

Sans documents, durée 1h30

1 Grammaires algébriques

1 Soit la grammaire \mathcal{G} ci dessous, d'axiome S

$$\left| \begin{array}{l} S \rightarrow aSa \\ S \rightarrow T \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} T \rightarrow bTb \\ T \rightarrow \epsilon \end{array} \right|$$

- Dessinez l'arbre de dérivation du mot $aabbaa$.
- Quel est le langage engendré par \mathcal{G} ?

2 Les **palindromes** sont des mots qui se lisent de la même façon dans les 2 sens). Par exemple $\epsilon, aaa, abba, aaabbaaa$ sont des palindromes.

- Donnez une grammaire pour les palindromes sur $A = \{a, b\}$
- Montrez l'arbre de dérivation du mot $babab$.

3 Dans le manuel d'un langage de programmation, la syntaxe des *instructions* est définie ainsi

Instr.	\rightarrow	<u>si</u> Cond. <u>alors</u> Instr.
Instr.	\rightarrow	<u>si</u> Cond. <u>alors</u> Instr. <u>sinon</u> Instr.
Instr.	\rightarrow	Affect.
...		

à partir des conditions, des affectations etc.

- Montrez que cette grammaire est ambiguë
- Proposez une modification du langage pour éviter ce problème.

4 Soit $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ les grammaires - d'axiomes respectifs - S_1 et S_2 , qui reconnaissent deux langages algébriques L_1 et L_2 . Montrez comment, en y ajoutant un axiome S et quelques règles, on peut construire des grammaires pour :

- le produit par concaténation L_1L_2 ,
- l'union $L_1 + L_2$,
- l'étoile L_1^* .

2 Langages rationnels

5 Donnez un automate déterministe sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ qui reconnaisse le langage L_1 des mots qui commencent par le préfixe ab .

6 Même question pour L_2 , les mots qui finissent par le suffixe bc .

7 Expliquez comment construire un automate qui reconnaît l'intersection de deux langages rationnels, en l'illustrant sur le cas de $L_1 \cap L_2$.

3 Expressions régulières

8 Par définition, l'étoile de Kleene d'un langage L est

$$L^* = \epsilon + L + L^2 + L^3 + \dots$$

Prouvez que pour tout L :

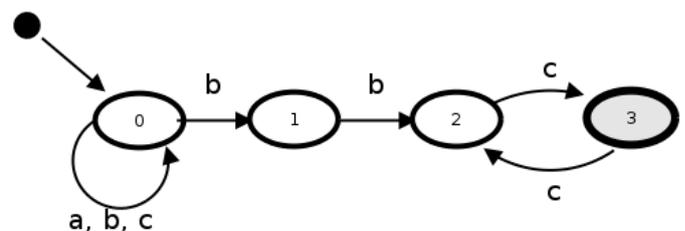
$$L^* = \epsilon + LL^* \tag{1}$$

$$L^*L^* = L^* \tag{2}$$

$$(L^*)^* = L^* \tag{3}$$

9 Est-ce que $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$? (justifiez).

10 Soit \mathcal{A} l'automate non-déterministe ci-dessous, où l'état 0 est initial, et 3 est final.



- Quelles équations entre le langage L reconnu par \mathcal{A} et L_0, L_1, \dots (liés aux états).
- En déduire une expression régulière pour L .