

Démonstration bijective de la formule d'Hurwitz

ENRICA DUCHI (LIAFA)



travail commun avec D. Poulalhon (LIX) et G. Schaeffer (LIX)

FACTORISATIONS D'UNE PERMUTATION

Un m -uplet de permutations $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ est une **factorisation** de la permutation σ si $\sigma_1 \cdots \sigma_m = \sigma$.

$$\underbrace{(1, 4, 2)(3)}_{\sigma_3} \cdot \underbrace{(1, 3)(2, 4)}_{\sigma_2} \cdot \underbrace{(1, 3, 2)(4)}_{\sigma_1} = \text{id}_4 = \sigma$$

FACTORISATIONS D'UNE PERMUTATION

Un m -uplet de permutations $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ est une **factorisation** de la permutation σ si $\sigma_1 \cdots \sigma_m = \sigma$.

$$\underbrace{(1, 4, 2)(3)}_{\sigma_3} \cdot \underbrace{(1, 3)(2, 4)}_{\sigma_2} \cdot \underbrace{(1, 3, 2)(4)}_{\sigma_1} = \text{id}_4 = \sigma$$

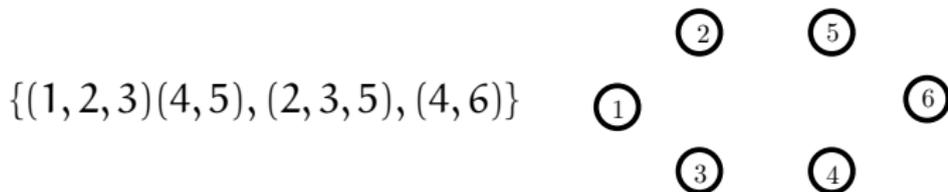
Si les σ_i sont des transpositions, on parle de **factorisation en transpositions**.

$$(1, 2) \cdot (2, 3) \cdot (1, 3) \cdot (2, 4) \cdot (1, 2) \cdot (2, 4) = (1, 4)(2, 3)$$

(on omet souvent les points fixes dans la notation cyclique des permutations)

TRANSITIVITÉ D'UNE FACTORISATION

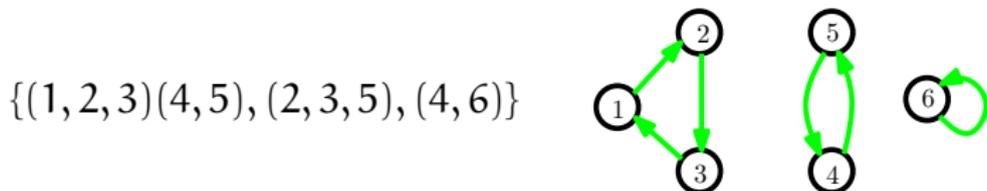
Un ensemble de permutations $S = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ de \mathfrak{S}_n agit **transitivement** si n'importe quel élément peut être envoyé sur n'importe quel autre par l'application d'une suite de permutations de S .



De manière équivalente un ensemble de permutations S agit transitivement si le graphe obtenu en superposant les graphes de toutes les permutations de S est connexe.

TRANSITIVITÉ D'UNE FACTORISATION

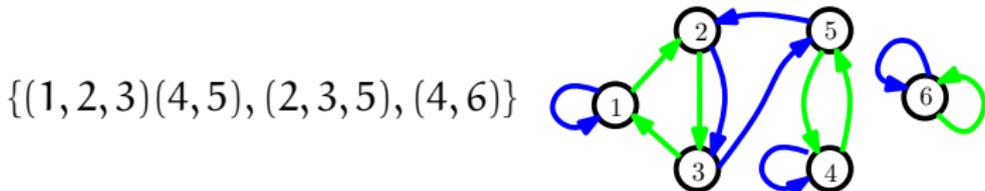
Un ensemble de permutations $S = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ de \mathfrak{S}_n agit **transitivement** si n'importe quel élément peut être envoyé sur n'importe quel autre par l'application d'une suite de permutations de S .



De manière équivalente un ensemble de permutations S agit transitivement si le graphe obtenu en superposant les graphes de toutes les permutations de S est connexe.

TRANSITIVITÉ D'UNE FACTORISATION

Un ensemble de permutations $S = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ de \mathfrak{S}_n agit **transitivement** si n'importe quel élément peut être envoyé sur n'importe quel autre par l'application d'une suite de permutations de S .

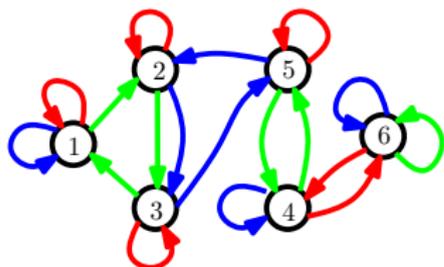


De manière équivalente un ensemble de permutations S agit transitivement si le graphe obtenu en superposant les graphes de toutes les permutations de S est connexe.

TRANSITIVITÉ D'UNE FACTORISATION

Un ensemble de permutations $S = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ de \mathfrak{S}_n agit **transitivement** si n'importe quel élément peut être envoyé sur n'importe quel autre par l'application d'une suite de permutations de S .

$$\{(1, 2, 3)(4, 5), (2, 3, 5), (4, 6)\}$$

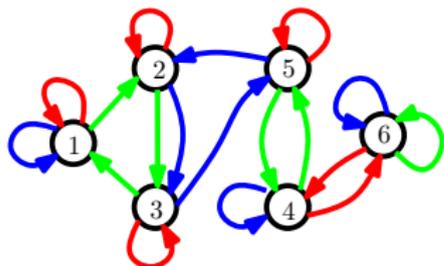


De manière équivalente un ensemble de permutations S agit transitivement si le graphe obtenu en superposant les graphes de toutes les permutations de S est connexe.

TRANSITIVITÉ D'UNE FACTORISATION

Un ensemble de permutations $S = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ de \mathfrak{S}_n agit **transitivement** si n'importe quel élément peut être envoyé sur n'importe quel autre par l'application d'une suite de permutations de S .

$$\{(1, 2, 3)(4, 5), (2, 3, 5), (4, 6)\}$$



De manière équivalente un ensemble de permutations S agit transitivement si le graphe obtenu en superposant les graphes de toutes les permutations de S est connexe.

Une factorisation est **transitive** si l'ensemble des facteurs agit transitivement.

MINIMALITÉ

Une factorisation en m transpositions d'une permutation σ est dite **minimale** si elle utilise le moins de transpositions possible : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ a ℓ cycles on vérifie qu'il en faut $r(\sigma) = n - \ell$.

MINIMALITÉ

Une factorisation en m transpositions d'une permutation σ est dite **minimale** si elle utilise le moins de transpositions possible : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ a ℓ cycles on vérifie qu'il en faut $r(\sigma) = n - \ell$.

Une factorisation en m transpositions d'une permutation σ est dite **minimale transitive** elle est transitive et elle utilise le moins de transpositions possible : on peut vérifier qu'il faut prendre $m = n + \ell - 2$ transpositions.

MINIMALITÉ

Une factorisation en m transpositions d'une permutation σ est dite **minimale** si elle utilise le moins de transpositions possible : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ a ℓ cycles on vérifie qu'il en faut $r(\sigma) = n - \ell$.

Une factorisation en m transpositions d'une permutation σ est dite **minimale transitive** elle est transitive et elle utilise le moins de transpositions possible : on peut vérifier qu'il faut prendre $m = n + \ell - 2$ transpositions.

Plus généralement une factorisation $\sigma_1 \cdots \sigma_m = \sigma$ est dite **minimale transitive** si elle est transitive et si la somme $\sum r(\sigma_i)$ est la plus petite possible. On peut vérifier qu'il faut prendre $\sum r(\sigma_i) = n + \ell - 2$.

ÉNONCÉ DE LA FORMULE D'HURWITZ

Théorème (Hurwitz, 1893)

Soit $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ une partition de n et $\ell = \sum_i \ell_i$.
Le nombre de factorisations minimales transitives en transpositions de permutations de type cyclique λ est

$$n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!} \right)^{\ell_i} \quad (1)$$

ÉNONCÉ DE LA FORMULE D'HURWITZ

Théorème (Hurwitz, 1893)

Soit $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ une partition de n et $\ell = \sum_i \ell_i$.
Le nombre de factorisations minimales transitives en transpositions de permutations de type cyclique λ est

$$n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!} \right)^{\ell_i} \quad (1)$$

Pour $\lambda = 1^n$, le nombre de factorisations transitives minimales de l'identité en produit de transpositions est $n^{n-3}(2n-2)!$.

ÉNONCÉ DE LA FORMULE D'HURWITZ

Théorème (Hurwitz, 1893)

Soit $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ une partition de n et $\ell = \sum_i \ell_i$.
Le nombre de factorisations minimales transitives en transpositions de permutations de type cyclique λ est

$$n^{\ell-3} \cdot (n + \ell - 2)! \cdot n! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left(\frac{i^i}{i!} \right)^{\ell_i} \quad (1)$$

Pour $\lambda = 1^n$, le nombre de factorisations transitives minimales de l'identité en produit de transpositions est $n^{n-3}(2n-2)!$.

Pour $\lambda = n$, le nombre de factorisations transitives minimales de n -cycles en produit de transpositions est $n^{n-2}(n-1)!$.

HISTORIQUE

- [Hurwitz][1893] (reconstituée par [Strehl][1996])
Décomposition de type **cut and join** + récurrences
- [Goulden, Jackson][1997] Décomposition de type **cut and join**
+ manipulations de series génératrices.
- [Bousquet-Mélou, Schaeffer][2000] **Bijection** pour des
factorisations en permutations + **inclusion/exclusion**
- [Okounkov][2000] Hiérarchie d'équations différentielles
- [Lando, Zvonkine][2004] Formule dérivée avec des méthodes
géométriques
- [Borot, Eynard, Mulase, Safnuk][2011] Expression par intégrale
de matrices
- [Duchi, Poulalhon, Schaeffer][2011] **Première preuve bijective.**

FACTORISATIONS EN m PERMUTATIONS

Théorème (Bousquet-Mélou—Schaeffer 2000)

Soit $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ une partition de n , $\ell = \sum_i \ell_i$.

Le nombre de factorisations $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ transitives minimales de permutations de type cyclique λ est :

$$m \frac{((m-1)n-1)!}{((m-1)n-\ell+2)!} \prod_{i \geq 1} \left(i \binom{mi-1}{i} \right)^{\ell_i} \quad (2)$$

La condition de minimalité dit que $\sum_{i=1}^m r(\sigma_i) = n + \ell - 2$.

FACTORISATIONS EN m PERMUTATIONS

Théorème (Bousquet-Mélou—Schaeffer 2000)

Soit $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ une partition de n , $\ell = \sum_i \ell_i$.

Le nombre de factorisations $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ transitives minimales de permutations de type cyclique λ est :

$$m \frac{((m-1)n-1)!}{((m-1)n-\ell+2)!} \prod_{i \geq 1} \left(i \binom{mi-1}{i} \right)^{\ell_i} \quad (2)$$

La condition de minimalité dit que $\sum_{i=1}^m r(\sigma_i) = n + \ell - 2$.

Si $r(\sigma_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ alors $m = n + \ell - 2$, on retrouve des factorisations en transpositions.

FACTORISATIONS EN m PERMUTATIONS

Théorème (Bousquet-Mélou—Schaeffer 2000)

Soit $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ une partition de n , $\ell = \sum_i \ell_i$.

Le nombre de factorisations $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ transitives minimales de permutations de type cyclique λ est :

$$m \frac{((m-1)n-1)!}{((m-1)n-\ell+2)!} \prod_{i \geq 1} \left(i \binom{mi-1}{i} \right)^{\ell_i} \quad (2)$$

La condition de minimalité dit que $\sum_{i=1}^m r(\sigma_i) = n + \ell - 2$.

Si $r(\sigma_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ alors $m = n + \ell - 2$, on retrouve des factorisations en transpositions.

Par inclusion/exclusion, en considérant $m = n + \ell - 2$, on peut en déduire la formule d'Hurwitz.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulérienne**.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulérienne**.
- Bijection entre les **cartes m-eulériennes** et des arbres appelés **arbres m-eulériens équilibrés**.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulerienne**.
- Bijection entre les **cartes m-euleriennes** et des arbres appelés **arbres m-euleriens équilibrés**.
- Énumération des **arbres m-euleriens équilibrés**.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulerienne**.
- Bijection entre les **cartes m-euleriennes** et des arbres appelés **arbres m-euleriens équilibrés**.
- Énumération des **arbres m-euleriens équilibrés**.

Notre première preuve bijective suit le même schéma.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulerienne**.
- Bijection entre les **cartes m-euleriennes** et des arbres appelés **arbres m-euleriens équilibrés**.
- Énumération des **arbres m-euleriens équilibrés**.

Notre première preuve bijective suit le même schéma.

- Identification des cartes m-euleriennes associées aux factorisations en transpositions.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulerienne**.
- Bijection entre les **cartes m-euleriennes** et des arbres appelés **arbres m-euleriens équilibrés**.
- Énumération des **arbres m-euleriens équilibrés**.

Notre première preuve bijective suit le même schéma.

- Identification des cartes m-euleriennes associées aux factorisations en transpositions.
- Caractérisations des arbres équilibrés associés, appelés **arbres d'Hurwitz**.

UNE PREMIÈRE APPROCHE BIJECTIVE

Bousquet-Mélou et Schaeffer ont donné une preuve bijective de la formule pour les factorisations en produits de permutations :

- Représentation d'une factorisation par une carte appelée **constellation** et par sa duale, appelée **carte m-eulerienne**.
- Bijection entre les **cartes m-euleriennes** et des arbres appelés **arbres m-euleriens équilibrés**.
- Énumération des **arbres m-euleriens équilibrés**.

Notre première preuve bijective suit le même schéma.

- Identification des cartes m-euleriennes associées aux factorisations en transpositions.
- Caractérisations des arbres équilibrés associés, appelés **arbres d'Hurwitz**.
- Énumération des arbres d'Hurwitz en utilisant une variation du **code de Prüfer**.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

- Les constellations sont étiquetées par leur distance à un vertex marqué.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

- Les constellations sont étiquetées par leur distance à un vertex marqué.
- Une bijection entre les constellations étiquetées et des arbres appelés **mobiles** est donnée.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

- Les constellations sont étiquetées par leur distance à un vertex marqué.
- Une bijection entre les constellations étiquetées et des arbres appelés **mobiles** est donnée.

Notre deuxième approche bijective utilise une spécialisation de la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

- Les constellations sont étiquetées par leur distance à un vertex marqué.
- Une bijection entre les constellations étiquetées et des arbres appelés **mobiles** est donnée.

Notre deuxième approche bijective utilise une spécialisation de la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter.

- On identifie les constellations étiquetées associées aux factorisations en transpositions.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

- Les constellations sont étiquetées par leur distance à un vertex marqué.
- Une bijection entre les constellations étiquetées et des arbres appelés **mobiles** est donnée.

Notre deuxième approche bijective utilise une spécialisation de la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter.

- On identifie les constellations étiquetées associées aux factorisations en transpositions.
- On caractérise les **mobiles de Hurwitz** associés.

NOTRE APPROCHE AUJOURD'HUI

Bouttier, Di Francesco et Guitter ont obtenu un différent codage pour les constellations, généralisant la version de Schaeffer de la bijection de Cori et Vauquelin.

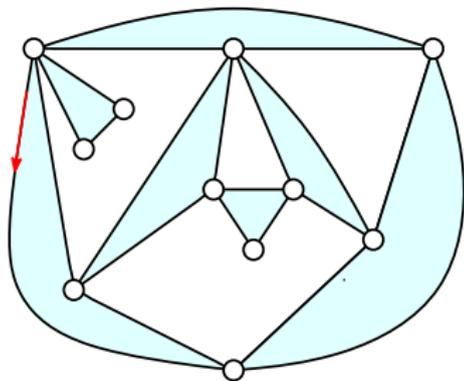
- Les constellations sont étiquetées par leur distance à un vertex marqué.
- Une bijection entre les constellations étiquetées et des arbres appelés **mobiles** est donnée.

Notre deuxième approche bijective utilise une spécialisation de la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter.

- On identifie les constellations étiquetées associées aux factorisations en transpositions.
- On caractérise les **mobiles de Hurwitz** associés.
- On les énumère là encore à l'aide de **Prüfer**.

Définition

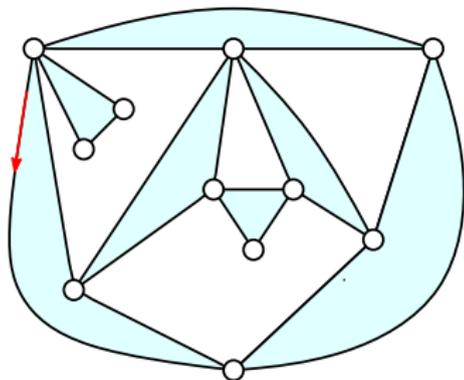
Une **m-constellation enraciné avec n faces noires** est une carte plane enraciné bicoloriée, telle que :



Définition

Une **m-constellation enraciné avec n faces noires** est une carte plane enraciné bicoloriée, telle que :

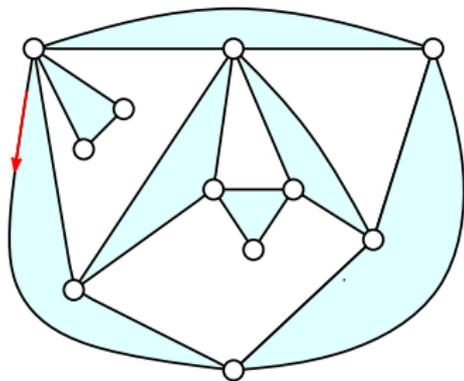
- Chaque arête sépare une face blanche et une face noire.



Définition

Une **m-constellation enraciné avec n faces noires** est une carte plane enraciné bicoloriée, telle que :

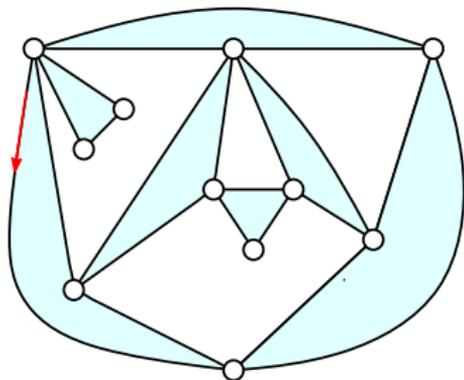
- Chaque arête sépare une face blanche et une face noire.
- Les faces noires ont degré m ,



Définition

Une **m-constellation enraciné avec n faces noires** est une carte plane enraciné bicoloriée, telle que :

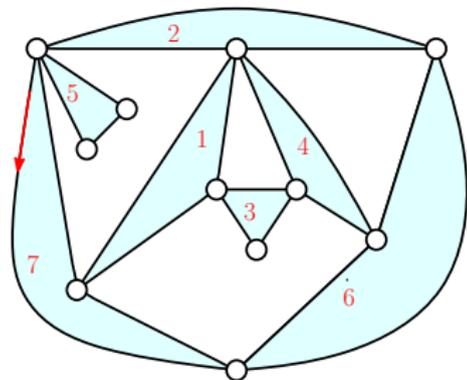
- Chaque arête sépare une face blanche et une face noire.
- Les faces noires ont degré m , les blanches multiple de m



Définition

Une **m-constellation enraciné avec n faces noires** est une carte plane enraciné bicoloriée, telle que :

- Chaque arête sépare une face blanche et une face noire.
- Les faces noires ont degré m, les blanches multiple de m

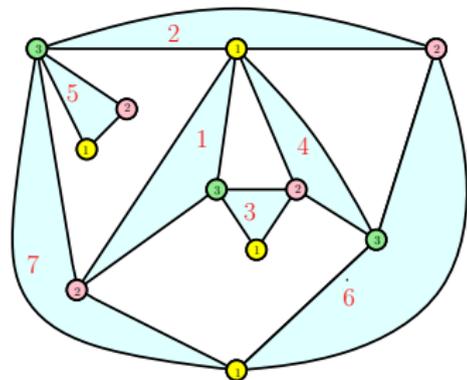


Une m-constellation enracinée est **indexée** si en plus les faces noires sont étiquetés de 1 à n, avec la condition que la face racine noire prend étiquette n.

Définition

Une **m-constellation enraciné avec n faces noires** est une carte plane enraciné bicoloriée, telle que :

- Chaque arête sépare une face blanche et une face noire.
- Les faces noires ont degré m, les blanches multiple de m



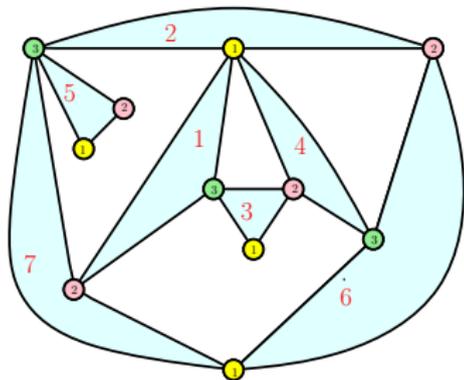
Une m-constellation enracinée est **indexée** si en plus les faces noires sont étiquetés de 1 à n, avec la condition que la face racine noire prend étiquette n.

On colorie les sommets de 1 à m en sens anti-horaire autour des faces, en donnant la couleur m au sommet racine.

On obtient une **constellation colorée indexée**.

LE TYPE D'UNE CONSTELLATION

Le **type** d'une constellation est la partition $\lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}$, où ℓ_i = nombre de faces blanches de degré m_i .



dans l'exemple on a :
3 faces de degré $m = 3$ et
2 faces de degré $2m = 6$

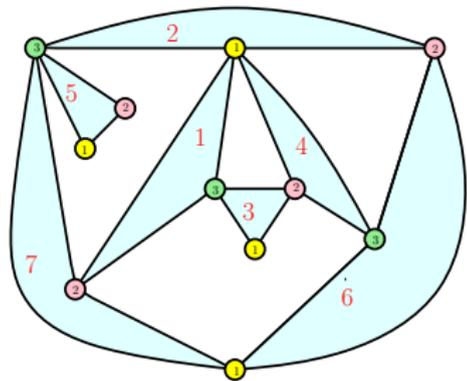
$$\Rightarrow \lambda = 1^3 2^2$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i

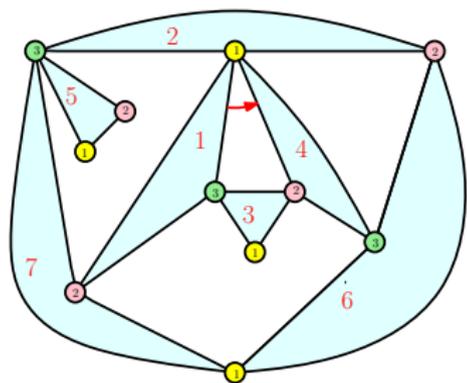


FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



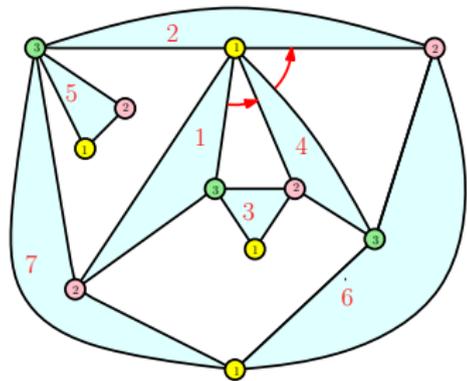
$$\sigma_1(1)=4,$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



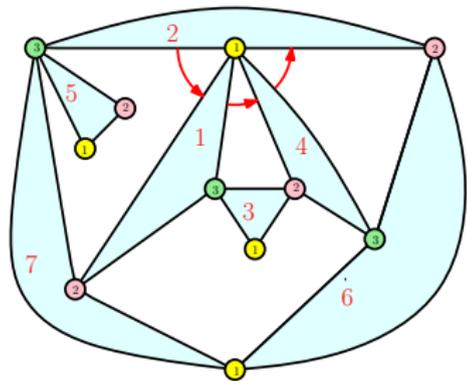
$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2,$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

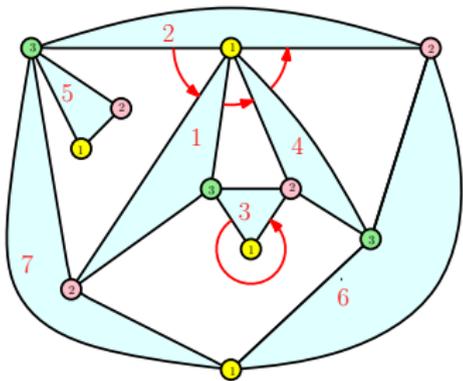
$$\sigma_1 = (1, 4, 2) \dots$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



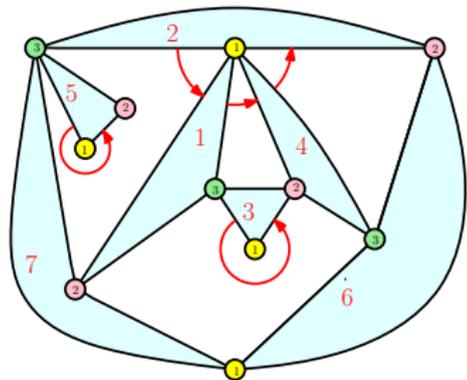
$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &= 4, \quad \sigma_1(4) = 2, \quad \sigma_1(2) = 1, \\ \sigma_1(3) &= 3, \\ \sigma_1 &= (1, 4, 2)(3) \dots\end{aligned}$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



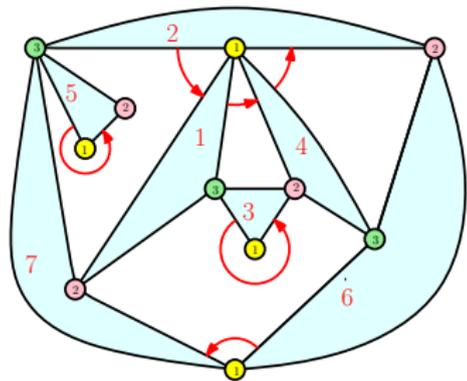
$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &= 4, \quad \sigma_1(4) = 2, \quad \sigma_1(2) = 1, \\ \sigma_1(3) &= 3, \quad \sigma_1(5) = 5, \\ \sigma_1 &= (1, 4, 2)(3)(5) \dots\end{aligned}$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



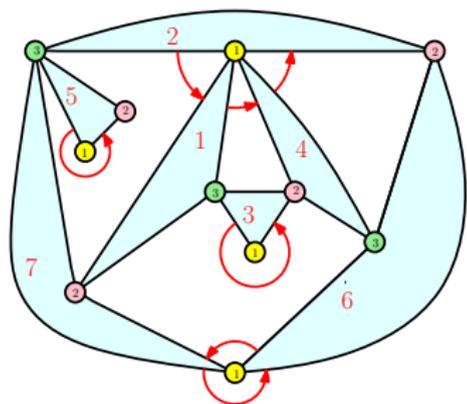
$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &= 4, \quad \sigma_1(4) = 2, \quad \sigma_1(2) = 1, \\ \sigma_1(3) &= 3, \quad \sigma_1(5) = 5, \quad \sigma_1(6) = 7, \\ \sigma_1 &= (1, 4, 2)(3)(5) \dots\end{aligned}$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



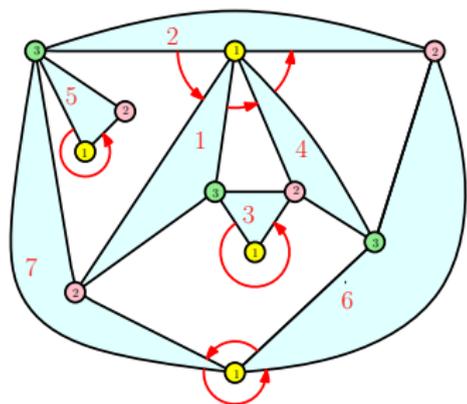
$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &= 4, \quad \sigma_1(4) = 2, \quad \sigma_1(2) = 1, \\ \sigma_1(3) &= 3, \quad \sigma_1(5) = 5, \quad \sigma_1(6) = 7, \quad \sigma_1(7) = 6. \\ \sigma_1 &= (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)\end{aligned}$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



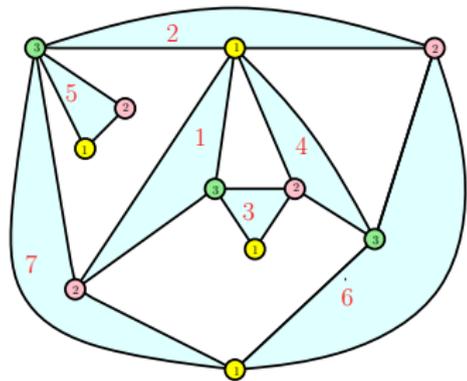
$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &= 4, \quad \sigma_1(4) = 2, \quad \sigma_1(2) = 1, \\ \sigma_1(3) &= 3, \quad \sigma_1(5) = 5, \quad \sigma_1(6) = 7, \quad \sigma_1(7) = 6. \\ \sigma_1 &= (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)\end{aligned}$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



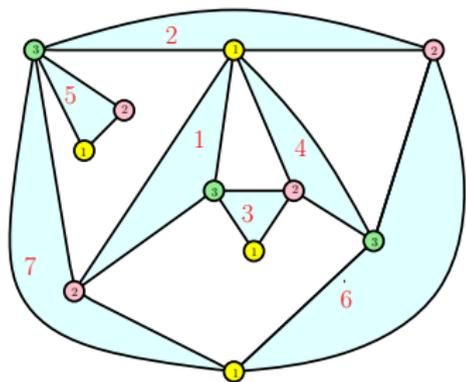
$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &= 4, \sigma_1(4) = 2, \sigma_1(2) = 1, \\ \sigma_1(3) &= 3, \sigma_1(5) = 5, \sigma_1(6) = 7, \sigma_1(7) = 6. \\ \sigma_1 &= (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7) \\ \sigma_2 &= (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5) \\ \sigma_3 &= (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)\end{aligned}$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

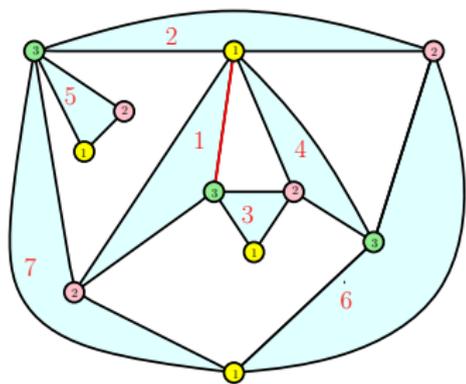
\leftrightarrow type cyclique de σ_i

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

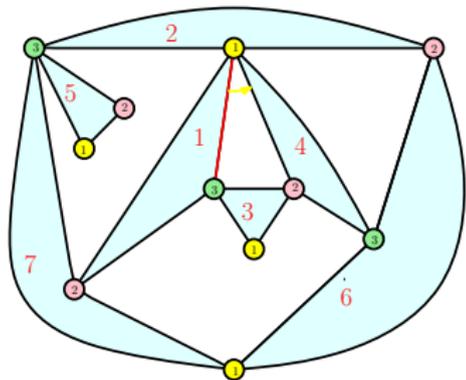
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

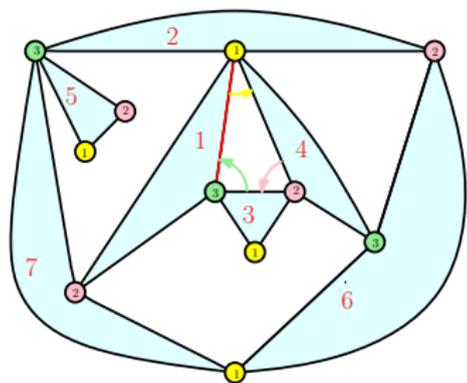
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

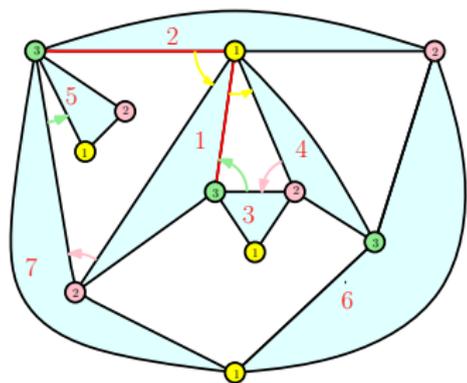
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

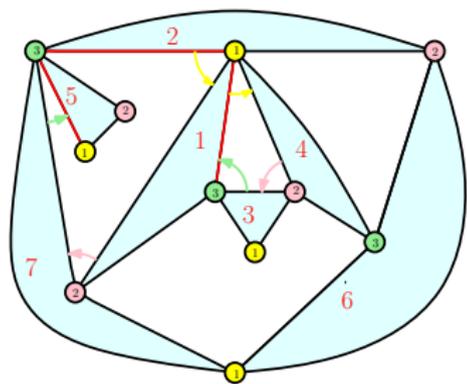
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1) (2, 5)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

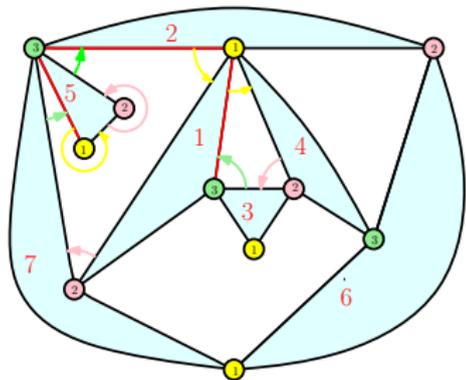
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1) (2, 5)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

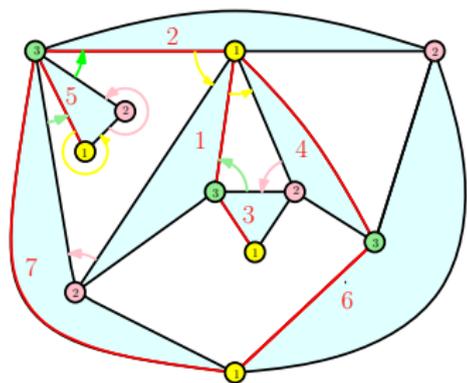
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1) (2, 5)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

\leftrightarrow type cyclique de σ_i

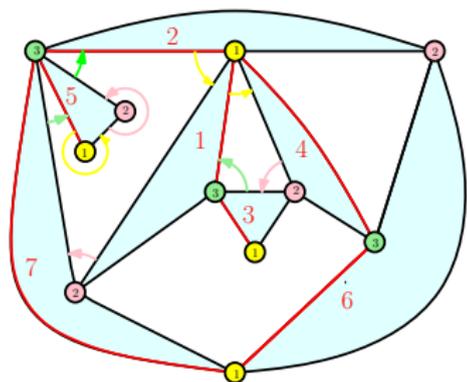
$$\text{Le produit : } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1) (2, 5) (3, 6)(4)(7)$$

FACTORISATIONS ET CONSTELLATIONS

Théorème (Zvonkin)

Les m -constellations coloriées indexées de type λ sont en bijection avec les factorisations transitives minimales en m facteurs de permutations de type cyclique λ .

Étant donnée une constellation, on pose $\sigma_i(p) = q$ si p suit q en tournant en sens anti-horaire autour d'un sommet de couleur i



$$\sigma_1(1)=4, \sigma_1(4)=2, \sigma_1(2)=1,$$

$$\sigma_1(3)=3, \sigma_1(5)=5, \sigma_1(6)=7, \sigma_1(7)=6.$$

$$\sigma_1 = (1, 4, 2)(3)(5)(6, 7)$$

$$\sigma_2 = (1, 7)(2, 6)(3, 4)(5)$$

$$\sigma_3 = (1, 3)(2, 7, 5)(4, 6)$$

Degré des sommets de couleur i

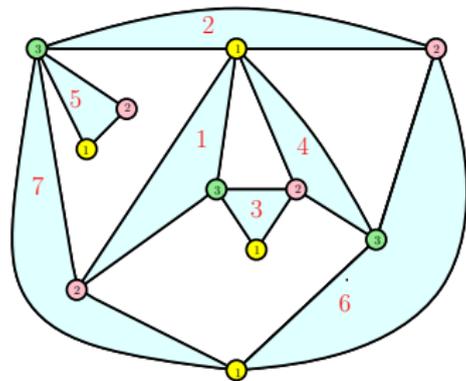
\leftrightarrow type cyclique de σ_i

Le produit : $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = (1) (2, 5) (3, 6)(4)(7)$

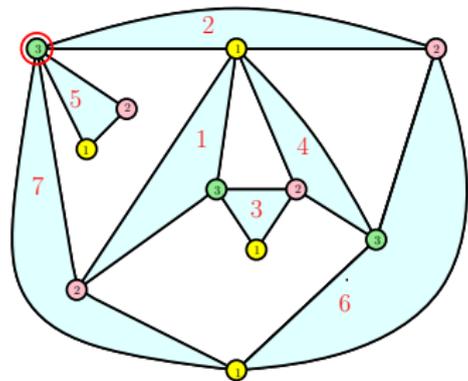
transitif et minimal car la constellation est connexe et planaire

La bijection de Bouttier, Di Francesco, Guitter dans le cas des constellations et une simplification des mobiles

Une bijection entre constellations et mobiles



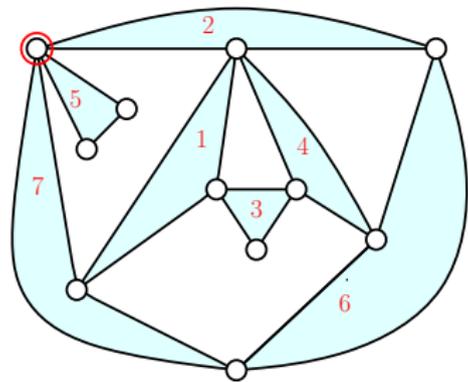
Une bijection entre constellations et **mobiles**



On oublie les couleurs, on garde juste une marque sur le sommet de couleur m incident à la face noire d'index n .

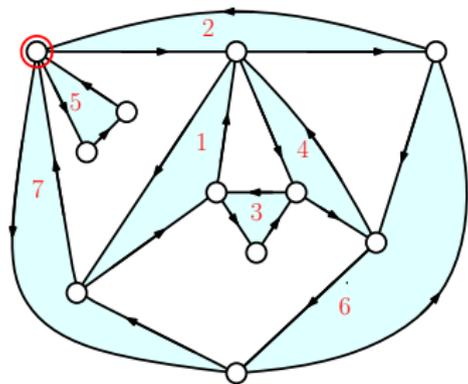
BOUTTIER-DI FRANCESCO-GUITTER

Une bijection entre constellations et **mobiles**



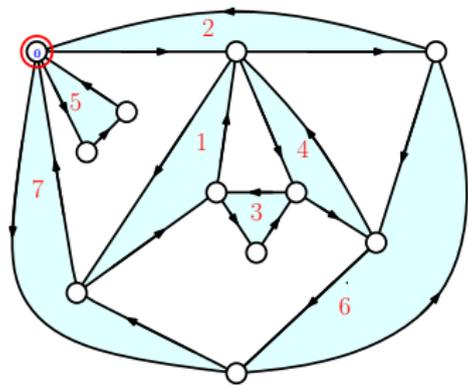
On oublie les couleurs, on garde juste une marque sur le sommet de couleur m incident à la face noire d'index n .

Une bijection entre constellations et **mobiles**



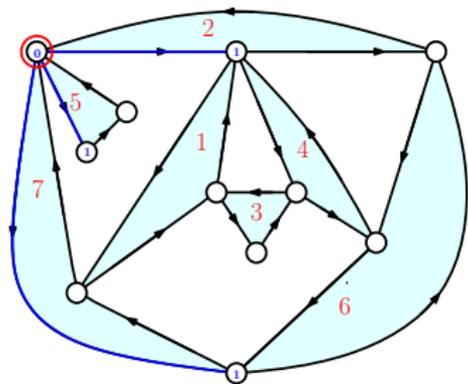
On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Une bijection entre constellations et **mobiles**



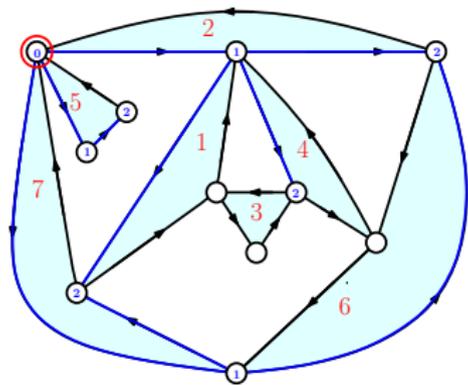
On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Une bijection entre constellations et **mobiles**



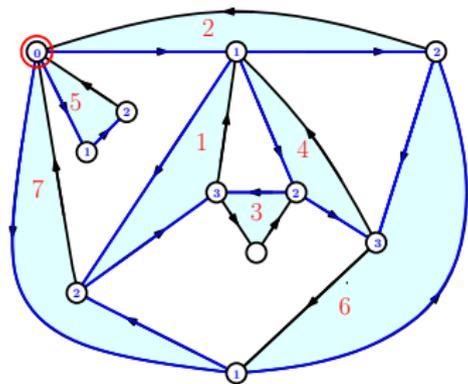
On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Une bijection entre constellations et **mobiles**



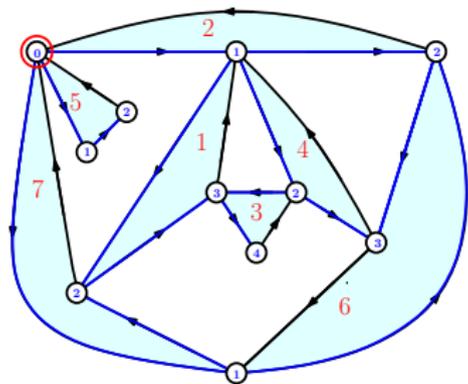
On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Une bijection entre constellations et **mobiles**



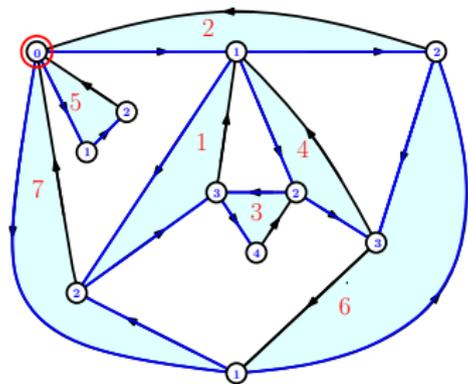
On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Une bijection entre constellations et **mobiles**



On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

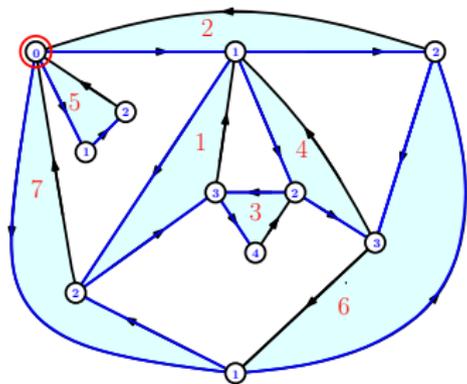
Une bijection entre constellations et **mobiles**



On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Modulo m ces étiquettes sont égales aux couleurs précédentes.

Une bijection entre constellations et **mobiles**

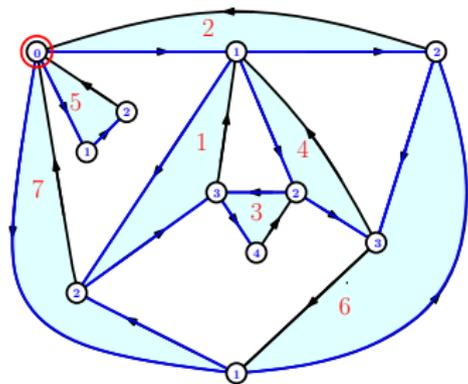


On oriente chaque arête avec la face noire à sa gauche, et on étiquette les sommets selon la longueur d'un plus court chemin depuis le sommet marqué

Modulo m ces étiquettes sont égales aux couleurs précédentes. Autour de chaque face noire, en partant du sommet de distance minimale on a successivement :

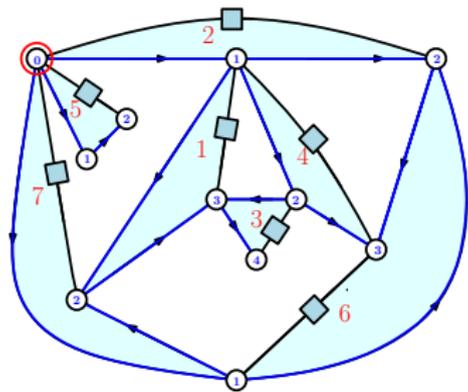
- $m - 1$ arêtes de la forme $d \rightarrow d + 1$, appelée **géodésiques**
- puis 1 arête $d \rightarrow d - m + 1$.

Une bijection entre constellations et **mobiles**



On introduit un sommet noir dans chaque face noire, qu'on étiquette par le minimum de la face

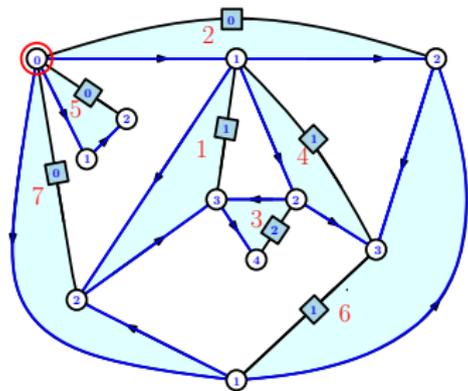
Une bijection entre constellations et **mobiles**



On introduit un sommet noir dans chaque face noire, qu'on étiquette par le minimum de la face

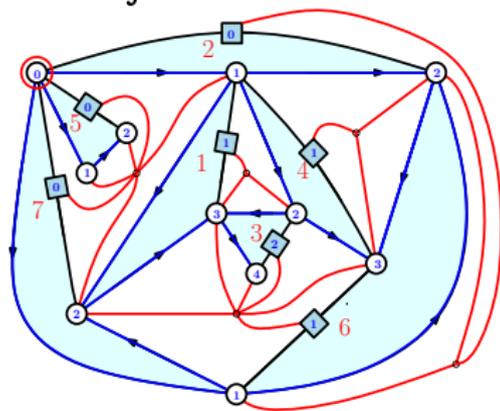
BOUTTIER-DI FRANCESCO-GUITTER

Une bijection entre constellations et **mobiles**



On introduit un sommet noir dans chaque face noire, qu'on étiquette par le minimum de la face et un sommet blanc dans chaque face blanche

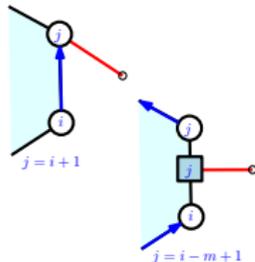
Une bijection entre constellations et **mobiles**



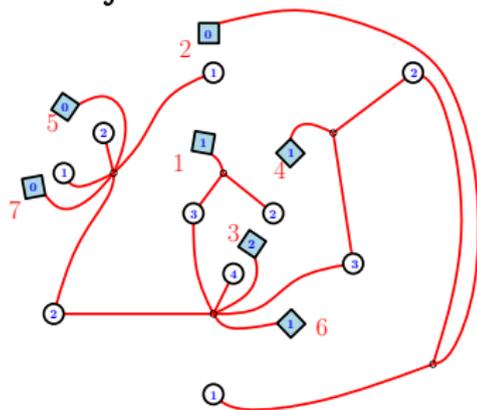
On introduit un sommet noir dans chaque face noire, qu'on étiquette par le minimum de la face et un sommet blanc dans chaque face blanche

Puis

- pour chaque arête géodesique relier le sommet blanc adjacent à son extrémité
- pour chacune autre arête relier le sommet blanc adjacent et le sommet noir associé.



Une bijection entre constellations et **mobiles**

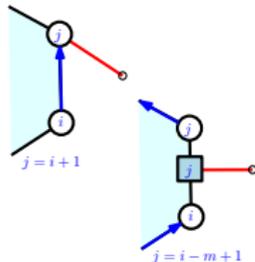


On introduit un sommet noir dans chaque face noire, qu'on étiquette par le minimum de la face et un sommet blanc dans chaque face blanche

Puis

- pour chaque arête géodesique relier le sommet blanc adjacent à son extrémité
- pour chacune autre arête relier le sommet blanc adjacent et le sommet noir associé.

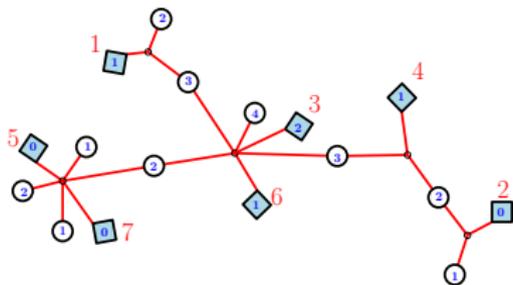
On obtient un arbre, appelé **BDFG-mobile**



Définition

Un **mobile** est un arbre plan à 3 types de vertex : \textcircled{i} , \boxed{i} et \circ

- Les arêtes sont de la forme $\textcircled{i}-\circ$ ou $\boxed{i}-\circ$.
- Les \boxed{i} sont des feuilles, les \circ ont degré multiple de m .
- Autour d'un \circ en sens horaire :
 - Chaque \boxed{i} est précédé par un sommet étiqueté $i + m - 1$.
 - Chaque \textcircled{i} est précédé par un sommet d'étiquette $i - 1$.



\textcircled{i} = sommet hérité

\boxed{i} = sommet noir

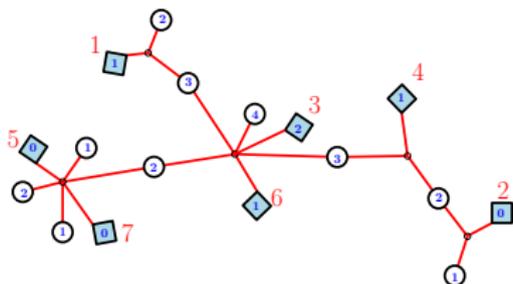
\circ = sommet blanc

Chaque \circ de degré mk
porte k feuilles \boxed{i} .

Définition

Un **mobile** est un arbre plan à 3 types de vertex : \textcircled{i} , \boxed{i} et \circ

- Les arêtes sont de la forme $\textcircled{i}-\circ$ ou $\boxed{i}-\circ$.
- Les \boxed{i} sont des feuilles, les \circ ont degré multiple de m .
- Autour d'un \circ en sens horaire :
 - Chaque \boxed{i} est précédé par un sommet étiqueté $i + m - 1$.
 - Chaque \textcircled{i} est précédé par un sommet d'étiquette $i - 1$.



\textcircled{i} = sommet hérité

\boxed{i} = sommet noir

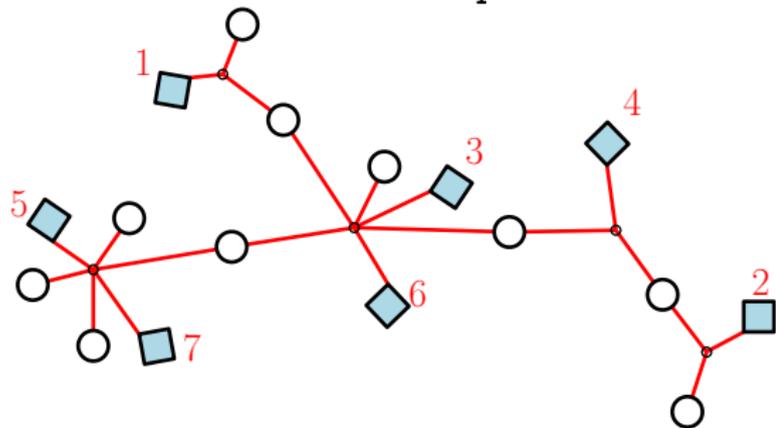
\circ = sommet blanc

Chaque \circ de degré mk
porte k feuilles \boxed{i} .

Les mobiles de la bijection ont l'index n sur une feuille 0.

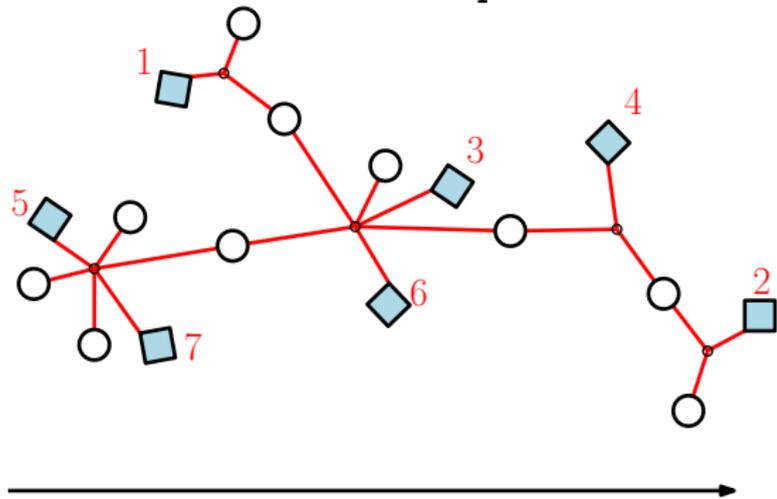
PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

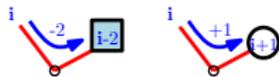


PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

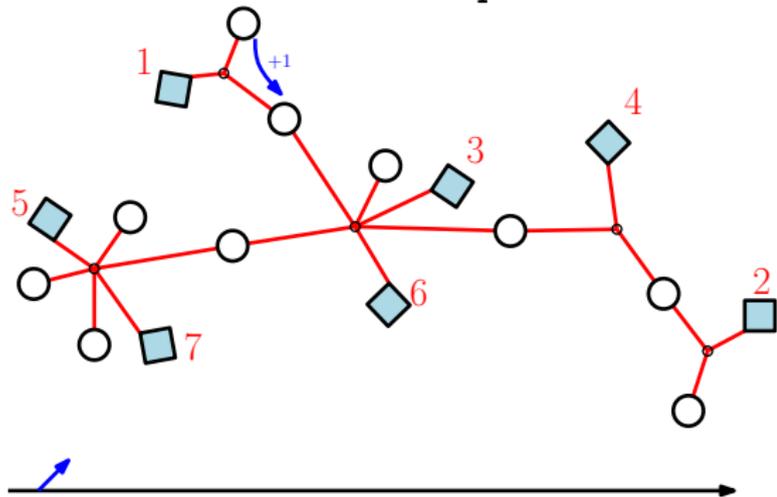


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile

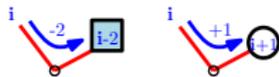


PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

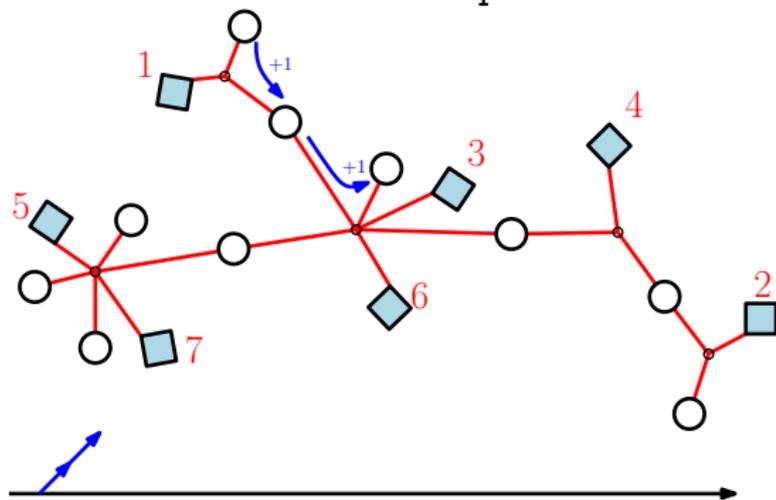


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile



PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

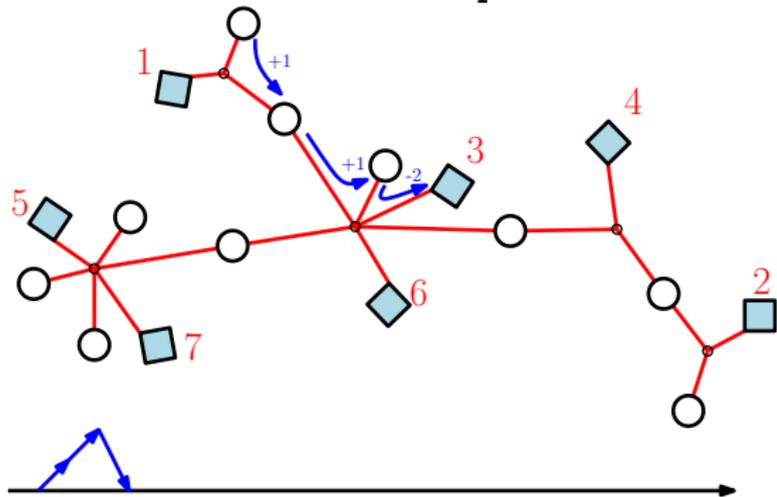


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile



PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

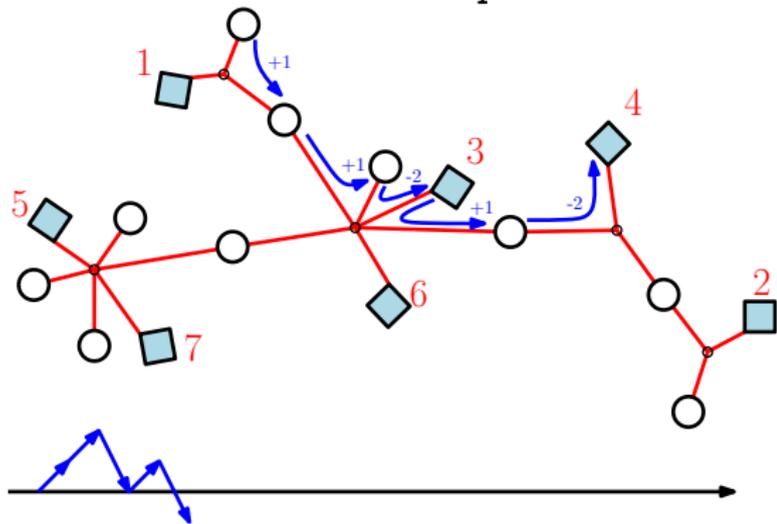


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile

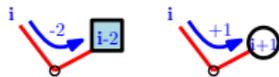


PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

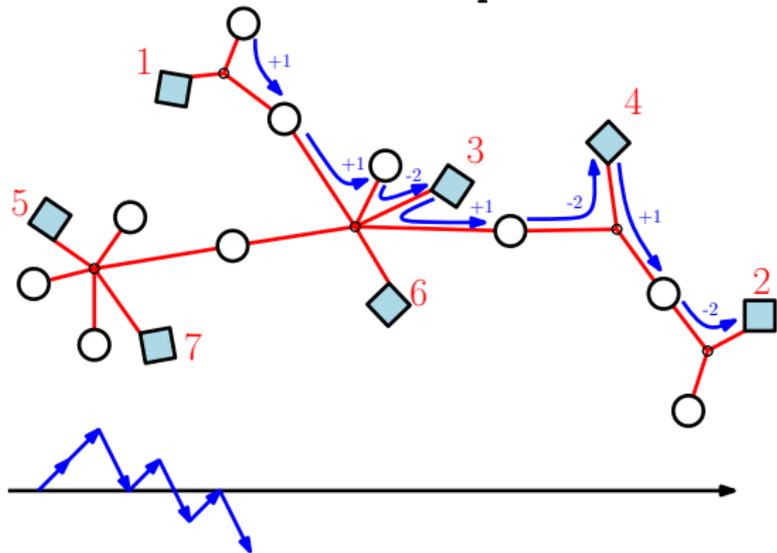


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile



PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

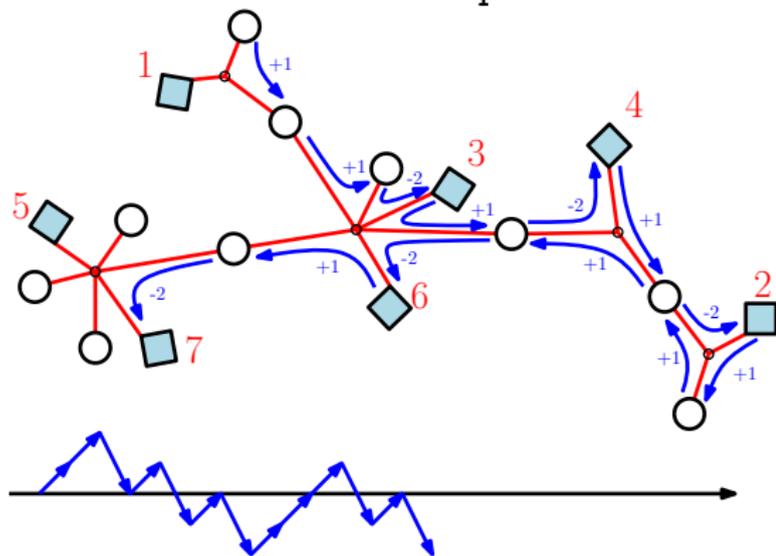


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile

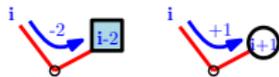


PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

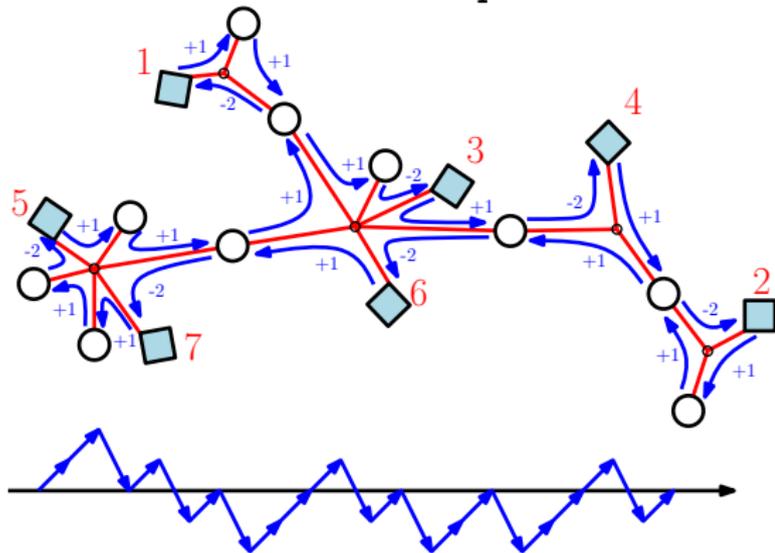


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile

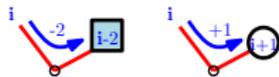


PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver

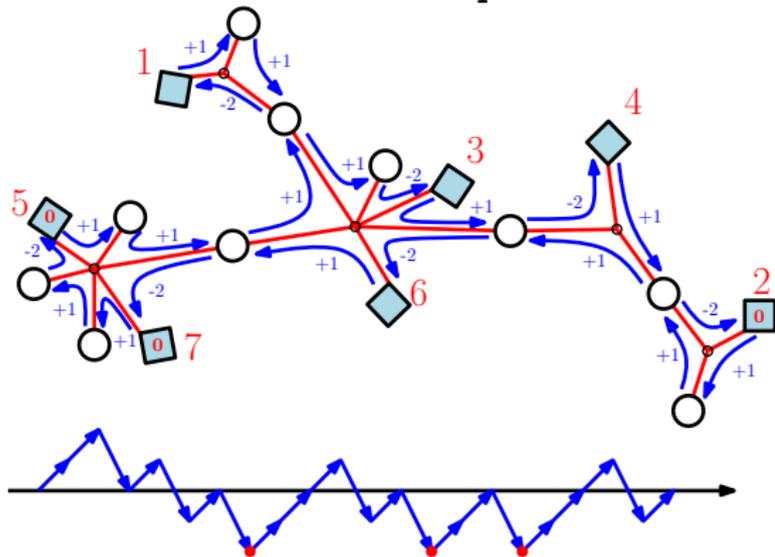


Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile



PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver



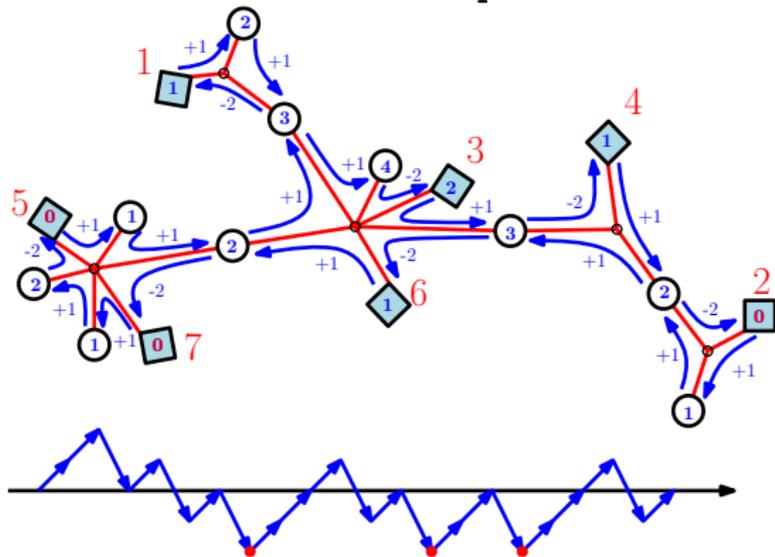
Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile



- Le minimum du chemin est forcément sur une feuille \boxed{i} .

PREMIÈRE SIMPLIFICATION : MOBILES NUS

Si on enlève toutes les étiquettes on sait les retrouver



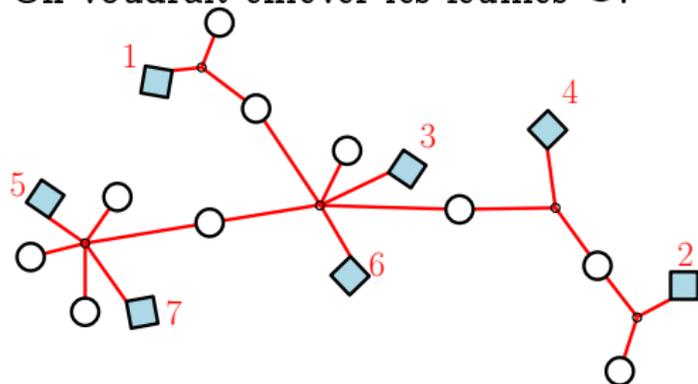
Construire le chemin associé aux variations données par les règles du mobile



- Le minimum du chemin est forcément sur une feuille $\square i$.
- On retrouve ainsi les 0 puis les autres étiquettes.

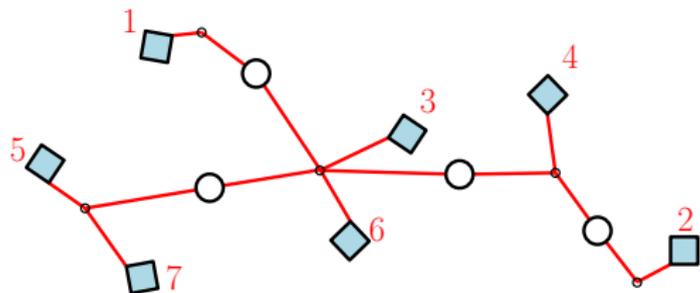
DEUXIÈME SIMPLIFICATION : MOBILES RÉDUITS

On voudrait enlever les feuilles \textcircled{i} .



DEUXIÈME SIMPLIFICATION : MOBILES RÉDUITS

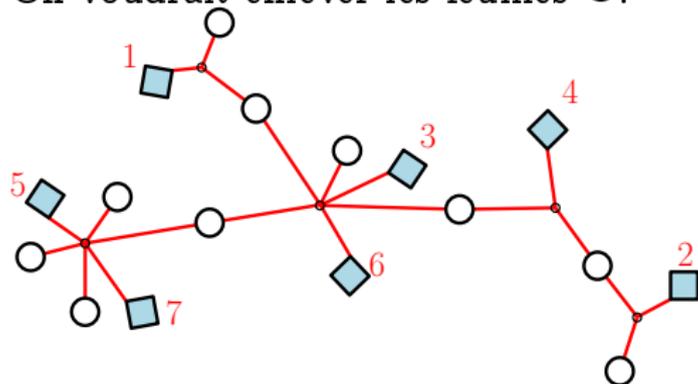
On voudrait enlever les feuilles \textcircled{i} .



On saurait combien
il faut de feuilles \textcircled{i}
autour de chaque \circ
mais on ne sait pas où
elles étaient

DEUXIÈME SIMPLIFICATION : MOBILES RÉDUITS

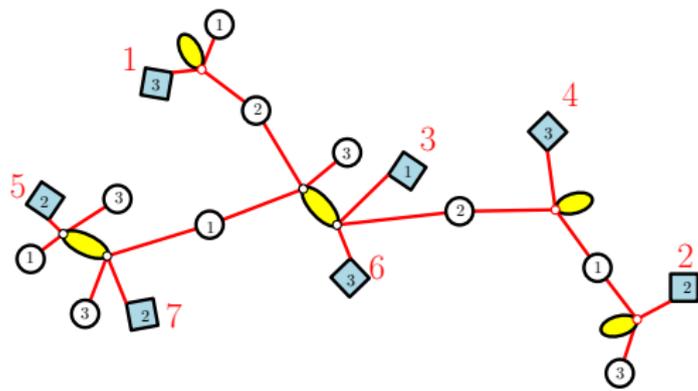
On voudrait enlever les feuilles \textcircled{i} .



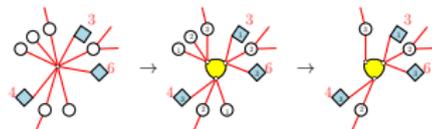
On saurait combien
il faut de feuilles \textcircled{i}
autour de chaque \circ
mais on ne sait pas où
elles étaient

DEUXIÈME SIMPLIFICATION : MOBILES RÉDUITS

On voudrait enlever les feuilles \textcircled{i} .

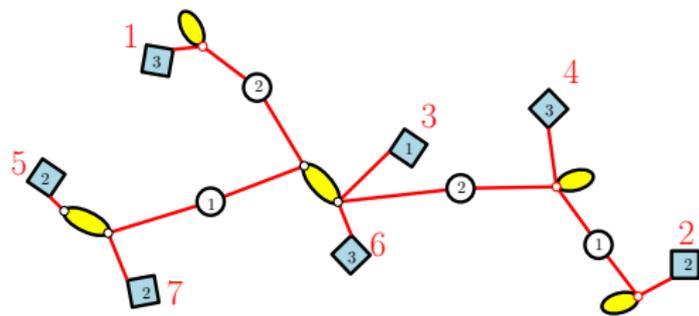


Avant de supprimer
on regroupe les voisins
des \circ par groupes de
 m , et on les numérote
de 1 à m :

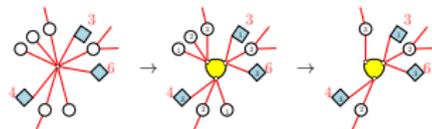


DEUXIÈME SIMPLIFICATION : MOBILES RÉDUITS

On voudrait enlever les feuilles \textcircled{i} .



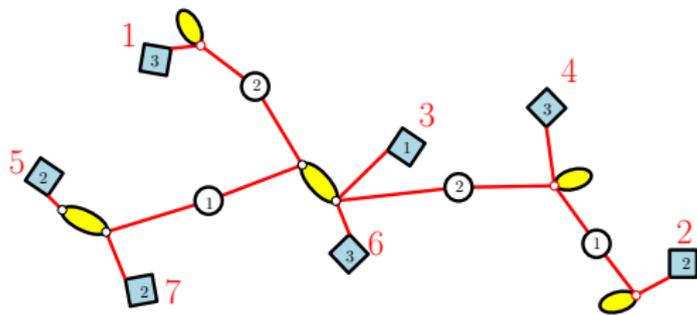
Avant de supprimer
on regroupe les voisins
des \circ par groupes de
 m , et on les numérote
de 1 à m :



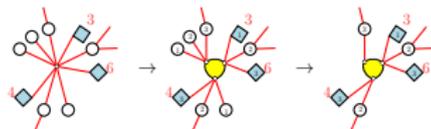
\Rightarrow On sait ainsi replacer les feuilles \textcircled{i} manquantes.

DEUXIÈME SIMPLIFICATION : MOBILES RÉDUITS

On voudrait enlever les feuilles \textcircled{i} .



Avant de supprimer
on regroupe les voisins
des \circ par groupes de
 m , et on les numérote
de 1 à m :



\Rightarrow On sait ainsi replacer les feuilles \textcircled{i} manquantes.

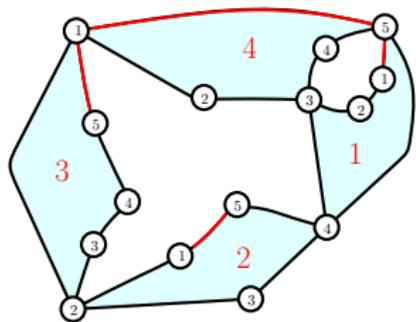
Pour chaque mobile nu : m façons de diviser en groupe

$$\#\{\text{mobiles nus de type } \lambda\} = \frac{1}{m} \#\{\text{mobiles réduits de type } \lambda\}$$

Le cas des factorisations en transpositions

FACTORISATIONS EN TRANSPOSITIONS ET CONSTELLATIONS SIMPLES

Une constellation est **simple** si pour tout $i = 1, \dots, m$, exactement un sommet de couleur i est incident à 2 faces noires et les $n - 2$ autres sont incidents à une seule face noire.



$$m = 5, n = 4$$

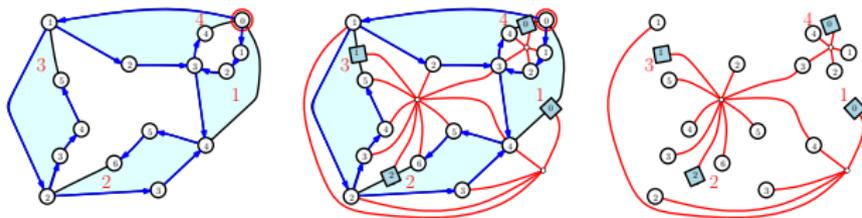
$$\sigma_1 = (3, 4), \sigma_2 = (2, 3), \sigma_3 = (1, 4),$$

$$\sigma_4 = (1, 2), \sigma_5 = (1, 4).$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 = (1)(2, 3)(4)$$

CONSTELLATION SIMPLE \leftrightarrow MOBILE

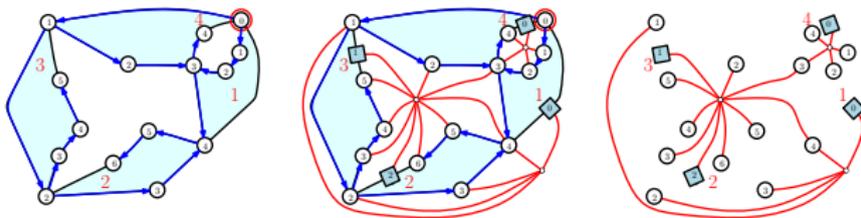
Dans le BDGF-mobile associé on aura :



CONSTELLATION SIMPLE \leftrightarrow MOBILE

Dans le BDGF-mobile associé on aura :

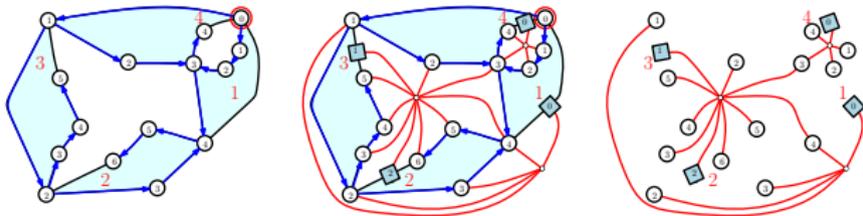
- sommet marqué \Rightarrow 1 ou 2 feuilles i



CONSTELLATION SIMPLE \leftrightarrow MOBILE

Dans le BDGF-mobile associé on aura :

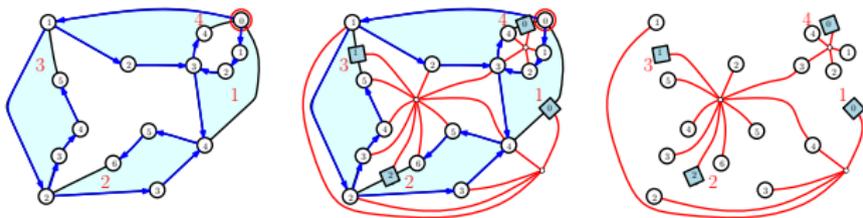
- sommet marqué \Rightarrow 1 ou 2 feuilles \blacksquare i
- sommet non marqué incident à 2 faces noires \Rightarrow (sommet \circ de degré 2) ou (feuille \circ + feuille \blacksquare i).



CONSTELLATION SIMPLE \leftrightarrow MOBILE

Dans le BDGF-mobile associé on aura :

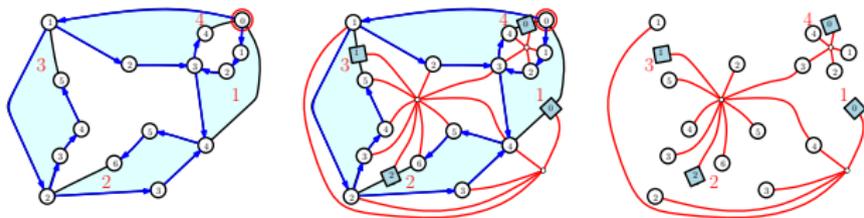
- sommet marqué \Rightarrow 1 ou 2 feuilles \blacksquare i
- sommet non marqué incident à 2 faces noires \Rightarrow (sommet \odot de degré 2) ou (feuille \odot + feuille \blacksquare i).
- sommet non marqué incident à 1 face noire \Rightarrow feuille \odot .



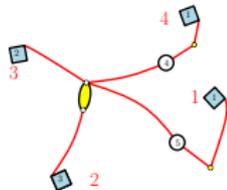
CONSTELLATION SIMPLE \leftrightarrow MOBILE

Dans le BDGF-mobile associé on aura :

- sommet marqué \Rightarrow 1 ou 2 feuilles \blacksquare_i
- sommet non marqué incident à 2 faces noires \Rightarrow (sommet \circ_i de degré 2) ou (feuille \circ_i + feuille \blacksquare_i).
- sommet non marqué incident à 1 face noire \Rightarrow feuille \circ_i .



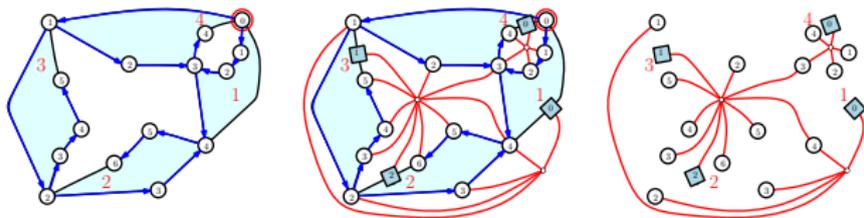
Dans le mobile réduit les feuilles \circ_i disparaissent. On obtient 1 sommet \circ_i ou 1 feuille \blacksquare_i par couleur d'origine, donc les étiquettes sont différentes, sauf si le sommet marqué produit 2 feuilles \blacksquare_i .



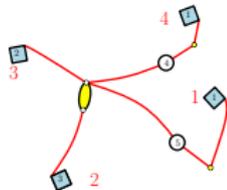
CONSTELLATION SIMPLE \leftrightarrow MOBILE

Dans le BDGF-mobile associé on aura :

- sommet marqué \Rightarrow 1 ou 2 feuilles \blacksquare_i
- sommet non marqué incident à 2 faces noires \Rightarrow (sommet \circ_i de degré 2) ou (feuille \circ_i + feuille \blacksquare_i).
- sommet non marqué incident à 1 face noire \Rightarrow feuille \circ_i .

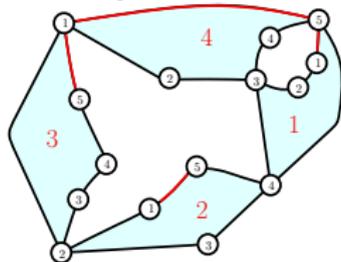


Dans le mobile réduit les feuilles \circ_i disparaissent.
On obtient 1 sommet \circ_i ou 1 feuille \blacksquare_i par couleur d'origine, donc les étiquettes sont différentes, sauf si le sommet marqué produit 2 feuilles \blacksquare_i .
Ce cas particulier complique l'énumération...



UNE COULEUR SUPPLÉMENTAIRE

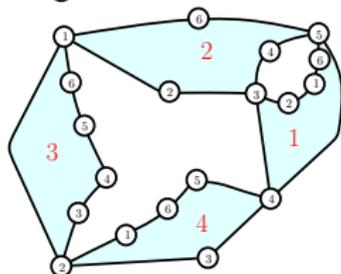
Pour éviter le problème du sommet racine on utilise une astuce : ajouter un facteur identité



$$m = 5, n = 4$$

$$\sigma_1 = (3, 4), \sigma_2 = (2, 3), \sigma_3 = (1, 4), \\ \sigma_4 = (1, 2), \sigma_5 = (1, 4).$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 = (1)(2, 3)(4)$$



$$m + 1 = 6, n = 4$$

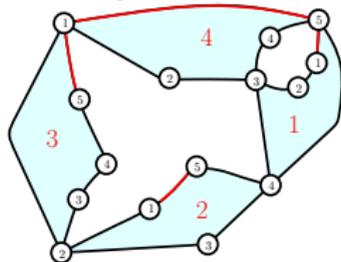
$$\sigma_1 = (3, 4), \sigma_2 = (2, 3), \sigma_3 = (1, 4), \\ \sigma_4 = (1, 2), \sigma_5 = (1, 4), \sigma_6 = \text{id}_4.$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \text{id}_4 = (1)(2, 3)(4)$$

On se ramène ainsi à des $(m+1)$ -constellations indexées avec $n-1$ sommets de couleur $1 \leq i \leq m$ et n de couleur $m+1$.

UNE COULEUR SUPPLÉMENTAIRE

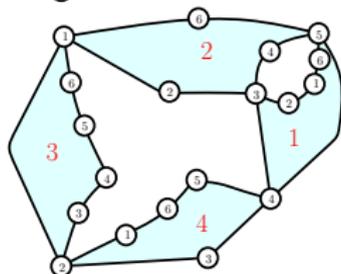
Pour éviter le problème du sommet racine on utilise une astuce : ajouter un facteur identité



$$m = 5, n = 4$$

$$\sigma_1 = (3, 4), \sigma_2 = (2, 3), \sigma_3 = (1, 4), \\ \sigma_4 = (1, 2), \sigma_5 = (1, 4).$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 = (1)(2, 3)(4)$$



$$m + 1 = 6, n = 4$$

$$\sigma_1 = (3, 4), \sigma_2 = (2, 3), \sigma_3 = (1, 4), \\ \sigma_4 = (1, 2), \sigma_5 = (1, 4), \sigma_6 = \text{id}_4.$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \text{id}_4 = (1)(2, 3)(4)$$

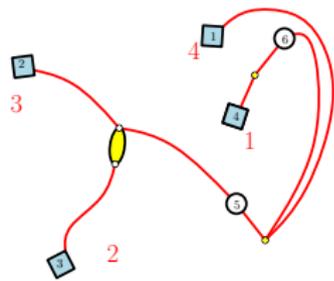
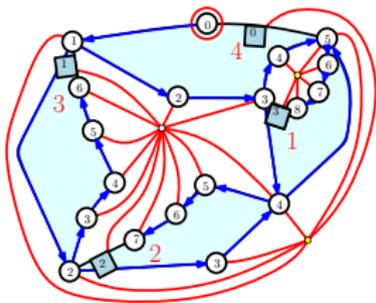
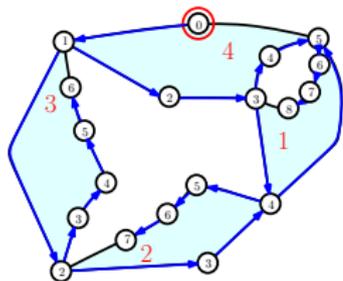
On se ramène ainsi à des $(m+1)$ -constellations indexées avec $n-1$ sommets de couleur $1 \leq i \leq m$ et n de couleur $m+1$.

L'origine sera ainsi toujours incidente à une seule face noire.

UNE COULEUR SUPPLÉMENTAIRE

Dans les mobiles réduits associés on a maintenant

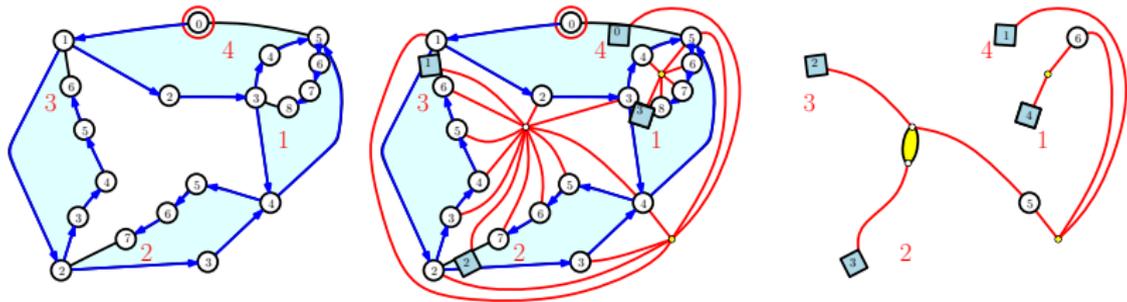
- un sommet \textcircled{i} de degré 2, ou une feuille \boxed{i} provenant de chaque sommet incident à 2 faces noires
- une feuille \boxed{i} d'index n provenant du sommet marqué.



UNE COULEUR SUPPLÉMENTAIRE

Dans les mobiles réduits associés on a maintenant

- un sommet \textcircled{i} de degré 2, ou une feuille \boxed{i} provenant de chaque sommet incident à 2 faces noires
- une feuille \boxed{i} d'index n provenant du sommet marqué.

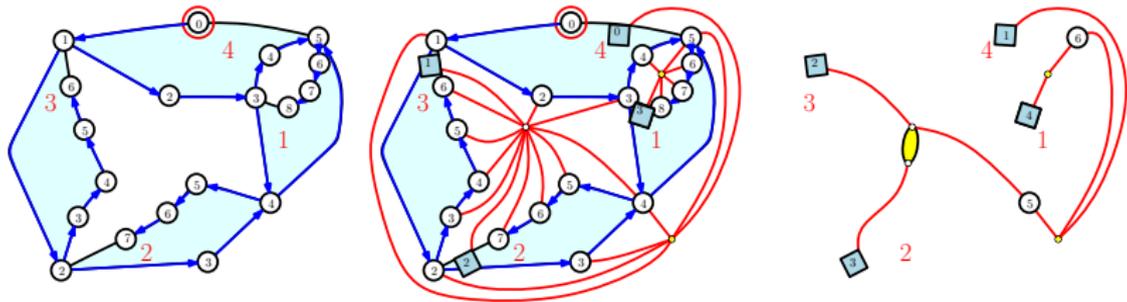


Les étiquettes des $m + 1$ sommets obtenus sont distinctes.

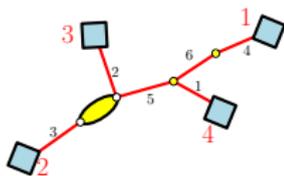
UNE COULEUR SUPPLÉMENTAIRE

Dans les mobiles réduits associés on a maintenant

- un sommet \textcircled{i} de degré 2, ou une feuille \boxed{i} provenant de chaque sommet incident à 2 faces noires
- une feuille \boxed{i} d'index n provenant du sommet marqué.



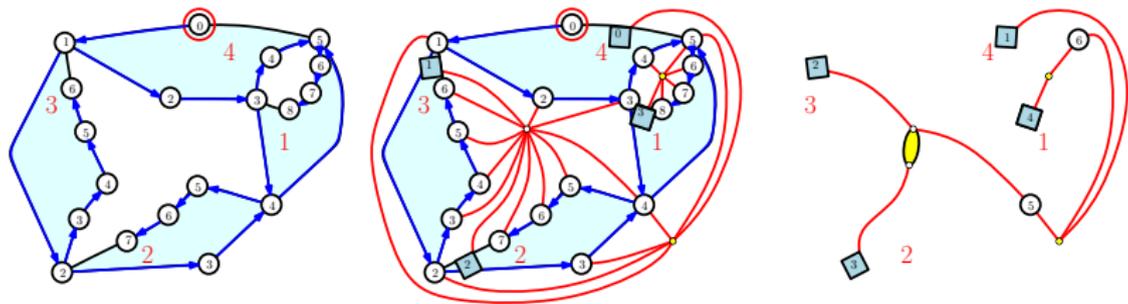
On transfère ces étiquettes aux arêtes pour obtenir un **mobile d'Hurwitz**.



UNE COULEUR SUPPLÉMENTAIRE

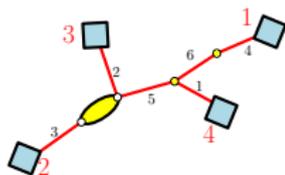
Dans les mobiles réduits associés on a maintenant

- un sommet \textcircled{i} de degré 2, ou une feuille \boxed{i} provenant de chaque sommet incident à 2 faces noires
- une feuille \boxed{i} d'index n provenant du sommet marqué.



On transfère ces étiquettes aux arêtes pour obtenir un **mobile d'Hurwitz**.

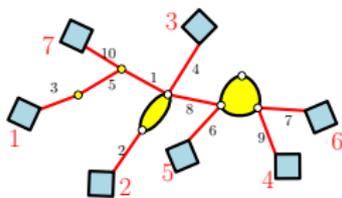
Comme les étiquettes des arêtes sont croissantes autour de chaque noeud, on peut oublier le plongement et voir ces cactus comme des arbres non plongés (de type arbre de Cayley).



LES MOBILES D'HURWITZ

Un **mobile d'Hurwitz** de type λ est un cactus avec ℓ polygones dont ℓ_i i -gones, n feuilles \square_i et $m + 1 = n + \ell - 1$ arêtes tel que :

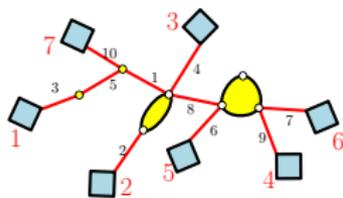
- les arêtes portent les étiquettes $\{1, \dots, m + 1\}$
- les feuilles \square_i portent les indices $\{1, \dots, n\}$.
- chaque i -gone est incident à i feuilles \square_i .



LES MOBILES D'HURWITZ

Un **mobile d'Hurwitz** de type λ est un cactus avec ℓ polygones dont ℓ_i i -gones, n feuilles \square_i et $m + 1 = n + \ell - 1$ arêtes tel que :

- les arêtes portent les étiquettes $\{1, \dots, m + 1\}$
- les feuilles \square_i portent les indices $\{1, \dots, n\}$.
- chaque i -gone est incident à i feuilles \square_i .

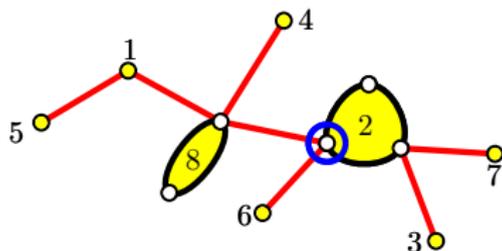


On doit les compter !

Énumération des mobiles d'Hurwitz

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

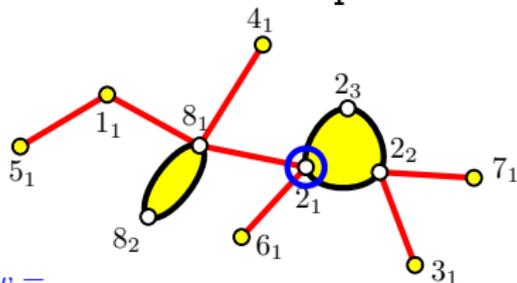
On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



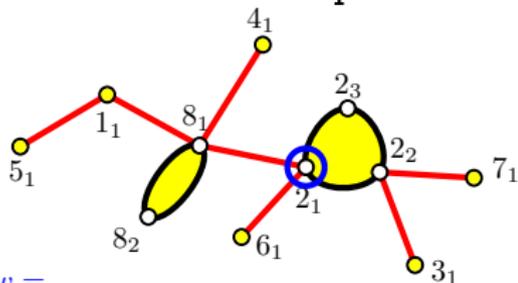
$w =$

$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

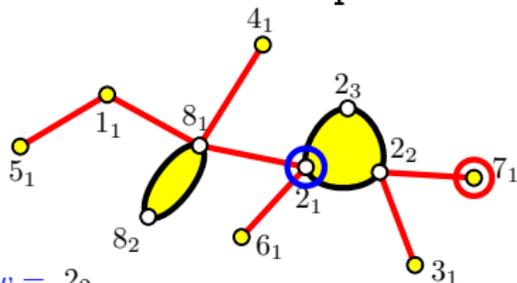
$w =$

$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

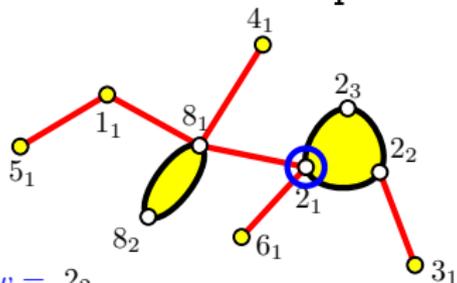
$$w = 2_2$$

$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2$$

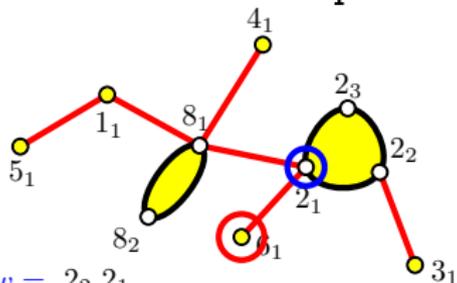
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1$$

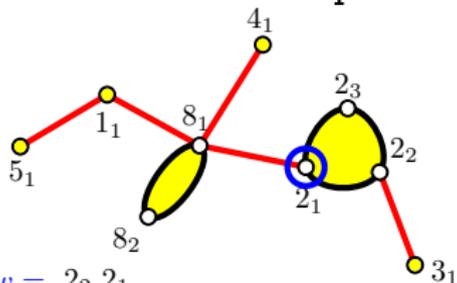
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1$$

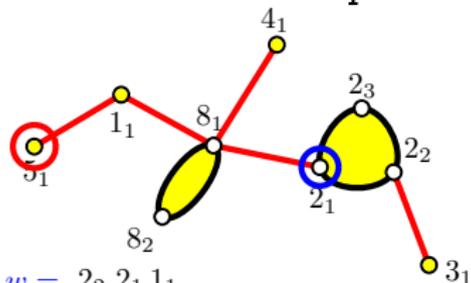
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1$$

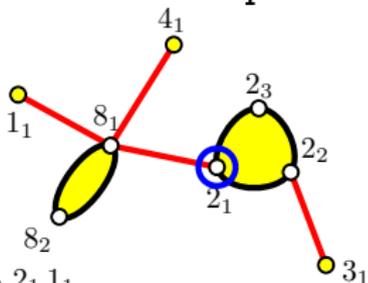
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1$$

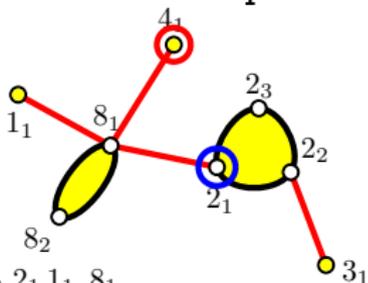
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1$$

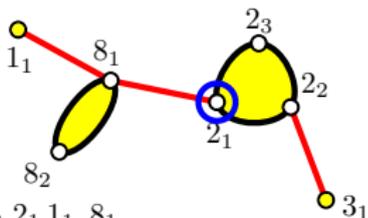
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1$$

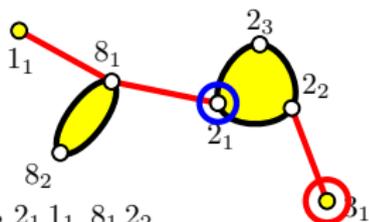
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1 2_2$$

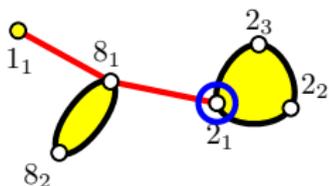
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1 2_2$$

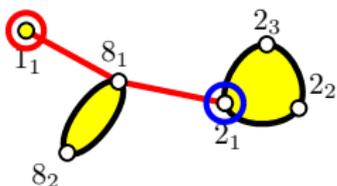
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$w = 2_2 2_1 1_1 8_1 2_2 8_1$

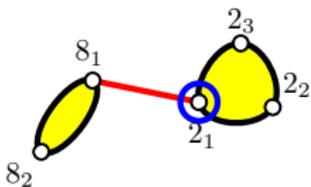
$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1 2_2 8_1$$

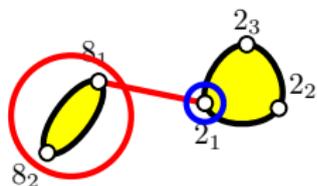
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1 2_2 8_1 2_1$$

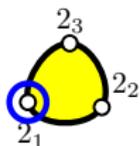
$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

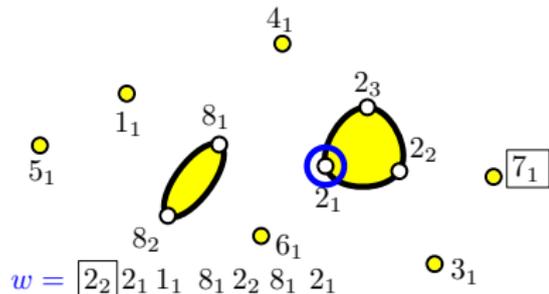
$$w = 2_2 2_1 1_1 8_1 2_2 8_1 2_1$$

$$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



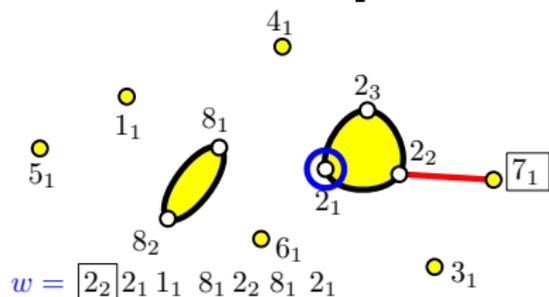
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

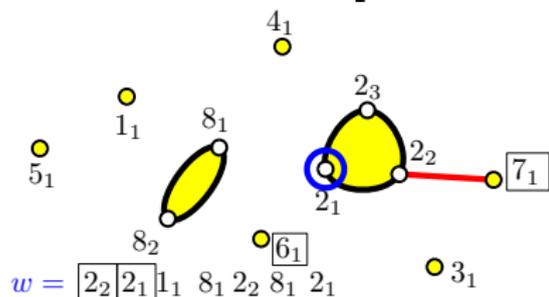
$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



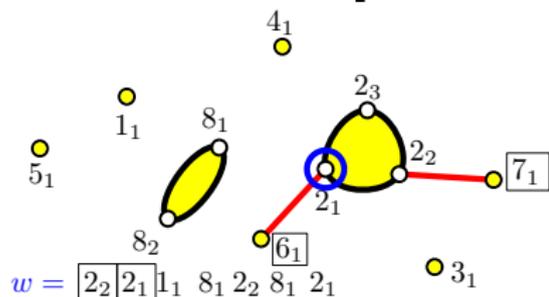
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



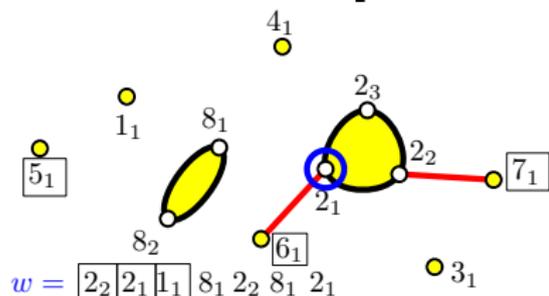
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

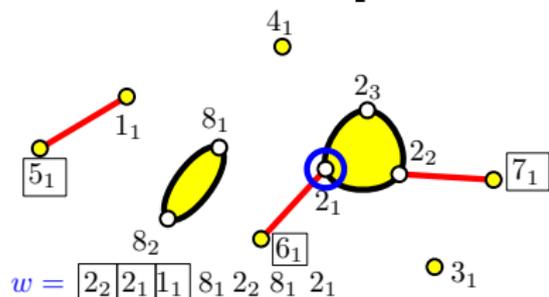
$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



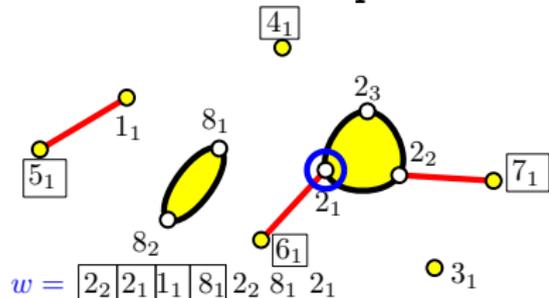
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



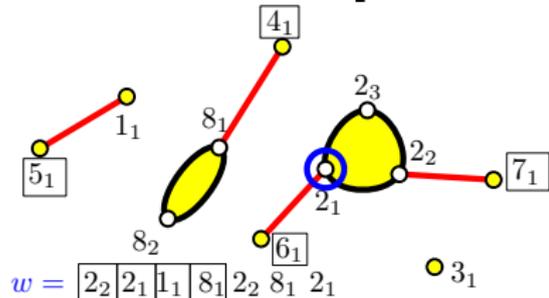
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

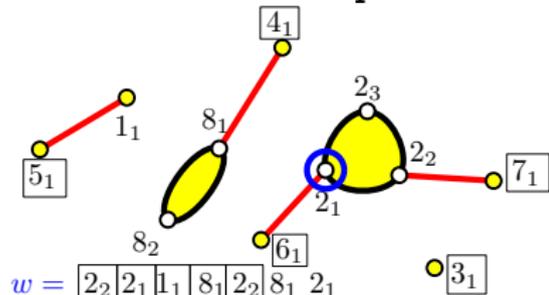
$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

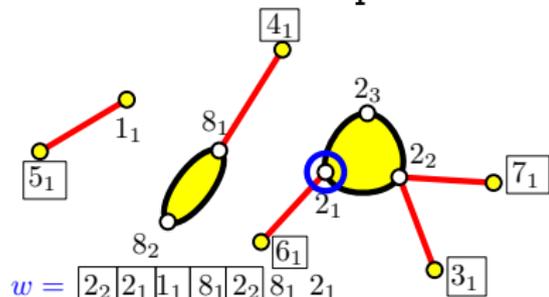
$w = [2_2, 2_1, 1_1, 8_1, 2_2, 8_1, 2_1]$
 $A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



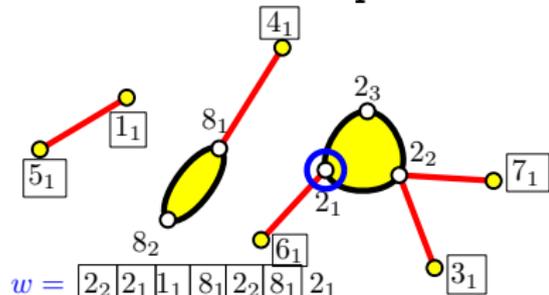
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



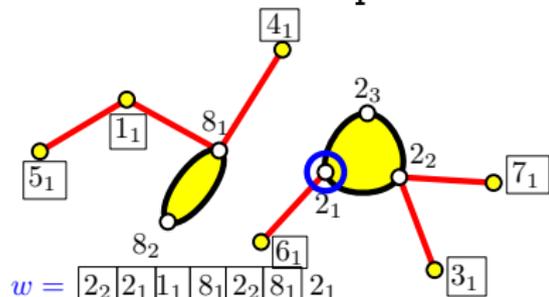
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



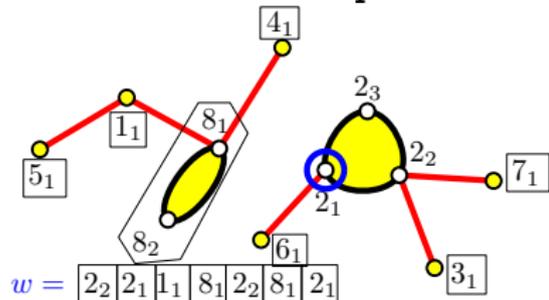
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



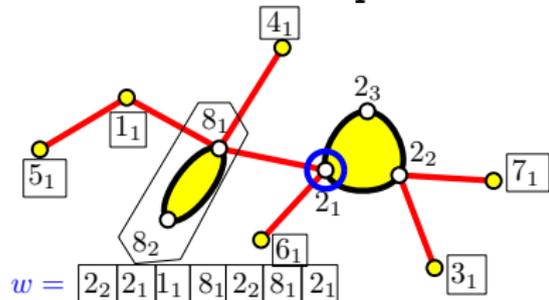
Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

PRÜFER POUR LES CACTUS POINTÉS

On commence par compter des cactus : le code de Prüfer s'étend aux cactus pointés dont les polygones sont étiquetés :



$A = \{1_1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1, 8_2\}$

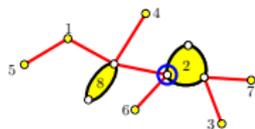
À chaque étape, enlever le polygone feuille non marqué de plus grande étiquette et son arête incidente, et noter l'étiquette du noeud auquel elle était attachée.

Pour revenir en arrière on utilise l'alphabet A pour reconstruire les polygones, puis on les raccroche en lisant le mot.

Étiqueter j_1, \dots, j_i les noeuds du polygone numéro j en sens anti-horaire en partant du plus proche du noeud marqué.

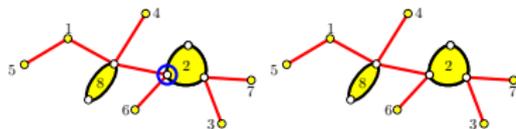
Corollaire

Le nombre des cactus pointés polygone-étiquetés de type λ avec n nodes et ℓ polygons est $n^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$.



Corollaire

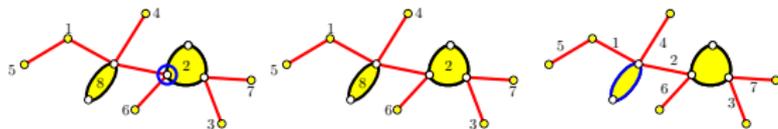
Le nombre des cactus pointés polygone-étiquetés de type λ avec n nodes et ℓ polygons est $n^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$.



Le nb de cactus polygone-étiquetés non pointés est $n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$

Corollaire

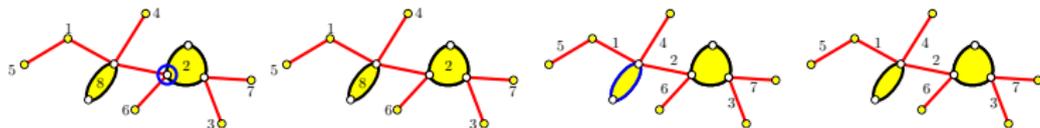
Le nombre des cactus pointés polygone-étiquetés de type λ avec n nodes et ℓ polygones est $n^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$.



Le nb de cactus polygone-étiquetés non pointés est $n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$
 = nb de cactus arête-étiquetés avec un polygone marqué
 (marquer le polygone de plus grande étiquette et transférer les étiquettes aux arêtes vers le polygone marqué).

Corollaire

Le nombre des cactus pointés polygone-étiquetés de type λ avec n nodes et ℓ polygones est $n^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$.



Le nb de cactus polygone-étiquetés non pointés est $n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$
 = nb de cactus arête-étiquetés avec un polygone marqué
 (marquer le polygone de plus grande étiquette et transférer les étiquettes aux arêtes vers le polygone marqué).

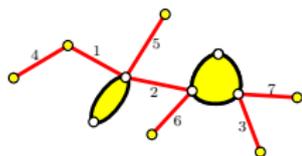
Corollaire

Le nombre des cactus arête-étiquetés de type λ avec n nodes et ℓ polygones est $\frac{1}{\ell} n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$.

COMPTAGE DES CACTUS D'HURWITZ

On part d'un cactus arêtes-étiqueté :

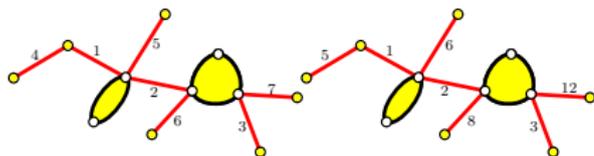
$$\frac{1}{\ell} n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n}$$



COMPTAGE DES CACTUS D'HURWITZ

On part d'un cactus arêtes-étiqueté :

$$\frac{1}{\ell} n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n} \binom{n + \ell - 1}{\ell - 1}$$

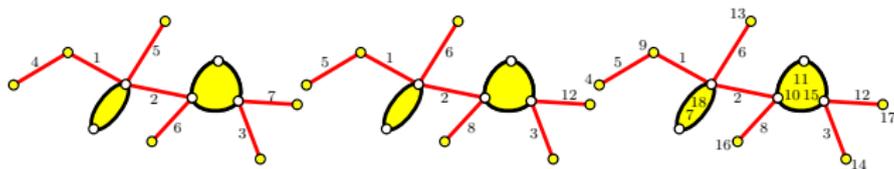


- On choisit un sous-ensemble $\{j_1 < \dots < j_{\ell-1}\}$ et on remplace chaque étiquette i par j_i .

COMPTAGE DES CACTUS D'HURWITZ

On part d'un cactus arêtes-étiqueté :

$$\frac{1}{\ell} n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n} \binom{n+\ell-1}{\ell-1} \frac{n!}{\prod_i (i!)^{\ell_i}}$$

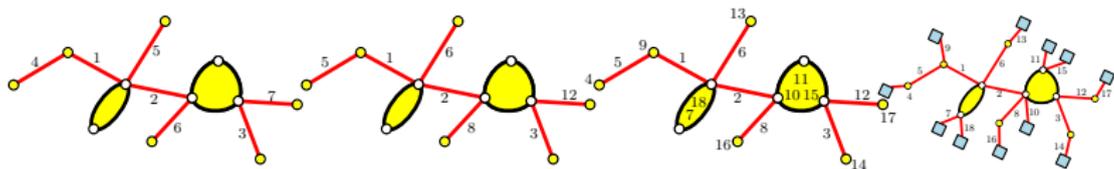


- On choisit un sous-ensemble $\{j_1 < \dots < j_{\ell-1}\}$ et on remplace chaque étiquette i par j_i .
- On distribue les autres étiquettes aux polygones, chaque i -gone reçoit i -étiquettes.

COMPTAGE DES CACTUS D'HURWITZ

On part d'un cactus arêtes-étiqueté :

$$\frac{1}{\ell} n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n} \binom{n+\ell-1}{\ell-1} \frac{n!}{\prod_i (i!)^{\ell_i}} \prod_i (i!)^{\ell_i}$$

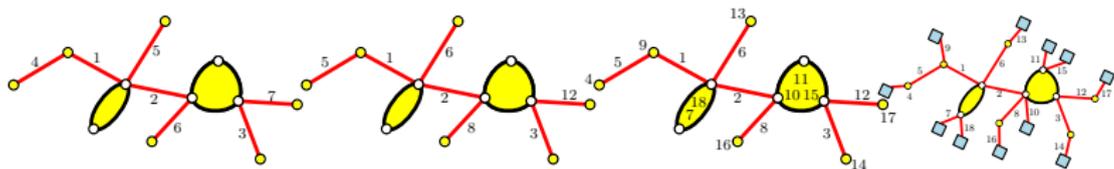


- On choisit un sous-ensemble $\{j_1 < \dots < j_{\ell-1}\}$ et on remplace chaque étiquette i par j_i .
- On distribue les autres étiquettes aux polygones, chaque i -gone reçoit i -étiquettes.
- On attache ces i étiquettes comme feuilles sur leur i -gone.

COMPTAGE DES CACTUS D'HURWITZ

On part d'un cactus arêtes-étiqueté :

$$\frac{1}{\ell} n^{\ell-2} \binom{\ell}{\ell_1, \dots, \ell_n} \binom{n+\ell-1}{\ell-1} \frac{n!}{\prod_i (i!)^{\ell_i}} \prod_i (i!)^{\ell_i} (n-1)!$$



- On choisit un sous-ensemble $\{j_1 < \dots < j_{\ell-1}\}$ et on remplace chaque étiquette i par j_i .
- On distribue les autres étiquettes aux polygones, chaque i -gone reçoit i -étiquettes.
- On attache ces i étiquettes comme feuilles sur leur i -gone.
- On met des indices aux n feuilles noires (en mettant n à la feuille qui aura distance 0).

COMPTAGE DES CACTUS D'HURWITZ

Théorème

Le nombre de mobiles d'Hurwitz de type λ est

$$n^{\ell-2} \cdot (n + \ell - 1)! \cdot (n - 1)! \cdot \prod_{i \geq 1} \frac{1}{\ell_i!} \left[\frac{i^i}{(i)!} \right]^{\ell_i}$$

Par ailleurs on a vu que

$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{factorisations minimales transitives en transpositions} \\ \text{des permutations de type } \lambda \end{array} \right\} \\ = \frac{1}{(m+1)} \# \{ \text{mobiles d'Hurwitz de type } \lambda \}$$

Corollaire (Hurwitz)

On retrouve le résultat d'Hurwitz.