Analyse Syntaxique et Compilation
TD Semaine du 9 au 13 Octobre

Automates avec sorties
Fonctions séquentielles

1. On considère la transformation suivante :

   l'alphabet d'entrée est $X = \{0, 1\}$, l'alphabet de sortie $Y = \{a, b, c\} = Y$.

   Un 0 est remplacé par b s'il est précédé de 1; il est remplacé par a sinon.

   Un 1 est remplacé par b s'il est précédé de 0; il est remplacé par c sinon.

   Pour $f \in X^*$ on note $\alpha(f)$ le mot ainsi défini.

   (a) Donner un automate avec sortie qui réalise cette transformation

   (b) Donner un automate déterministe (complet) qui reconnaît l'ensemble des mots g tels qu'il existe f satisfaisant $g = \alpha(f)$.

   (c) Donner un automate déterministe avec sortie qui réalise la transformation inverse de Y^* en X^*.

2. On utilise la representation suivante des nombres entiers sur un alphabet $\{0, 1, 2\}$

   - On écrit le nombre en binaire
   - On prend l'image miroir
   - On met un 2 à la fin du mot

   Par exemple, 0 s'écrit 02, 1 s'écrit 12 et 11 s'écrit 11012.

   Donner des automates avec sorties qui réalisent les transformations suivantes sur les entiers avec cette representation:

   (a) Multiplication par 2

   (b) Quotient entier par 2

   (c) Ajout de 1

   (d) Multiplication par 3

3. Pour deux mots f et g appartenant à A^*, on note $f \wedge g$ leur plus long facteur gauche commun. Ainsi
   $f = (f \wedge g)u_1$, $g = (f \wedge g)u_2$ et u_1, u_2 sont ou bien vides ou bien commencent par deux lettres différentes.
   On note $d(f, g) = |f| + |g| - 2|f \wedge g|$.

   (a) Montrer que $d(f, g) = |u_1| + |u_2|$

   (b) Montrez que $d(f, g) = 0 \iff f = g$
   et que $d(f, g) = d(g, f)$.

(c) Soit f, g, h trois mots de A^*. On suppose que $f \wedge g$ est facteur gauche de $g \wedge h$; montrez que

$$|f \wedge h| + |g \wedge h| \leq |h| + |f \wedge g|$$

En déduire que $d(f,g) \;\leq\; d(f,h) + d(g,h)$.

(d) Soit α une fonction séquentielle réalisée par $(A, B, \delta, \lambda, S, s_0)$ et soit $M = Max_{a \in A, s \in S}|\lambda(s,a)|$. Montrez que $d(\alpha(f), \alpha(g)) \;\leq\; Md(f,g)$

(e) **Application**
On considère l'application β de A^* dans $\{0,1\}^*$ définie par

$$\beta(f) \;=\; 0^{|f|} \; si \; |f| \; est \; pair$$

$$\beta(f) \;=\; 1^{|f|} \; si \; |f| \; est \; impair$$

Montrez que β n'est pas séquentielle.

(f) Soit α une fonction séquentielle avec marqueur réalisée par la fonction β de $(A \cup z)^*$ dans B^* donnée par $(A, B, \delta, \lambda, S, s_0)$. Soit $M = Max_{a \in A, s \in S}|\lambda(s,a)|$ et $N = Max_{s \in S}|\lambda(s,z)|$.
Montrez que

$$d(\alpha(f), \alpha(g)) \;\leq\; Md(f,g) + 2N$$

Déduire que l'application β de la question précédente n'est pas séquentielle avec marqueur.