

Comptage de graphes planaires, voire à mineurs exclus

Mireille Bousquet-Mélou

Comptons !

Problème générique

\mathcal{A} ensemble d'objets discrets

\mathcal{A}_n ensemble des objets de taille n

Question : évaluer, estimer, caractériser le nombre $A[n]$ d'objets de taille n

Réponse :

$$A[n] = \dots, \quad A[n] \sim \dots, \quad A[n] \leq \dots, \quad \text{ou encore } A(x) = \dots,$$

où $A(x)$ est la **série génératrice** (ordinaire ou exponentielle) associée :

$$A_o(x) = \sum_{n \geq 0} A[n]x^n, \quad A_e(x) = \sum_{n \geq 0} A[n] \frac{x^n}{n!}$$

Au centre du dénombrement : la structure des objets

- Compter les objets

- Génération aléatoire

- Dénombrement selon plusieurs paramètres

**Découvrir une décomposition
non-ambiguë des objets**

- Prédire les propriétés statistiques des objets de grande taille

- Codage (compact, efficace)

Objets aléatoires

Résultats asymptotiques

Comptage de graphes à mineurs exclus

Un sujet très actif...

[Bender-Gao-Wormald 02] — [Bender-Canfield-Richmond 08] — [Bernardi-Noy-Welsh 07] — [Bonichon-Gavoille-Hanusse-Poulalhon-Schaeffer 06] — [Bodirsky-Gröpl-Kang 0?] [Bodirsky-Fusy-Kang-Vigerske 07] — [Fusy 07] — [Gagarin-Labelle-Leroux-Walsh 07] — [Gimenez-Noy 05] — [McDiarmid-Steger-Welsh 05] — [McDiarmid 08] — [Norine-Seymour-Thomas-Wollan 06] —

... basé sur des résultats vénérables :

[Harary-Palmer 73] — [Mullin-Schellenberg 68] — [Tutte 63] — [Trakhtenbrot 58] — [Walsh 82] — [Wormald 79] —

Merci aux hommes en rose !

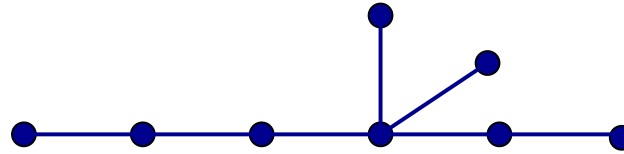
Comptage de graphes à mineurs exclus

... et surtout planaires.

Oui mais...

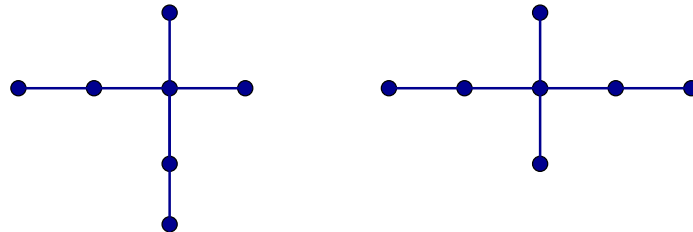
Quels graphes planaires ?

Étiquetés, non étiquetés, pointés, plongés, enracinés...



- 1 arbre non étiqueté à 8 sommets
- 7 arbres **pointés** (un sommet distingué)
- $\frac{8!}{2}$ arbres **étiquetés** par $\{1, 2, \dots, 8\}$
- 3 arbres **plongés** (= dessinés dans la sphère)
- $3 \times 2 \times 7$ arbres plongés **enracinés** (une arête orientée)

!!!



2 plongements

6.2 + 3.2 plongements enracinés

A. Compter des arbres

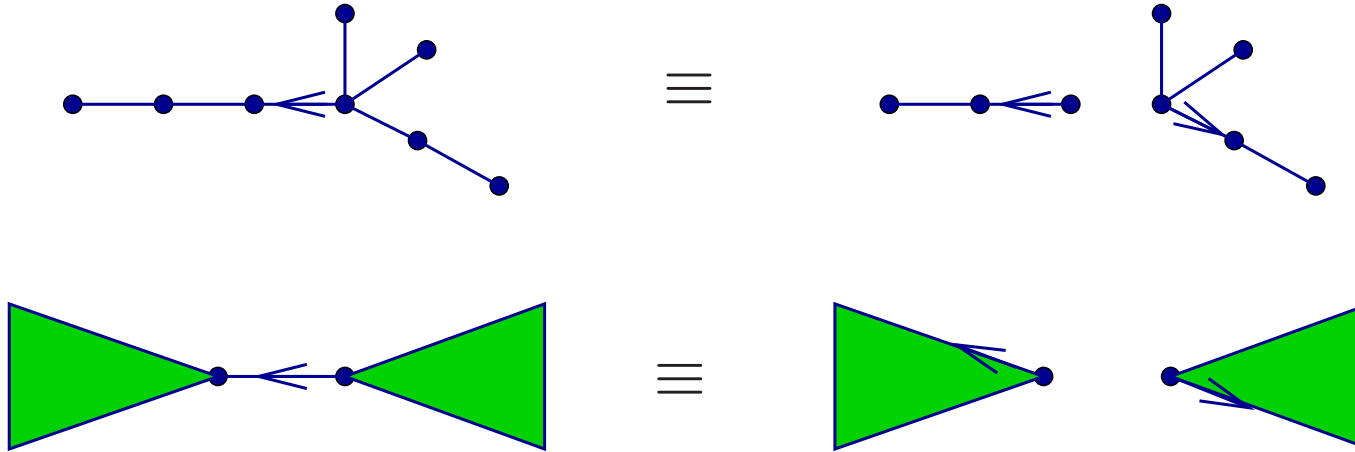
A1. Arbres plongés et enracinés

A2. Arbres étiquetés

A3. Arbres non-étiquetés

A1. Arbres plongés enracinés (“plans”)

Un arbre plan est la **concaténation** de deux arbres plans.



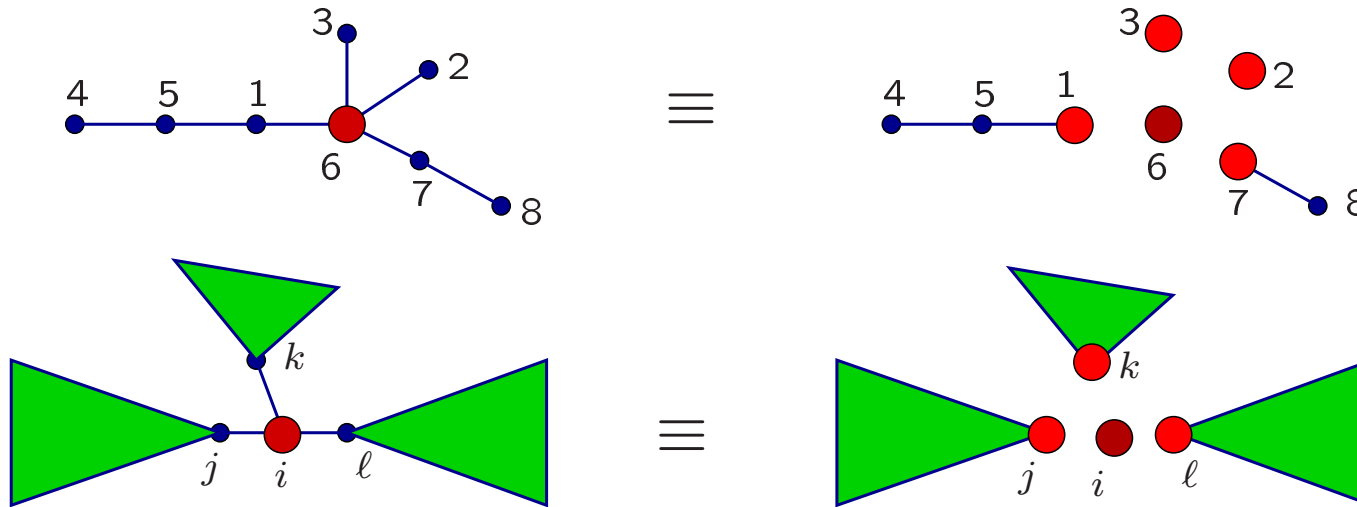
$$P[1] = 1 \quad \text{et} \quad P[n] = \sum_{k=1}^{n-1} P[k]P[n-k]$$

$$P(x) := \sum_{n \geq 1} P[n]x^n = x + P(x)^2 \Rightarrow P(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

Nombres de Catalan

A2. Arbres étiquetés

- Un arbre étiqueté **pointé** est la concaténation d'un sommet et d'un **ensemble** d'arbres étiquetés pointés.

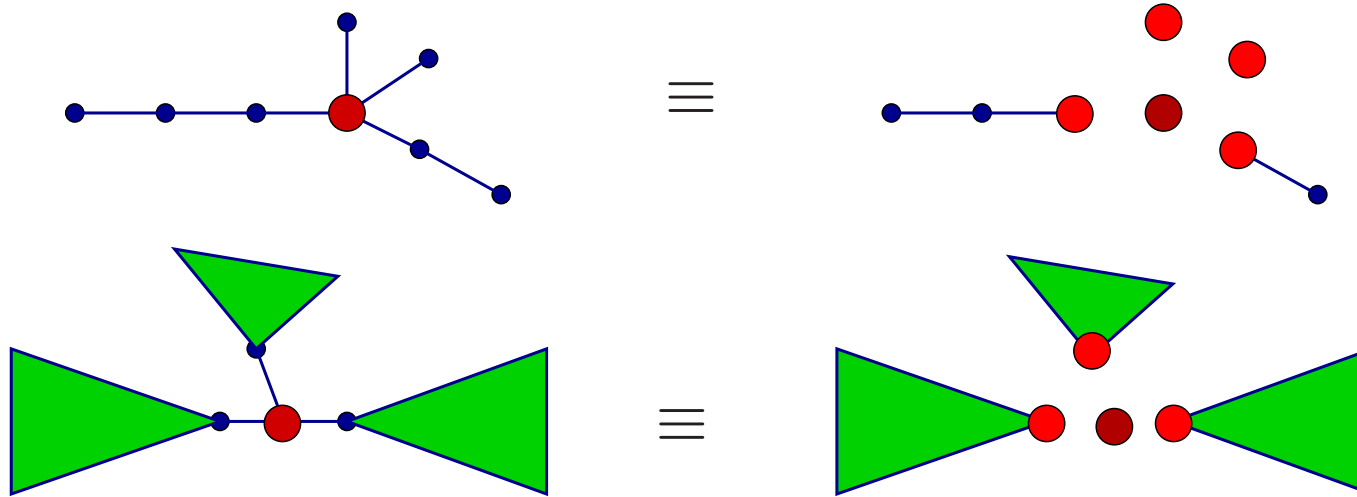


- Un arbre étiqueté de taille n admet n pointages différents
- En séries exponentielles

$$E'(x) := \sum_{n \geq 1} nE[n] \frac{x^n}{n!} = \exp(xE'(x)) \Rightarrow E(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} n^{n-2}$$

Il y a $E[n] = n^{n-2}$ arbres étiquetés sur n sommets (formule de Cayley)

A3. Arbres non étiquetés



- Les arbres non étiquetés **pointés** (sur un sommet) sont formés d'un sommet et d'un **multi-ensemble** d'arbres non-étiquetés pointés : la SG ordinaire de ces arbres satisfait

$$N^\bullet(x) = x \exp \left(N^\bullet(x) + \frac{1}{2}N^\bullet(x^2) + \frac{1}{3}N^\bullet(x^3) + \dots \right)$$

- Théorème de dissymétrie [Otter 48]:

$$N(x) := \sum_{n \geq 1} x^n N[n] = N^\bullet(x) - \frac{1}{2}N^\bullet(x)^2 + \frac{1}{2}N^\bullet(x^2)$$

Raffinements, asymptotique, lois limites

Arbres plans (= plongés, enracinés)

$$P(x) = \sum_{n \geq 1} P[n]x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

- Étude des singularités de la série génératrice :

$$P[n] \sim -\frac{1}{2\Gamma(-1/2)} 4^n n^{-3/2}$$

Arbres plans (= plongés, enracinés)

$$P(x) = \sum_{n \geq 1} P[n]x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

- Étude des singularités de la série génératrice :

$$P[n] \sim -\frac{1}{2\Gamma(-1/2)} 4^n n^{-3/2}$$

- Raffinement : comptage selon le nombre de sommets (x) et de feuilles (s)

$$P(x, s) = \sum_{n \geq 1} P[n, \ell]x^n s^\ell = \frac{1 - x(s-1) - \sqrt{1 - 2x(s+1) + x^2(s-1)^2}}{2(1 + t(1-s))}$$

$$\mathbb{E}(F_n) \sim \frac{n}{2}, \quad \text{var}(F_n) \sim \sigma^2 n$$

et les variations autour de la moyenne, normalisées, sont gaussiennes :

$$\frac{F_n - n/2}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Asymptotique des arbres : des exposants universels

	Enracinés	Non enracinés
Plongés	$\kappa_1 4^n n^{-3/2}$	$\kappa_4 4^n n^{-5/2}$
	Pointés	Non pointés
Étiquetés	$\kappa_2 e^n n^{-3/2} n!$	$\kappa_5 e^n n^{-5/2} n!$
Quelconques	$\kappa_3 \mu^n n^{-3/2}$	$\kappa_6 \mu^n n^{-5/2} \quad \mu > e$

Un arbre pointé a en moyenne un nombre exponentiel d'automorphismes

B. Compter des graphes planaires

B1. Graphes plongés et enracinés

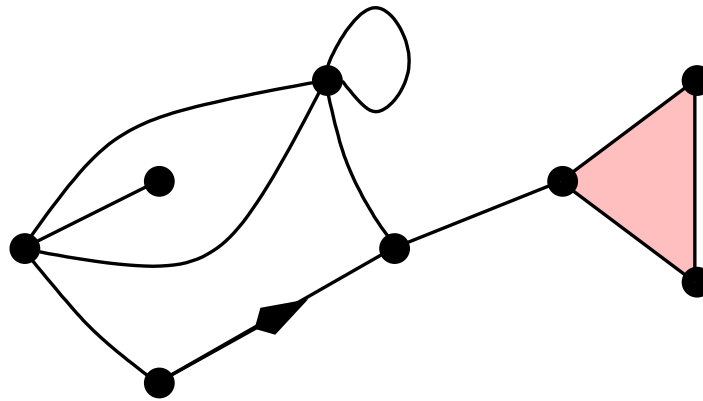
B2. Graphes étiquetés

B3. Graphes non-étiquetés (?)

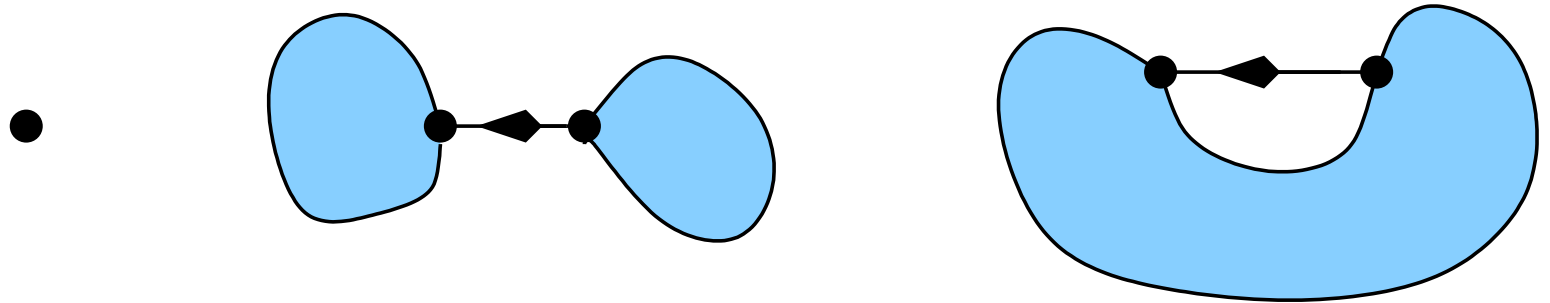
B1. Graphes plongés et enracinés : des cartes !

Exemple : comptage de toutes les cartes planaires (multigraphes connexes plongés et enracinés) selon sommets (x), arêtes (y) et degré de la face racine (u).

Série $M(x, y, u) \equiv M(u)$



Comptage des cartes planaires enracinées



$$M(u) = x + yu^2M(u)^2 + \frac{yu}{u-1}(uM(u) - M(1))$$

Donc [...] $M(x, y; u)$ est une série algébrique. En particulier, la SG selon sommets (x) et arêtes (y) est de degré 4 :

$$M(x, y; 1) = x \frac{4(U + V + 1)}{(U + 2)(V + 2)}$$

avec

$$y = \frac{U(U + 2)}{4(U + V + 1)^2} \quad \text{et} \quad xy = \frac{V(V + 2)}{4(U + V + 1)^2}$$

[Tutte 68]

Cartes planaires enracinées : séries algébriques

- Cartes planaires simples :

$$M^{(s)}(x, y) = \frac{4U(U+1)(U+V+2)}{V(U+2)(V+2)^2}$$

avec

$$x = \frac{U(U+2)}{V(V+2)}, \quad y = \frac{V(V+2)((U+2)^2 - UV)}{4(U+1)^2(U+2)(U+V+2)}.$$

- Cartes planaires 3-connexes [Mullin-Schellenberg 68]:

$$M^{(3)}(x, y) = x^2 y^2 \left(\frac{1}{1+xy} - \frac{y}{1+y} - \frac{(1+U)^2(1+V)^2}{(1+U+V)^3} \right)$$

avec

$$U = xy(1+V)^2, \quad V = y(1+U)^2$$

- Exposant universel : pour “toute” famille de cartes planaires enracinées,

$$M[n] \sim \kappa \mu^n n^{-5/2}$$

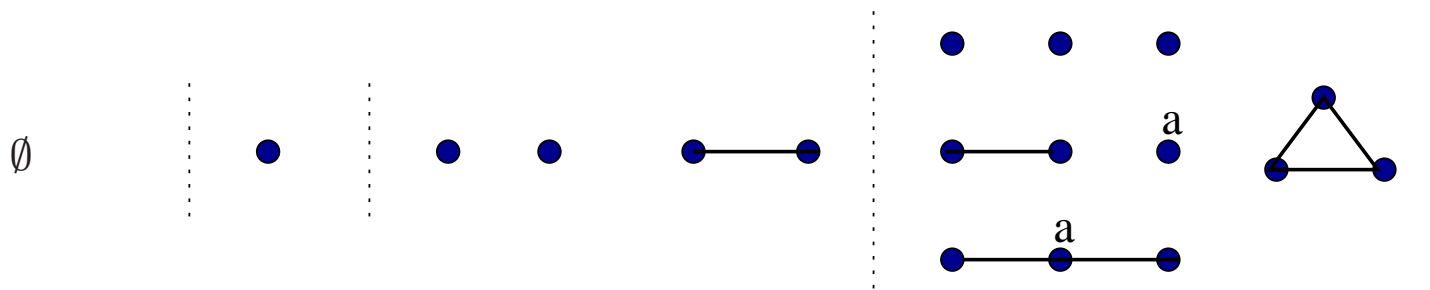
B2. Graphes planaires étiquetés : descente en connexité

- Les graphes planaires 3-connexes sont des cartes (plongement unique)
 - Les graphes planaires 2-connexes sont obtenus en remplaçant chaque arête d'un 3-connexe par un 2-connexe bipointé (**substitution**)
 - Les graphes planaires connexes sont des **arbres** de graphes 2-connexes (**décomposition en blocs 2-connexes**)
 - Les graphes planaires sont des **ensembles** de graphes planaires connexes.
- ⇒ Un ensemble d'équations fonctionnelles connu depuis (au moins) 1982...

Connexité

- Un graphe est connexe (1-connexe) s'il a au moins 1 sommet et si deux sommets quelconques sont liés par un chemin
- Pour $k \geq 2$, un graphe est k -connexe si pour tout $\ell < k$, la destruction de ℓ sommets et des arêtes adjacentes ne le déconnecte pas.

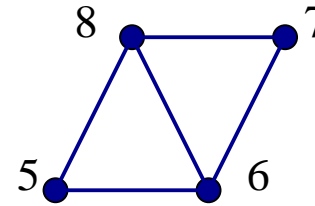
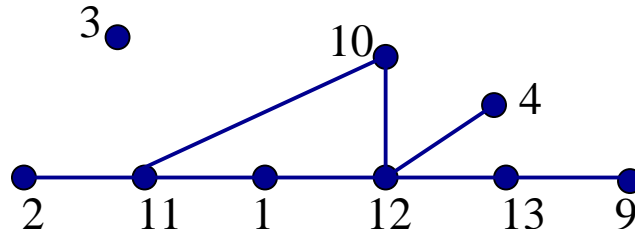
$$G^{(k)}(x, y) = \sum_{G \text{ } k\text{-connexe}} \frac{x^{v(G)}}{v(G)!} y^{e(G)}$$



$$\begin{aligned}
 G^{(0)} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}(1+y) + \frac{x^3}{3!}(1+3y+3y^2+y^3) + O(x^4) \\
 G^{(1)} &= \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}(y) + \frac{x^3}{3!}(3y^2+y^3) + O(x^4) \\
 G^{(2)} &= \frac{x^2}{2!}(y) + \frac{x^3}{3!}(y^3) + O(x^4) \\
 G^{(3)} &= \frac{x^3}{3!}(y^3) + O(x^4)
 \end{aligned}$$

I. Des graphes planaires aux planaires connexes

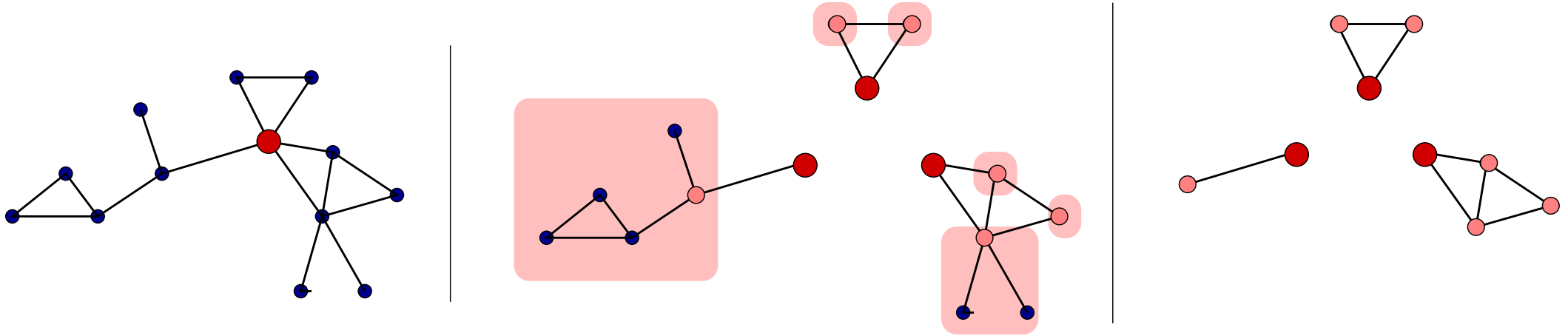
- Un graphe planaire (étiqueté) est un **ensemble** de graphes planaires connexes.



$$G^{(0)}(x, y) = \exp(G^{(1)}(x, y))$$

II. Des graphes planaires connexes aux planaires 2-connexes

- Un graphe planaire connexe **pointé** est un **ensemble** de graphes 2-connexes pointés où chaque sommet non-pointé a été remplacé par un graphe connexe pointé (!)



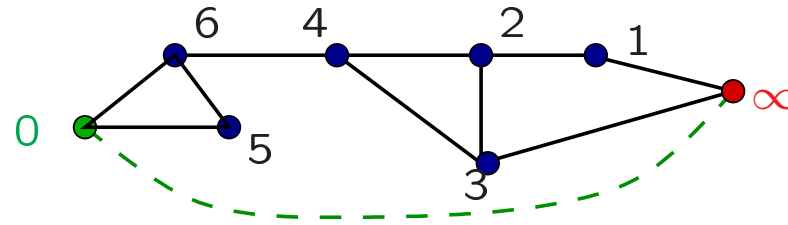
$$G_x^{(1)} = \exp \left(G_x^{(2)} \left(xG_x^{(1)}, y \right) \right)$$

avec

$$G_x^{(k)}(x, y) = \frac{\partial G^{(k)}}{\partial x}(x, y)$$

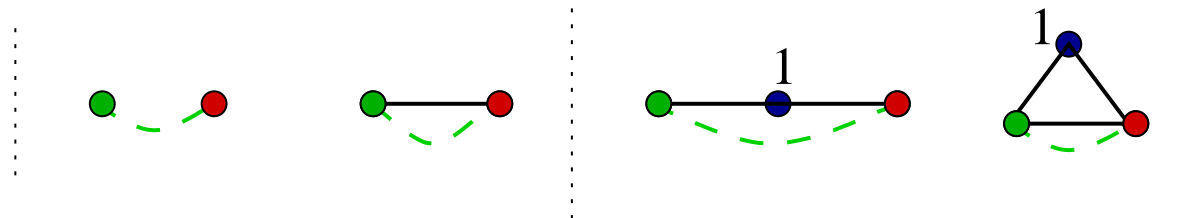
II.1. Des graphes planaires 2-connexes aux... réseaux

Réseau : graphe planaire ayant 2 sommets pointés d'étiquettes 0 et ∞ (les pôles), tel que le (multi-)graphe obtenu en ajoutant l'arête $(0, \infty)$ soit 2-connexe.



$$R(x, y) := \sum_{n, m} \frac{x^n}{n!} y^m R[n, m]$$

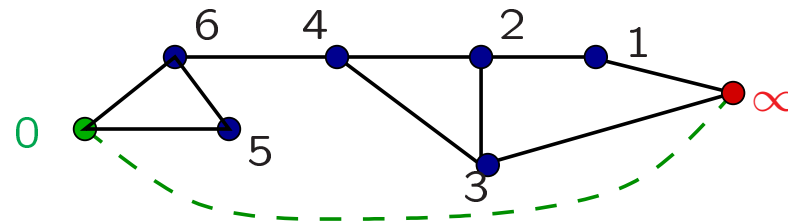
où $R[n, m]$ est le nombre de réseaux à $n + 2$ sommets et m arêtes.



$$R(x, y) = \frac{x^0}{0!} (1 + y) + \frac{x}{1!} (y^2 + y^3) + O(x^2)$$

II.1. Des graphes planaires 2-connexes aux... réseaux

Réseau : graphe planaire ayant 2 sommets pointés d'étiquettes 0 et ∞ (les pôles), tel que le (multi-)graphe obtenu en ajoutant l'arête $(0, \infty)$ soit 2-connexe.

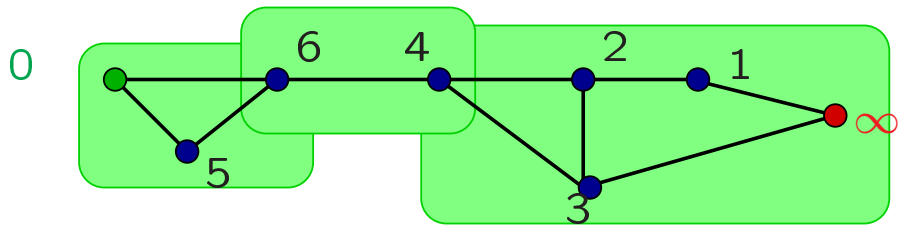


$$R(x, y) := \sum_{n, m} \frac{x^n}{n!} y^m R[n, m] = \frac{2(1+y)}{x^2} G_y^{(2)}$$

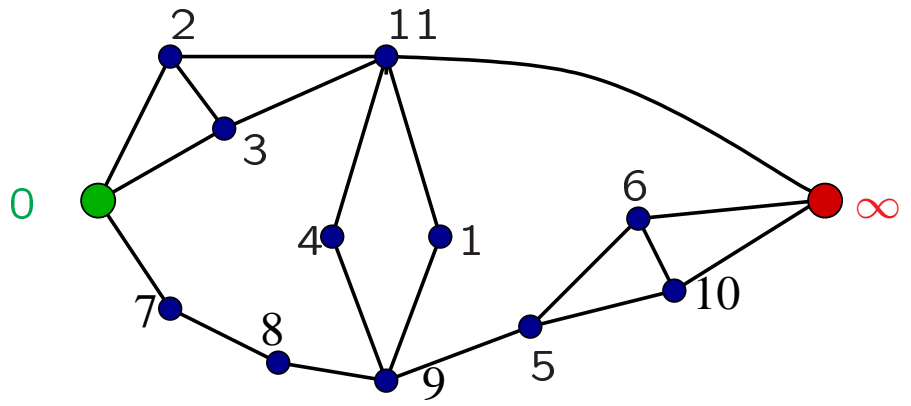
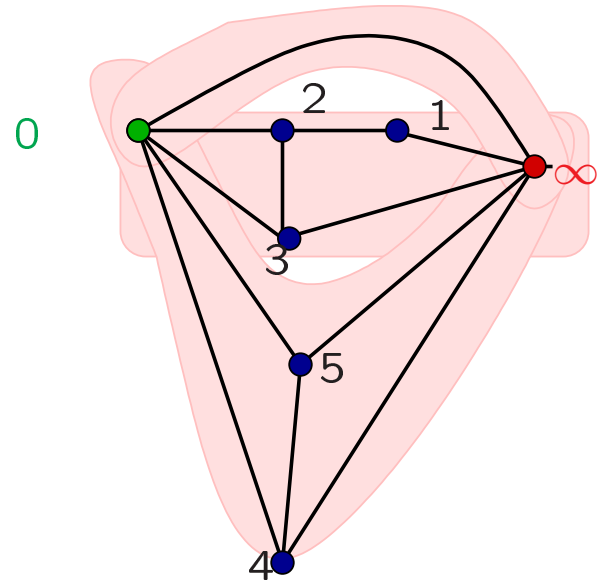
où $R[n, m]$ est le nombre de réseaux à $n + 2$ sommets et m arêtes.

Trois types de réseaux (2 arêtes au moins)

- Type I : Réseaux série



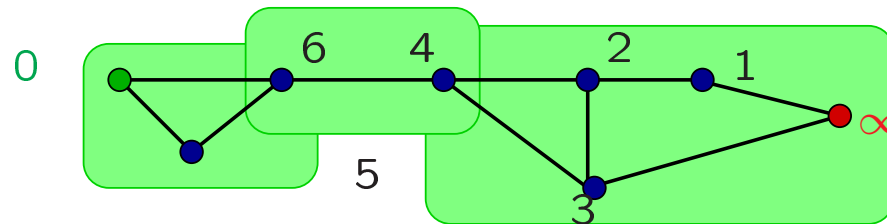
- Type II : Réseaux parallèle



- Type III : Les autres...

II.2. Décomposition des réseaux

- 0 ou 1 arête : $1 + y$
- Type I : Réseaux série

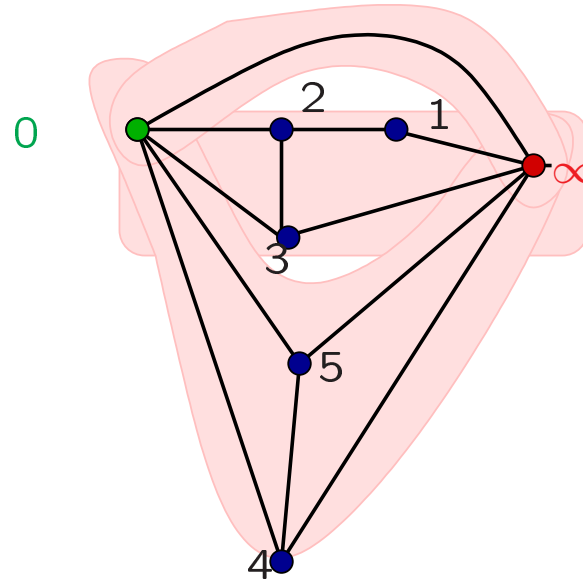


$$R_s = \frac{x(R-1)^2}{1+x(R-1)}$$

- Un réseau (à au moins 1 arête) est une **suite** de réseaux non-série.
- Un réseau-série est une **suite d'au moins 2** réseaux non-série

II.2. Décomposition des réseaux

- Type II : Réseaux parallèle

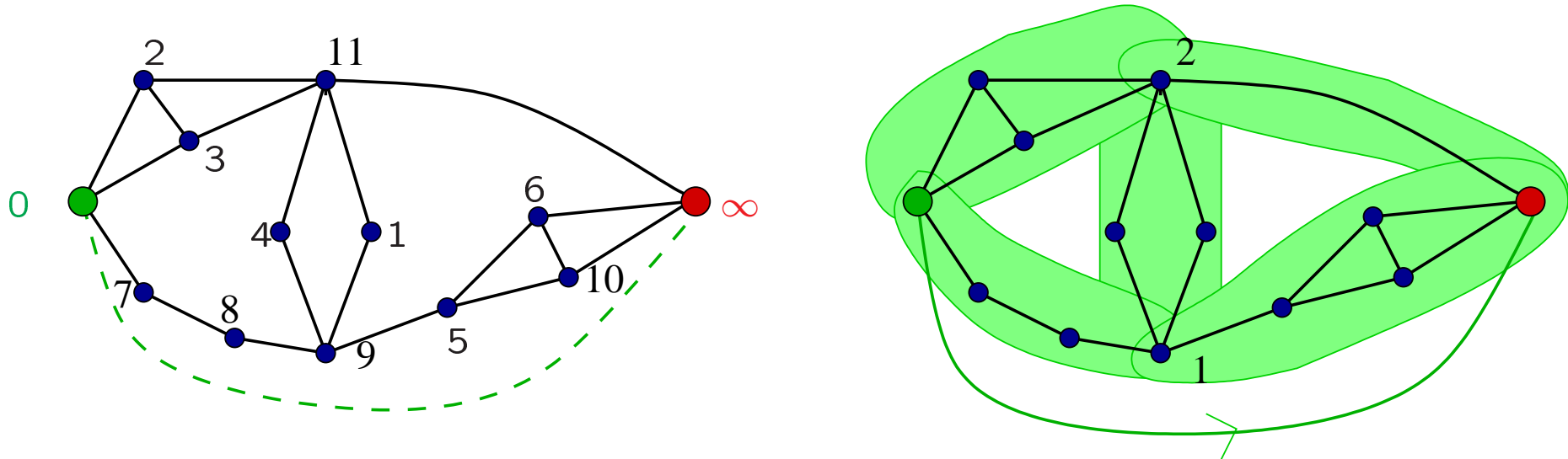


$$R_p = R - 1 - y - \log \frac{R}{1 + y}$$

— Un réseau à pôles non-adjacents est un **ensemble** de réseaux non-parallèle à pôles non-adjacents

II.2. Décomposition des réseaux

- Type III : Les autres sont obtenus à partir d'une **CARTE** 3-connexe enracinée en remplaçant chaque arête non-racine par un réseau.



$$R_a = \frac{M^{(3)}(x, R-1)}{2x^2(R-1)}$$

où $M^{(3)}(x, y)$ compte les **cartes** planaires 3-connexes enracinées (à 4 sommets au moins)

On y est !

- Soient U , V et $M^{(3)}$ définies par : $U = xy(1 + V)^2$, $V = y(1 + U)^2$,

$$M^{(3)} = x^2y^2 \left(\frac{1}{1 + xy} - \frac{y}{1 + y} - \frac{(1 + U)^2(1 + V)^2}{(1 + U + V)^3} \right)$$

- Définissons $R(x, y)$ implicitement par :

$$\frac{x(R - 1)^2}{1 + x(R - 1)} - \log \frac{R}{1 + y} + \frac{M^{(3)}(x, R - 1)}{2x^2(R - 1)} = 0$$

- puis $G^{(2)}(x, y)$ par

$$R = \frac{2(1 + y)}{x^2} G_y^{(2)} \quad \text{et} \quad G^{(2)}(x, 0) = 0,$$

- puis $G^{(1)}(x, y)$ par

$$G_x^{(1)} = \exp \left(G_x^{(2)} \left(x G_x^{(1)}, y \right) \right) \quad \text{et} \quad G^{(1)}(0, y) = 0,$$

- et enfin

$$G^{(0)} = \exp(G^{(1)})$$

Alors $G^{(k)}(x, y)$ compte les graphes planaires k -connexes selon sommets et arêtes. Tout ça est disponible depuis (au moins) 1982.

Asymptotique et lois limites des graphes planaires étiquetés

[Gimenez-Noy 05]

- Nombre de graphes planaires étiquetés à n sommets :

$$G[n] \sim \kappa \gamma^n n^{-7/2}$$

où κ et $\gamma \simeq 27.226\dots$ sont “explicités”.

- Distribution du nombre d'arêtes :

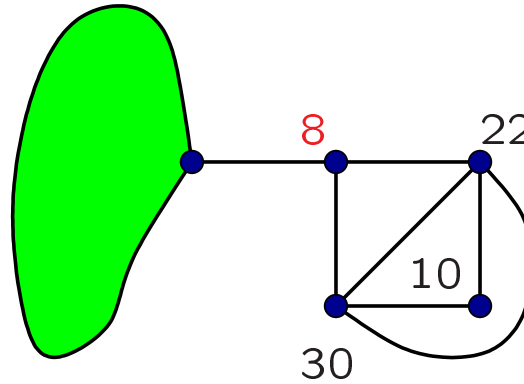
$$\mathbb{E}(A_n) \sim \mu n \quad \text{et} \quad \text{var}(A_n) \sim \sigma^2 n$$

et les fluctuations autour de la moyenne, normalisées par \sqrt{n} , sont asymptotiquement gaussiennes.

- Estimation du nombre de graphes planaires à n sommets et $\lfloor \alpha n \rfloor$ arêtes, pour $1 < \alpha < 3$.

Asymptotique et lois limites des graphes planaires étiquetés

- Pour tout graphe planaire H , le nombre d'occurrences pendantes de H dans un graphe planaire aléatoire à n sommets est linéaire en moyenne, de variance linéaire et à variations gaussiennes.



- En particulier, les graphes planaires ont en moyenne un **nombre exponentiel d'automorphismes** (échange de deux feuilles voisines)
- Un graphe planaire de taille n est connexe avec probabilité ~ 0.96 . Le nombre de composantes connexes est distribué comme $1 + P(1.03\dots)$, où $P(\nu)$ désigne une loi de Poisson. ETC !
- Génération aléatoire en taille approchée et temps linéaire [Fusy 07]

B3. Graphes planaires non étiquetés

- Existence d'une constante de croissance [Denise-Vasconcellos-Welsh 96]:

$$(G^u[n])^{1/n} \rightarrow \gamma_u$$

- Borne inférieure :

$$\frac{G^\ell[n]}{n!} \leq G^u[n] \Rightarrow \gamma_\ell = 27.22... \leq \gamma_u$$

En fait l'inégalité est stricte [McDiarmid-Steger-Welsh 05] .

- Borne supérieure

$$\gamma_u < 30.061...$$

[Bonichon-Gavoille-Hanusse-Poulalhon-Schaeffer 06]

(Borne fournie par les cartes planaires simples (graphes plongés enracinés) : 34.26...)

C. Exclure d'autres mineurs ?

C1. Des problèmes plus simples : sous-familles de graphes planaires

- Du déjà vu : les arbres (et les forêts) (pas de K_3)

Énumération des forêts

- plongées et enracinées,
- étiquetées,
- non étiquetées $F[n] \sim \kappa\mu^n n^{-5/2}$

- Pas très très loin : graphes planaires extérieurs (ni K_4 ni $K_{2,3}$)

[Bodirsky-Fusy-Kang-Vigerske 07]

Énumération des graphes planaires extérieurs

- plongés et enracinés,
- étiquetés,
- non étiquetés $PE[n] \sim \kappa\gamma^n n^{-5/2}$

- Graphes série-parallèle étiquetés [Bodirsky-Gimenez-Kang-Noy 07]

$SP[n] \sim \kappa\eta^n n^{-5/2} n!$

C2. Problèmes plus durs : graphes plongeables dans une surface donnée

- Graphes plongés et enracinés : encore des cartes [Bender, Canfield, Gao, Richmond...] Séries algébriques
- Graphes étiquetés [McDiarmid 08] : Pour toute surface S , le nombre de graphes étiquetés plongeables dans S satisfait

$$\left(\frac{G^{S,\ell}[n]}{n!} \right)^{1/n} \rightarrow \gamma_\ell$$

où la constante γ_ℓ est la même que dans le cas planaire ($\gamma = 27.22\dots$)

- Graphes non-étiquetés [McDiarmid 08] : Pour toute surface S , le nombre de graphes non étiquetés plongeables dans S satisfait

$$\left(G^{S,u}[n] \right)^{1/n} \rightarrow \gamma_u$$

où la constante γ_u est encore indépendante de la surface (et inconnue !)

C3. Problèmes encore plus durs : exclure des mineurs quelconques

- Graphes étiquetés [Norine et al. 06] : pour toute famille de mineurs exclus, il existe une constante γ , dépendant de cette famille, telle que

$$G^{\ell}[n] \leq \gamma^n n!$$

(à comparer avec le nombre total de graphes étiquetés, $2^{n(n-1)/2}$)

- Raffinements [Bernardi et al. 07] Par exemple :

soit $n! \leq G^{\ell}[n] \leq \gamma^n n!$, soit $G^{\ell}[n] \leq \varepsilon^n n!$ pour tout $\varepsilon > 0$ et n grand

- À voir : pour les graphes non étiquetés à mineurs exclus,

$$G^u[n] \leq \gamma^n$$

Quelques questions

- Asymptotique des graphes étiquetés plongeables dans une surface S :

$$\frac{G^{S,\ell}[n]}{n!} \sim \kappa \gamma_\ell^n n! n^{???$$

(connu pour les cartes enracinées : $\kappa \mu^n n^{5(g-1)/2}$ [Bender-Canfield 86])

- Autres familles de graphes (largeur arborescente bornée...)

Quelques questions

- Asymptotique des graphes étiquetés plongeables dans une surface S :

$$\frac{G^{S,\ell}[n]}{n!} \sim \kappa \gamma_\ell^n n! n^{???$$

(connu pour les cartes : $\kappa \mu^n n^{5(g-1)/2}$)

- Autres familles de graphes (largeur arborescente bornée...)
- Z'avez d'aut' questions ?

