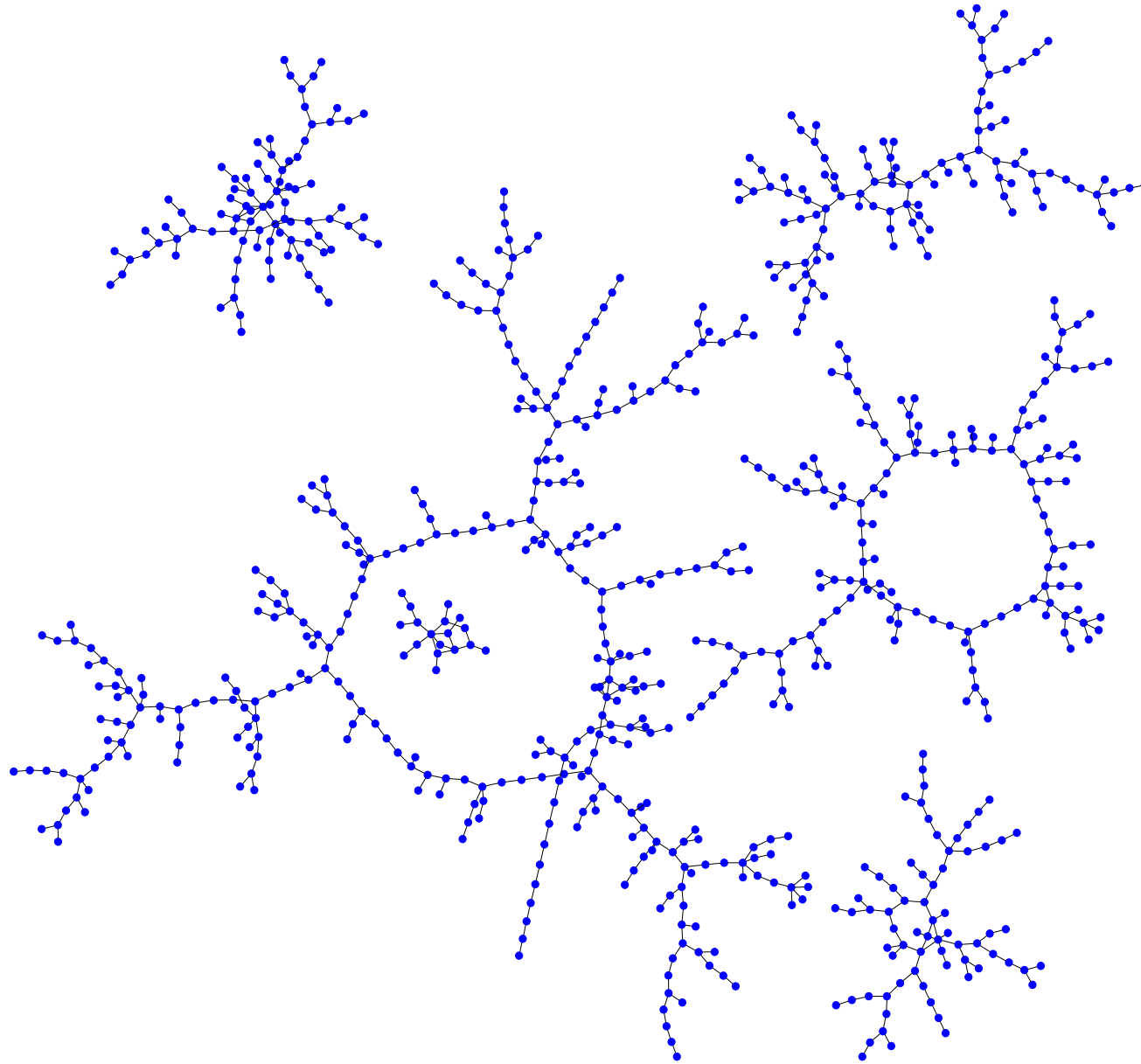
$$\mathbb{E}(R_n) \sim n$$

# Un graphe aléatoire de taille 859 évitant le diamant et le noeud pap'



$$\mathbb{E}(N_n) \simeq \log n \quad \mathbb{E}(R_n) \simeq n$$

# Un graphe aléatoire de taille 758 évitant le noeud pap'

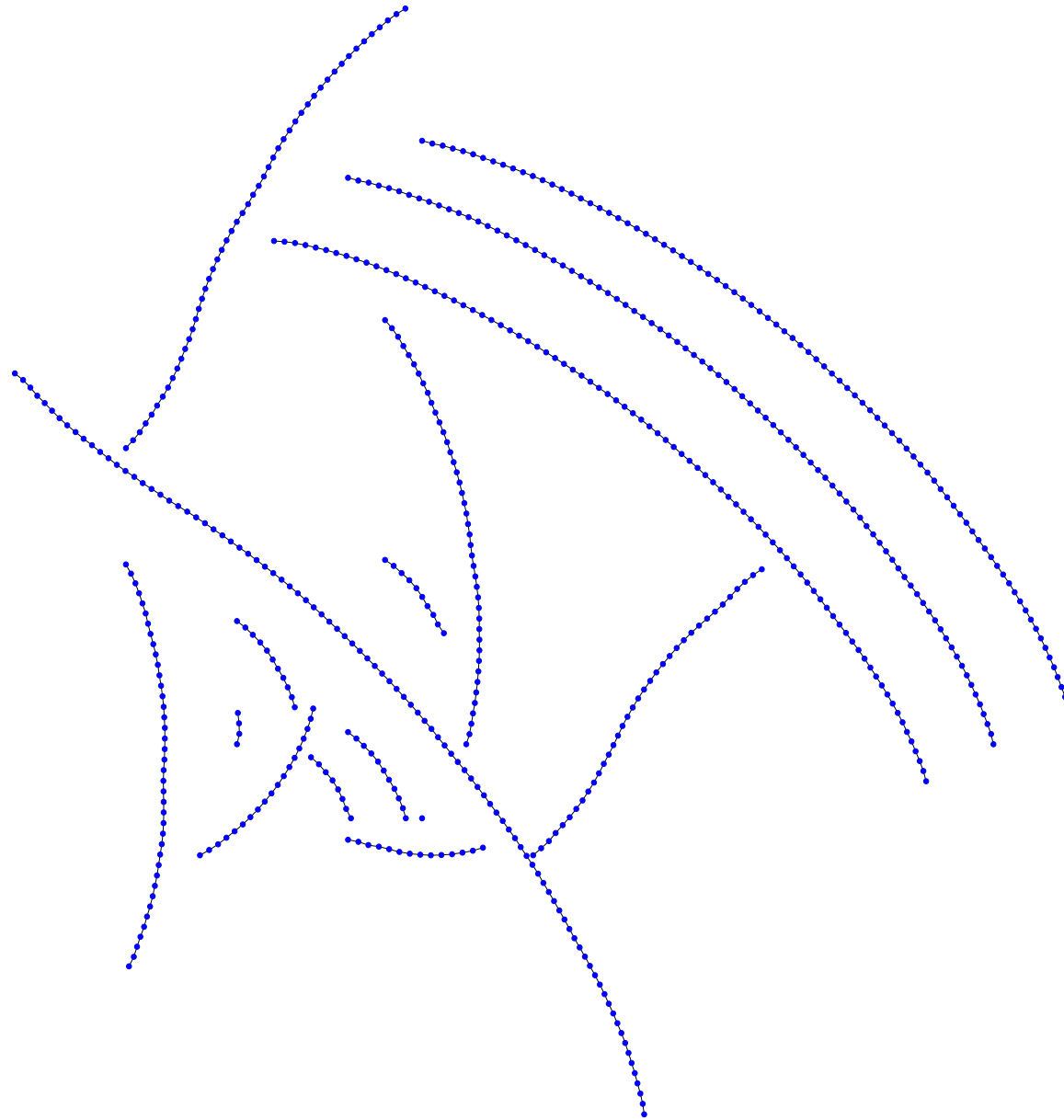


$$\mathbb{E}(N_n) \simeq n^{1/3}$$

$$\mathbb{E}(R_n) \simeq n^{2/3}$$



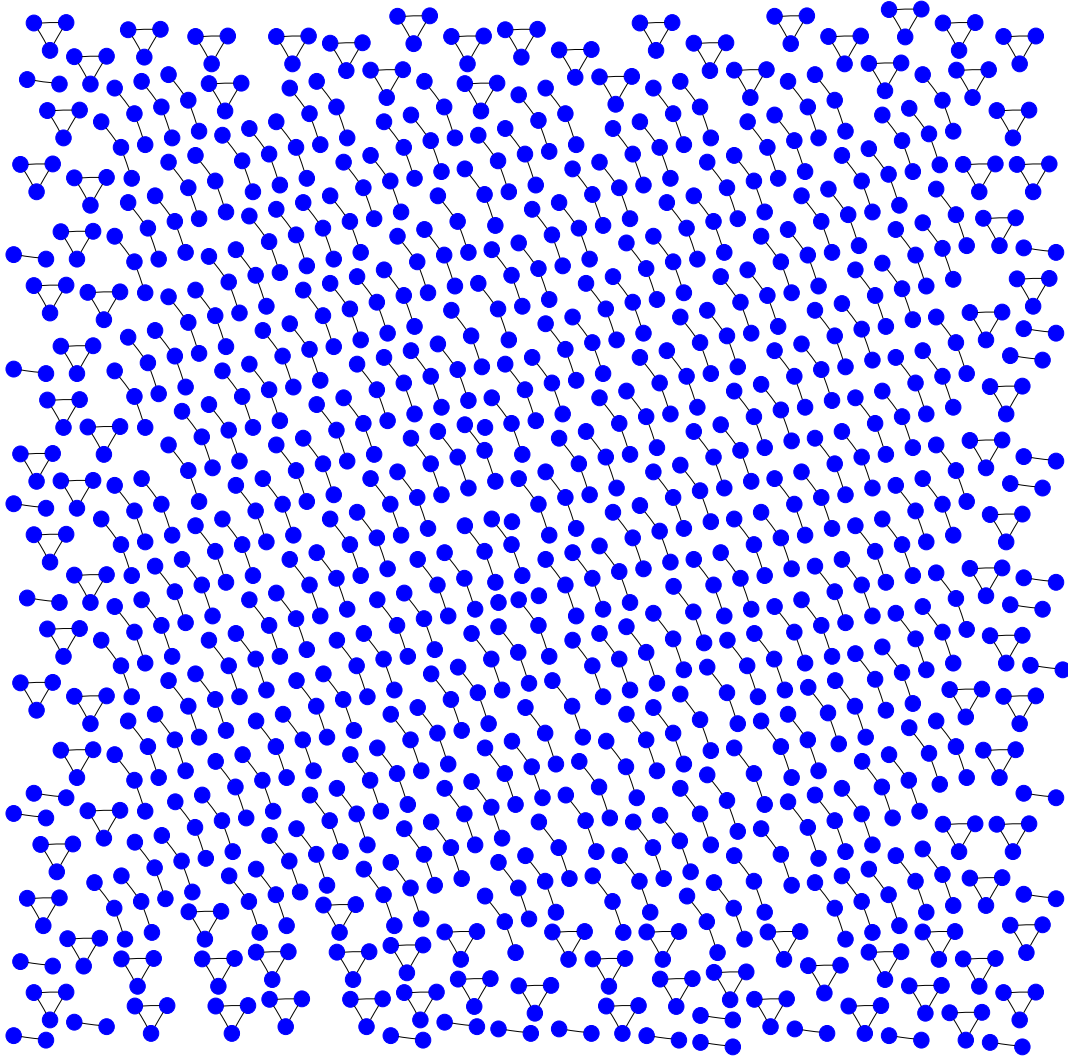
Une forêt de chemins aléatoire de taille 597 ( $n_i \triangleq n_i \blacktriangleright$ )



$$\mathbb{E}(N_n) \simeq n^{1/2}$$

$$\mathbb{E}(R_n) \simeq n^{1/2}$$

# Un graphe aléatoire à composantes de taille $\leq 3$ (taille 1171)



$$\mathbb{E}(N_n) \simeq n/3$$

$$\mathbb{E}(R_n) \simeq 3$$

# Pour finir

- On ne re-prouve pas les résultats de McDiarmid (mineurs exclus 2-connexes)
- Autres classes ? (avec  $C(z) \simeq 1/(1-z)^k$  ; avec  $C(z) \simeq \exp(z/(1-z))\dots$ )
- Autres paramètres ? nombre d'arêtes, distribution des degrés des sommets...

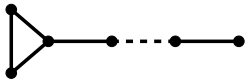






- **Établir des schémas** : si  $C(z) \sim (1 - z/\rho)^{-\alpha}$ , avec  $\alpha > 0$ , alors

$$N_n \simeq n^{\alpha/(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad R_n \simeq n^{1/(1+\alpha)}$$

- **Décrire des conditions sur les mineurs exclus qui déterminent la nature des singularités de  $C(z)$** . Par exemple,

– mineurs 2-connexes  $\Rightarrow C(\rho)$  fini

– exclure une cuillère mais pas d'arbre  $\Rightarrow C(\rho)$  fini avec une singularité en  $(1 - ze)^{3/2}$

Mineurs exclus	2-conn. ou 	 et 		 ou  et 	tous les connexes de taille $k + 1$
$C(z)$ $z \rightarrow \rho$	$< \infty$	$\log \frac{1}{1-z/\rho}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z/\rho}}$	$\frac{1}{1-z/\rho}$	entière
$\mathbb{P}(\text{conn.})$	$\rightarrow p > 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$N_n$	$O(1)$ Poisson	$\log n$ gaussienne	$n^{1/3}$ gaussienne	$n^{1/2}$ gaussienne	$n/k$ gaussienne (*)
$R_n$	$n - R_n$ $\rightarrow$ discr.	$n$ $\frac{1}{4}(1-x)^{-3/4}$	$n^{2/3}$ $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}e^{-x}$	$n^{1/2}$ $xe^{-x}$	$k$ Dirac
$M_n$	$n - R_n$ $\rightarrow$ discr.	$n$ Poisson-Dir.	?	$n^{1/2} \log n$ Gumbel	$k$ Dirac

Analyse de singularités

Méthode du col