N° d'ordre: 1416

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Par Olivier GUIBERT

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Combinatoire des permutations à motifs exclus en liaison avec mots, cartes planaires et tableaux de Young

---

Soutenue le : 15 Décembre 1995

Après avis de :	MM.	Dominique Gouyou-Beauchamps	Rapporteurs
		Renzo Pinzani	

Devant la Commission d'examen formée de :

MM.	Robert Cori	Professeur	Président
	Jean-Guy Penaud	Professeur	Rapporteur
	Serge Dulucq	Professeur	Examinateurs
	Dominique Gouyou-Beauchamps	Professeur	
	Renzo Pinzani	Professeur	
	Christophe Reutenauer	Professeur	
	Timothy Walsh	Professeur	

– 1995 –

A Florence.

J'exprime mon immense gratitude à Robert Cori dont les cours ont été à l'origine de l'intérêt que je porte à l'informatique théorique et à la combinatoire. Je lui en suis profondément reconnaissant et je le remercie de me faire l'honneur de présider ce jury.

Je suis très touché de l'attention portée par Dominique Gouyou-Beauchamps et Renzo Pinzani à ce mémoire en qualité de rapporteur. Je leur en suis extrêmement reconnaissant et je leur adresse mes plus vifs remerciements.

J'ai eu le plaisir de rencontrer Christophe Reutenauer et Timothy Walsh durant mon séjour à Montréal. Je suis très heureux de pouvoir les compter parmi les membres du jury.

Il m'est agréable de remercier Jean-Guy Penaud d'avoir su prolonger mon intérêt pour la combinatoire. Il me fait la gentillesse d'accepter de participer au jury.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Serge Dulucq qui a dirigé mon travail. Je lui sais tout particulièrement gré de sa confiance, son attention, sa disponibilité et de la liberté qu'il m'a accordée. Que ces quelques lignes expriment tout le respect que je lui porte.

Que soit ici remercié Xavier Viennot qui, par son enthousiasme, rend communicative sa passion pour la combinatoire bijective. Mes remerciements s'adressent également aux autres membres des équipes combinatoires énumérative et algorithmique du LaBRI, pour leur soutien et leurs conseils renouvelés.

Je remercie Pierre Leroux qui m'a chaleureusement accueilli au LaCIM, quatre mois durant, dans le cadre de la coopération franco-québécoise. Mes remerciements vont aussi aux autres membres de ce laboratoire, et tout particulièrement à Srećko Brlek qui aura été bien plus que mon responsable durant cette période, me faisant notamment connaître la patinoire de Saint-Jean de Matha.

Un très grand merci à Sophie Gire ; elle sait toute l'amitié que j'ai pour elle.

A ces remerciements, j'associe les doctorants qui m'ont accompagné durant la préparation de cette thèse.

Table des Matières

Introduction

Le travail que nous présentons ici a pour thème la Combinatoire des permutations, et porte plus particulièrement sur l'énumération de permutations à motifs exclus, c'est à dire de permutations pour lesquelles certaines sous-suites (sous-mots) d'un type donné sont interdites.

Un ensemble particulier de permutations à motifs exclus, les permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile, nous amène à résoudre plusieurs conjectures portant sur l'énumération de certaines classes de mots et de tableaux de Young standard.

La plupart des résultats sont obtenus en mettant en correspondance les ensembles considérés avec des objets classiques en Combinatoire, notamment certaines familles de cartes planaires.

Avant-propos

L'un des centres d'intérêt important en Combinatoire des mots [71] est constitué par la recherche et l'analyse de régularités dans les mots, et de façon duale la recherche de mots ne comportant pas certaines régularités.
Ces propriétés de régularités, à rechercher ou à éviter, s'expriment souvent en terme de facteurs ou de sous-mots.

Ainsi, A. Thue [100, 101, 71, 8] a été le premier à chercher à mettre en évidence des mots ne comportant pas certaines régularités, et ce plus particulièrement les mots sans facteur chevauchant et les mots sans carré. Par exemple, le mot de Thue-Morse *abbabaabbaababba*..., qui ne comporte pas de facteurs se chevauchant (et est donc sans cube), permet d'obtenir un mot sans carré sur un alphabet à trois lettres.
D'autre part, la présence de sous-mots particuliers dans un mot est lié au principe de régularité illustré par le théorème de B.L. Van der Waerden [106]. Tout mot suffisamment long sur un alphabet fini contient une même lettre à des positions satisfaisant une progression arithmétique. Ce résultat, depuis sa démonstration, a suscité de nombreux travaux dans divers domaines [71].

L'intérêt porté aux sous-mots s'est également manifesté dans diverses directions, comme l'atteste le chapitre 6 de M. Lothaire [71]. Par exemple, dans l'ensemble partiellement ordonné construit en considérant la relation d'ordre partiel “être sous-mot de”, tout ensemble de mots deux à deux incomparables sur un alphabet fini est lui-même fini. Toutefois, il existe de tels ensembles de mots deux à deux incomparables arbitrairement grands. Ce résultat, dû à G. Higman

[58], a été maintes fois redécouvert.

Ainsi, de nombreux travaux se situant dans divers domaines ont porté sur les mots comportant ou excluant des facteurs ou des sous-mots particuliers.

Ceux que nous présentons ici ont pour cadre les permutations à motifs exclus, c'est à dire les permutations ne comportant pas certaines sous-suites d'un type donné. Par exemple, les permutations n'admettant pas de sous-suite croissante de longueur supérieure à k sont les permutations excluant le motif identité $12\ldots(k+1)$ en correspondance avec les paires de tableaux de Young standard de même forme et dont la plus grande part de la partition est au plus égale à k.

La plupart des travaux sur le sujet ont eu pour objectif d'énumérer des ensembles spécifiques de permutations à motifs exclus. Certains travaux ont toutefois permis d'obtenir des résultats plus généraux, comme par exemple ceux d'A. Regev [79] qui a donné une expression pour le comportement asymptotique du nombre de permutations ne comportant pas de motif $12\ldots k$, et de P. Erdös et G. Szekeres [34] qui ont montré qu'aucune permutation d'ordre supérieur à $l.m$ ne peut exclure simultanément les motifs $12\ldots(l+1)$ et $(m+1)m\ldots 1$. Il est à noter que ce dernier résultat, antérieur à la correspondance de Robinson-Schensted [83, 89], en est une conséquence immédiate.

Les autres travaux portent pour la plupart sur l'énumération des permutations ne comportant pas un ou plusieurs motifs de forme donnée. Citons dans ce cadre les travaux de R. Simion et F.W. Schmidt [95] où les motifs interdits correspondent à des permutations de S_3 (permutations ayant 3 éléments) et ceux de J. West [114] où les deux motifs exclus appartiennent à S_3 et S_4.

D'autres auteurs ont pour leur part étudié certains ensembles de permutations qui peuvent être caractérisées en terme de permutations à motifs exclus.
Par exemple, les permutations vexillaires considérées par A. Lascoux et M.P. Schützenberger [69] sont les permutations ne comportant pas de motif de type 2143, c'est à dire de sous-suite $jilk$ avec $i < j < k < l$. Rappelons qu'une permutation est vexillaire si et seulement si les partitions correspondant aux tables d'inversion (ou codes de Lehmer) de cette permutation et de son inverse sont conjuguées. Notons qu'une formule d'énumération existe pour ces permutations et résulte d'un article d'I.M. Gessel [42] et d'un travail de J. West [110] consacré aux permutations à motifs exclus qui montre que les permutations ne comportant pas le motif 2143 et celles interdisant le motif 1234 sont en bijection.
De même, S. Gire [45] a caractérisé les permutations de Baxter [4] comme étant celles excluant simultanément les motifs $25\overline{3}14$ (c'est à dire les sous-suites de type 2413 ne faisant pas elles-mêmes partie de sous-suites de type 25314) et $41\overline{3}52$. Les permutations de Baxter ont fait l'objet de plusieurs travaux [15, 74, 108, 30] ayant pour but d'établir une formule d'énumération tenant compte de différentes distributions de ces permutations.

Ce sont également les permutations de Baxter, mais alternantes cette fois-ci, qui interviennent dans un article de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18] mettant en correspondance les mélanges

de deux mots de systèmes de parenthèses bien formés et les couples de tels mots de parenthèses. En fait, il n'existe que peu de résultats concernant l'énumération des permutations alternantes à motifs exclus, et il en est de même pour le dénombrement des involutions à motifs exclus.
Cependant, les involutions ne comportant pas le motif $12\ldots(k+1)$ sont en correspondance, par l'algorithme de Robinson-Schensted [83, 89], et d'après un résultat de M.P. Schützenberger [92], avec les tableaux de Young standard de hauteur au plus k. Parmi les travaux ayant porté sur l'énumération de ces tableaux, citons ceux d'A. Regev [79] qui donne le comportement asymptotique du nombre de tels tableaux de hauteur au plus k, ainsi qu'une formule exacte très classique en Combinatoire (nombres de Motzkin) pour ceux de hauteur au plus 3. Pour sa part, D. Gouyou-Beauchamps [49] a obtenu combinatoirement des formules remarquables (notamment le produit de deux nombres de Catalan) pour de tels tableaux de hauteur au plus 4 et 5.

De nombreuses suites de nombres, très classiques en Combinatoire, apparaissent dans des problèmes d'énumération de permutations à motifs exclus. C'est le cas des nombres de Pell, des coefficients binomiaux centraux, des nombres de Motzkin ou encore des nombres de Schröder qui sont obtenus par l'interdiction de motifs particuliers. Certains de ces résultats ont été obtenus par J. West [110, 112] ou par S. Gire [45]. De même, suite aux travaux de D.E. Knuth [62], les permutations excluant un motif quelconque correspondant à une permutation de S_3 sont énumérées par les nombres de Catalan. En effet, D.E. Knuth s'est intéressé aux permutations triables par passage dans une pile et a montré qu'elles correspondent exactement aux permutations ne comportant pas de sous-suite de type 231. Du fait de leur nombre, ces permutations sont parfois appelées permutations de Catalan.
En considérant l'une des généralisations possibles de ce problème de tri, J. West [110, 113] a montré que les permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile sont exactement les permutations ne comportant pas de motif 2341 et $3\bar{5}241$. Il conjecturait également une remarquable formule pour l'énumération de ces permutations, conjecture démontrée par D. Zeilberger [119]. Par la suite, S. Dulucq, S. Gire et J. West [28] et S. Dulucq, S. Gire et O. Guibert [27] ont mis en correspondance permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile, permutations non séparables (excluant simultanément les motifs 2413 et $41\bar{3}52$) et cartes planaires pointées non séparables, ces cartes ayant été énumérées par W.T. Tutte [105] et leur nombre correspondant exactement à la formule conjecturée par J. West.

L'intérêt porté aux cartes planaires remonte au célèbre problème des quatre couleurs et les travaux de W.T. Tutte [102, 103, 104, 105] sur l'énumération des cartes planaires avaient pour objectif de déterminer le nombre de cartes planaires 4-coloriables et de le comparer au nombre de cartes planaires. Ces travaux ont eu ensuite de nombreux développements, notamment sous l'impulsion de R. Cori [16], de R. Cori et J. Richard [19] et de D. Arquès [1].
Or, les connexions entre cartes planaires et permutations à motifs exclus ne se limitent pas uniquement aux cartes planaires pointées non séparables et permutations non séparables. Ainsi, comme nous le montrons dans ces travaux, les permutations non séparables alternantes sont en

bijection avec les cartes planaires cubiques pointées non séparables dénombrées par W.T. Tutte [103]. D'autre part, la correspondance de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18] entre mots du mélange de deux mots de parenthèses et couples de mots de parenthèses, qui fait intervenir les permutations de Baxter alternantes (et donc des permutations à motifs exclus), résout un problème posé par R.C. Mullin [76] sur les cartes planaires. En effet, les mots du mélange de deux mots de parenthèses codent les cartes planaires pointées cubiques hamiltoniennes tandis que les couples de mots de parenthèses sont en bijection avec les cartes planaires pointées triangulaires hamiltoniennes.

Présentation générale de nos travaux

En Combinatoire, plusieurs approches ou méthodes sont possibles pour énumérer une famille d'objets combinatoires, et leur emploi dépend du contexte du problème.
Parmi les plus classiques, citons la méthodologie due à M.P. Schützenberger [91, 93], qui a montré l'existence d'une étroite relation entre problèmes d'énumération en Combinatoire et classification de langages en théorie des langages. Cette méthode permet d'obtenir une équation algébrique dont est solution la série génératrice des objets considérés et la formule de Lagrange permet d'obtenir une expression pour le nombre d'objets de taille n. Quand cette méthode ne s'applique pas, le recours aux équations avec opérateurs [16, 19] permet dans certains cas d'aboutir au résultat.
D'autres approches sont possibles, comme la théorie des espèces de structures dont A. Joyal [60] a montré l'efficacité pour le traitement combinatoire des séries formelles. Le livre de F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux [7] expose cette méthodologie dans ses moindres détails.
Une autre méthode consiste à trouver une bijection entre les objets considérés et une autre famille d'objets pour laquelle des résultats d'énumération sont connus ou plus simples à établir.
A propos de la formule des équerres dénombrant les tableaux de Young standard d'une forme donnée, D.E. Knuth [63] estime que toute formule simple devrait avoir une explication naturelle. Depuis, de nombreux travaux ont tenté d'obtenir une telle explication pour cette formule des équerres, usant notamment de preuves probabilistique [52] et combinatoires [80, 40, 117, 78, 64].

Dans les travaux que nous présentons ici, nous aurons recours à ces méthodes bijectives, et à l'utilisation de la méthode des arbres de génération utilisée pour la première fois de manière explicite par F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15] dans leurs travaux sur l'énumération des permutations de Baxter [4].
Cette méthode consiste à considérer un arbre de génération des objets étudiés, obtenu par certaines règles de croissance de ces objets, et à caractériser cet arbre par un système de réécriture où chaque règle de réécriture décrit une règle de croissance. Des équations de récurrence peuvent alors être déduites de ce système de réécriture et permettre, dans certains cas, d'obtenir une formule d'énumération pour les objets étudiés. Notons que lorsque deux familles d'objets

combinatoires ont des arbres de génération caractérisés par le même système de réécriture, ces deux arbres sont isomorphes et cela induit une bijection entre ces objets.
F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15] se sont étonné que, jusqu'alors, personne n'ait utilisé cette méthode des arbres de génération. Depuis, et plus particulièrement suite à la thèse de J. West [110], cette approche a inspiré de nombreux travaux portant principalement sur l'énumération de permutations à motifs exclus [53, 45, 28, 27, 97, 114, 112].
Notons également qu'E. Barcucci, A. Del Lungo, E. Pergola et R. Pinzani [3] ont utilisé une démarche similaire pour obtenir de nouvelles équations fonctionnelles dont sont solutions les séries génératrices de plusieurs objets classiques en combinatoires tels certaines classes d'arbres.

Afin de faciliter nos recherches sur le dénombrement de permutations à motifs exclus, nous avons développé un logiciel, dénommé *forbid*, qui met en œuvre cette méthode des arbres de génération dans le cas des permutations, des permutations alternantes et des involutions à motifs exclus. De plus, ce logiciel donne la distribution de ces objets suivant la plupart des paramètres classiques sur les permutations.

C'est notamment grâce au logiciel *forbid* et à cette méthode des arbres de génération que nous avons pu caractériser les arbres de génération des permutations et involutions excluant le motif identité.
Cela nous a également permis de prouver combinatoirement que plusieurs ensembles de permutations à motifs exclus sont énumérés par des formules classiques en Combinatoire. Par exemple, certains sont énumérés par les nombres de Pell tandis que d'autres sont dénombrés par les coefficients binomiaux centraux. De même, nous avons montré que des ensembles de permutations à motifs exclus sont en bijection avec les arbres 1-2, prolongeant ainsi les travaux de S. Gire [45] sur de tels ensembles énumérés par les nombres de Motzkin, et ceux de J. West [110, 112] et de S. Gire [45] sur ceux énumérés par les nombres de Schröder. Ensuite, nous avons mis en bijection plusieurs objets combinatoires avec les permutations de Baxter et un autre ensemble de permutations à motifs exclus.

Nous avons prolongé ce premier travail sur les permutations de Baxter et avons mis en évidence une nouvelle correspondance (voir également S. Dulucq et O. Guibert [30]) entre ces permutations et certains triplets de chemins deux à deux disjoints. Cette correspondance unifie les preuves combinatoires pour l'énumération des permutations de Baxter de X. Viennot [108] et des permutations de Baxter alternantes de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18]. De plus, elle nous permet d'affiner plusieurs formules d'énumération connues. Ainsi, nous donnons notamment une interprétation combinatoire d'une formule due à C.L. Mallows [74] qui elle-même précise celle de F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15].

A mi-chemin entre les permutations de Baxter qui excluent les motifs $25\bar{3}14$ et $41\bar{3}52$ et les permutations excluant les motifs 2413 et 3142 (énumérées par les nombres de Schröder [112]) se trouvent les permutations non séparables ne comportant pas les motifs 2413 et $41\bar{3}52$. En effet, les motifs 2413 et 3142 s'obtiennent à partir des motifs respectivement $25\bar{3}14$ et $41\bar{3}52$ en

supprimant l'élément barré.
S. Dulucq, S. Gire et J. West [28] ont montré que ces permutations non séparables sont directement en bijection avec les cartes planaires pointées non séparables par isomorphisme de leurs arbres de génération. Nous avons montré (voir également S. Gire [45] et S. Dulucq, S. Gire et O. Guibert [27]) que ces permutations sont également en bijection avec les permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile. La réunion de ces travaux [28, 27] constitue donc une preuve de la conjecture de J. West [110, 113] sur l'énumération de ces permutations.

D.E. Knuth s'est intéressé à plusieurs algorithmes de tri et, en particulier, a considéré les permutations triables par passage dans une pile, montrant qu'il s'agissait des permutations ne comportant pas le motif 231. Dans cet algorithme, la pile ne peut contenir à tout instant que des entiers allant en croissant à partir du sommet ; ainsi, dans un certain sens, la pile vérifie une condition dite de type "tour de Hanoï" par référence au problème du même nom. La généralisation de ce problème considérée par J. West [110, 113] consiste à imposer cette contrainte sur les piles à chaque passage des éléments de la permutation.

Pour sa part, S. Gire [45] s'est intéressée, non plus aux seules permutations, mais également aux mouvements de deux piles placées en série lorsqu'elles sont traversées par la permutation identité. Le langage obtenu est le langage de Yamanushi codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3.
Elle a conjecturé des formules d'énumération pour trois langages (l'un d'entre-eux prenant en compte la contrainte "tour de Hanoï") correspondant à des restrictions sur ces tableaux, notant que ces formules dénombraient également les permutations de Baxter alternantes, les permutations de Baxter et les cartes planaires cubiques pointées non séparables, cartes énumérées par W.T. Tutte [103]. Nous avons prouvé combinatoirement ces conjectures (voir également S. Dulucq et O. Guibert [29] pour deux d'entre-elles). Nous remarquons ainsi de nouveau les liens étroits existant entre permutations de Baxter (alternantes ou non) et permutations non séparables (alternantes ou non) : les permutations non séparables alternantes sont en bijection avec les cartes planaires cubiques pointées non séparables et un quatrième langage se dégageant naturellement des trois considérés par S. Gire est directement en correspondance avec les permutations non séparables. Il est intéressant de constater que les permutations non séparables, apparues pour résoudre le problème des permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile, interviennent de nouveau dans ce travail sur les mots de piles.

Il est également surprenant d'observer qu'une même formule dénombre les permutations de Baxter alternantes étudiées par R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18] et les involutions excluant le motif 54321 considérées par D. Gouyou-Beauchamps [49]. Toutefois, les preuves combinatoires apportées par ces auteurs sont différentes et ne permettent pas de mettre directement en bijection ces ensembles de permutations alternantes et d'involutions à motifs exclus. C'est l'une des raisons qui a motivé l'intégration du traitement des permutations alternantes et involutions à motifs exclus au logiciel *forbid*.

Plan détaillé de la thèse

Cette thèse s'articule en deux parties. La première partie, constituée des chapitres 1 à 3, expose les objets, résultats classiques, méthodes et outils utilisés. La seconde partie, allant des chapitres 4 à 7, détaille les résultats que nous avons obtenus. L'annexe A constitue un catalogue des résultats que nous connaissons à ce jour sur les permutations à motifs exclus.

Le premier chapitre présente les objets étudiés dans cette thèse.
Il s'agit des permutations, et plus particulièrement des permutations à motifs exclus, permutations pour lesquelles certaines sous-suites sont interdites. Quelques bijections classiques et résultats généraux complètent cette présentation.
Nous consacrons la fin de ce chapitre à des rappels de bijections classiques mettant en correspondance des objets fréquemment étudiés en Combinatoire. Dans le même temps, nous donnons des formules les dénombrant. Nous rencontrerons par la suite ces objets que nous mettrons alors en bijection avec certaines de permutations à motifs exclus.

Le deuxième chapitre expose la méthode des arbres de génération d'objets combinatoires.
Il s'agit de construire un arbre infini dont les sommets sont les objets de l'ensemble étudié de telle manière qu'il contienne au niveau n tous les objets de taille n, chacun apparaissant une fois et une seule. Chaque objet est ensuite remplacé dans l'arbre par une étiquette qui le caractérise, de sorte que l'arbre ainsi étiqueté correspond à l'arbre de dérivation d'un système de réécriture. Ainsi, la donnée d'une part d'un axiome correspondant à l'étiquette de la racine et d'autre part d'un ensemble de règles de réécriture précisant les étiquettes de tous les fils d'un sommet d'une étiquette donnée, permet de caractériser l'arbre de génération des objets considérés.
Cette méthode présente plusieurs intérêts. Tout d'abord, lorsque les arbres de génération de deux ensembles d'objets combinatoires se caractérisent par le même système de réécriture, ils sont isomorphes et induisent ainsi une bijection entre les deux ensembles considérés. Ensuite, il est possible, à partir d'un système de réécriture quelconque, d'obtenir des récurrences permettant d'énumérer l'ensemble d'objets combinatoires étudié. Ce sont les deux principales applications de cette méthode, même si d'autres utilisations s'avèrent possibles, comme la génération aléatoire par exemple.

La méthode des arbres de génération peut bien évidemment s'appliquer aux permutations à motifs exclus et être programmée. C'est ce qu'illustre le troisième chapitre.
L'arbre de génération des permutations s'obtient en insérant l'élément $n+1$ dans une permutation d'ordre n. Nous privilégions cette façon de faire croître les permutations, même s'il existe d'autres possibilités [45, 97] qui conduisent à des arbres de génération des permutations éventuellement différents. Par contre, nous considérons d'autres familles de permutations, les involutions et les permutations alternantes. Ainsi, nous obtenons deux arbres de génération des involutions, c'est à dire deux façons de faire croître les involutions, et un arbre de génération des permutations alternantes.
Nous avons développé le logiciel *forbid* qui permet de construire les arbres de génération de l'une

quelconque des familles de permutations, pour un ou plusieurs motifs exclus choisi par l'utilisateur. *forbid* fournit alors des informations sur l'arbre de génération, sur l'ensemble étudié, et des distributions de cet ensemble selon des paramètres classiques sur les permutations.

En utilisant la méthode des arbres de génération, et avec l'aide du logiciel *forbid*, nous avons montré que plusieurs ensembles de permutations à motifs exclus sont énumérés par des suites classiques en Combinatoire. Ces résultats figurent dans le quatrième chapitre.
Tout d'abord, nous obtenons que les arbres de génération de trois ensembles de permutations à motifs exclus, énumérés par les nombres de Pell, se caractérisent tous par le même système de réécriture.
Ensuite, nous mettons onze ensembles de permutations à motifs exclus en bijection avec les mots du Grand Dyck dénombrés par les coefficients binomiaux centraux, quatre systèmes de réécriture différents étant nécessaires pour établir cette bijection. De plus, nous obtenons un autre ensemble de permutations à motifs exclus ayant même formule d'énumération.
S. Gire [45] a exhibé un système de réécriture caractérisant les arbres de génération des arbres 1-2 (suivant le nombre d'arêtes) et d'un ensemble de permutations à motifs exclus, objets énumérés par les nombres de Motzkin. Nous montrons que ce système de réécriture caractérise également les arbres de génération des buissons, d'un autre ensemble de permutations à motifs exclus et de deux ensembles d'involutions à motifs exclus.
J. West [110, 112] a caractérisé le système de réécriture de l'arbre de génération d'un ensemble de permutations à motifs exclus énuméré par les nombres de Schröder et S. Gire [45] a montré que ce système de réécriture caractérise les arbres de génération d'un autre ensemble de permutations à motifs exclus et des arbres 1-2 (suivant le nombre de sommets internes). Nous prouvons que le même système de réécriture caractérise les arbres de génération de huit autres ensembles de permutations à motifs exclus.
Enfin, nous caractérisons les systèmes de réécriture des tableaux et paires de tableaux de Young standard de hauteur bornée, c'est à dire des involutions et permutations excluant le motif identité.

Le cinquième chapitre prouve combinatoirement une conjecture de J. West [110, 113].
La conjecture de J. West consistait à relier combinatoirement les permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile et les cartes planaires pointées non séparables. S. Dulucq, S. Gire et J. West [28] ont établi une partie de cette conjecture en mettant en correspondance permutations non séparables et cartes planaires pointées non séparables. Notre travail, également présenté dans la thèse de S. Gire [45] et dans l'article de S. Dulucq, S. Gire et O. Guibert [27], consiste en une bijection entre permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile et permutations non séparables, et utilise de nouveau la méthode des arbres de génération des permutations.
Après avoir rappelé le résultat général, nous détaillons l'une des quatre correspondances de la bijection, c'est à dire l'un des quatre systèmes de réécriture et les deux arbres de génération des

permutations ainsi caractérisés. Ensuite, nous montrons qu'un autre ensemble de permutations à motifs exclus se relie combinatoirement à la bijection.

Le sixième chapitre est entièrement consacré aux permutations de Baxter [4].
S. Gire [45] a caractérisé le système de réécriture de l'arbre de génération des permutations de Baxter. Nous montrons dans un premier temps que ce système de réécriture caractérise également les arbres de génération d'autres objets combinatoires.
Ensuite, nous établissons une bijection entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints, différente de celle de X. Viennot [108]. Nous obtenons combinatoirement une nouvelle formule dénombrant les permutations de Baxter qui généralise celles de F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15] et de C.L. Mallows [74]. De plus, cette bijection traduit naturellement la propriété d'alternance, nous permettant de retrouver et d'affiner le résultat de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18] sur l'énumération des permutations de Baxter alternantes.

Le septième chapitre résout trois conjectures de S. Gire [45].
S. Gire a considéré trois restrictions différentes de l'ensemble des mots de piles, conjecturant les formules d'énumération des trois langages ainsi obtenus. Nous établissons tout d'abord une bijection entre le premier de ces langages et l'ensemble des permutations de Baxter alternantes, permutations dénombrées combinatoirement par R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18]. Or, les deux derniers langages étudiés par S. Gire sont tous deux des restrictions différentes du premier. En considérant ces deux restrictions dans la bijection obtenue pour le premier langage, nous avons caractérisé les deux ensembles de permutations résultants : il s'agit des permutations de Baxter et des permutations non séparables alternantes. Nous mettons alors en bijection ces permutations non séparables alternantes et les cartes planaires cubiques pointées non séparables, cartes dénombrées par W.T. Tutte [103]. De plus, nous établissons une bijection entre permutations non séparables et mots appartenant à l'intersection des deuxième et troisième langages considérés par S. Gire. Enfin, nous nous sommes intéressés à d'autres restrictions naturelles de l'ensemble des mots de piles et avons ainsi obtenu plusieurs autres résultats d'énumération.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions classiques sur les permutations et les permutations à motifs exclus, et présentons quelques objets combinatoires classiques.

1.1 Permutations

Une *permutation* $\pi = \pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$ sur $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, notée sous forme de mot, est une bijection de $[n]$ dans $[n]$.
S_n désigne l'ensemble des $n!$ permutations sur $[n]$.

Définition 1.1 *Pour toute permutation π de S_n, nous notons*

- π^* *la permutation* miroir *de π définie par $\pi^*(i) = \pi(n+1-i)$ pour tout $i \in [n]$*
- π^c *la permutation* complémentaire *de π définie par $\pi^c(i) = n+1-\pi(i)$ pour tout $i \in [n]$*
- π^{-1} *la permutation* inverse *de π vérifiant $\pi^{-1}(i) = j \iff \pi(j) = i$ pour tout $i, j \in [n]$*

Sur l'ensemble des permutations de S_n, nous serons amenés à nous intéresser aux paramètres suivants.

Définition 1.2 *Etant donnée une permutation π de S_n, nous appelons*

- descente *un indice $i \in [n-1]$ tel que $\pi(i) > \pi(i+1)$;*
  le nombre de descentes de π est noté $desc(\pi)$
- montée *un indice $i \in [n-1]$ tel que $\pi(i) < \pi(i+1)$;*
  le nombre de montées de π est noté $mont(\pi)$
- descente inverse *un indice $i \in [n-1]$ tel que $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1)$;*
  le nombre de descentes inverses de π est noté $descinv(\pi)$

- montée inverse *un indice* $i \in [n-1]$ *tel que* $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i+1)$ *;* *le nombre de montées inverses de* π *est noté* $montinv(\pi)$
- maximum à gauche *un élément* $\pi(i)$ *tel que* $\pi(i) > \pi(j)$ *pour tout* $1 \leq j < i$ *;* *le nombre de maxima à gauche de* π *est noté* $maxg(\pi)$
- maximum à droite *un élément* $\pi(i)$ *tel que* $\pi(i) > \pi(j)$ *pour tout* $i < j \leq n$ *;* *le nombre de maxima à droite de* π *est noté* $maxd(\pi)$
- minimum à gauche *un élément* $\pi(i)$ *tel que* $\pi(i) < \pi(j)$ *pour tout* $1 \leq j < i$ *;* *le nombre de minima à gauche de* π *est noté* $ming(\pi)$
- minimum à droite *un élément* $\pi(i)$ *tel que* $\pi(i) < \pi(j)$ *pour tout* $i < j \leq n$ *;* *le nombre de minima à droite de* π *est noté* $mind(\pi)$

Exemple 1.3 *La permutation* 761254893 *possède* 4 *descentes (indices* 1,2,5,8*),* 4 *montées (indices* 3,4,6,7*),* 4 *descentes inverses (indices* 3,4,5,6*),* 4 *montées inverses (indices* 1,2,7,8*),* 3 *maxima à gauche (éléments* 7,8,9*),* 2 *maxima à droite (éléments* 3,9*),* 3 *minima à gauche (éléments* 7,6,1*),* 3 *minima à droite (éléments* 3,2,1*).*

Propriété 1.4 *Pour toute permutation* π *de* S_n*, nous avons* $desc(\pi) + mont(\pi) = n - 1$ *et les relations décrites par la figure 1.1.*

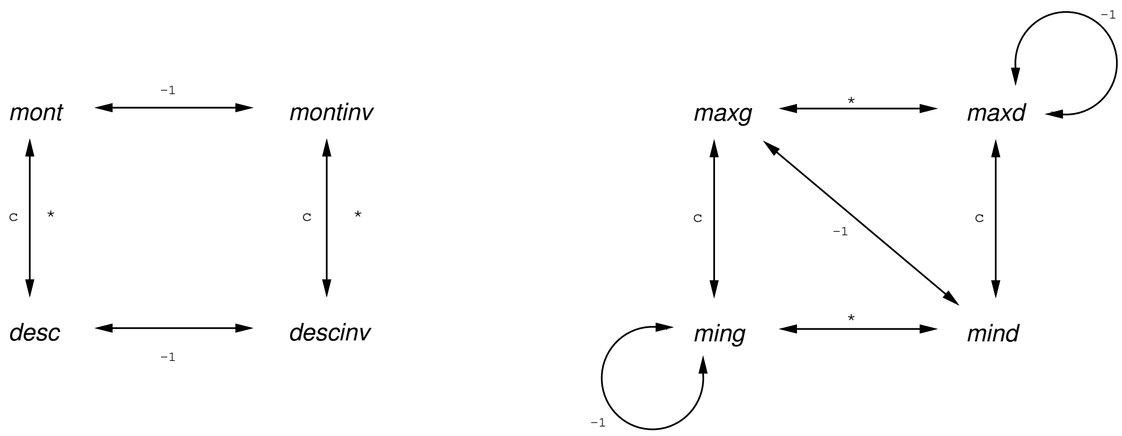


Figure 1.1 Effet des trois bijections classiques sur les paramètres montées/descentes et les minima/maxima.

Nous désignons par I_n l'ensemble des *involutions* sur $[n]$, c'est à dire les permutations π de S_n vérifiant $\pi = \pi^{-1}$. Un élément i d'une involution π est un *point fixe* si et seulement si $\pi(i) = i$.

Exemple 1.5 *La permutation* 62583174 *est une involution de* I_8 *ayant* 2 *points fixes (éléments* 2,7*).*

Nous désignons par $\widehat{S}_n$ l'ensemble des *permutations alternantes* sur $[n]$, c'est à dire les permutations π de S_n vérifiant $\pi(2i-1) < \pi(2i) > \pi(2i+1)$ pour tout $i \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$.

Exemple 1.6 *La permutation* 381429675 *est une permutation alternante de* $\widehat{S}_9$.

Plusieurs bijections classiques relient les permutations à d'autres objets combinatoires. Nous en citons deux (voir figure 1.2) que nous utiliserons par la suite.

- La correspondance de Robinson-Schensted [83, 89], dont X. Viennot [107] a donné une interprétation géométrique, met en bijection les permutations et les paires de tableaux de Young standard de même forme.
- La construction suivante (voir notamment [98]) permet d'obtenir un arbre binaire (complet) croissant à partir d'une permutation (alternante) donnée.

  $$abc(u) = \lhd\, abc(v), x, abc(w) \rhd \text{ où } u = vxw, x = \min\{u_i : u = u_1u_2\dots u_p\}$$

  Cette construction est bijective; il suffit de lire la projection en ordre infixe de l'étiquetage des sommets de l'arbre binaire croissant pour obtenir la permutation.

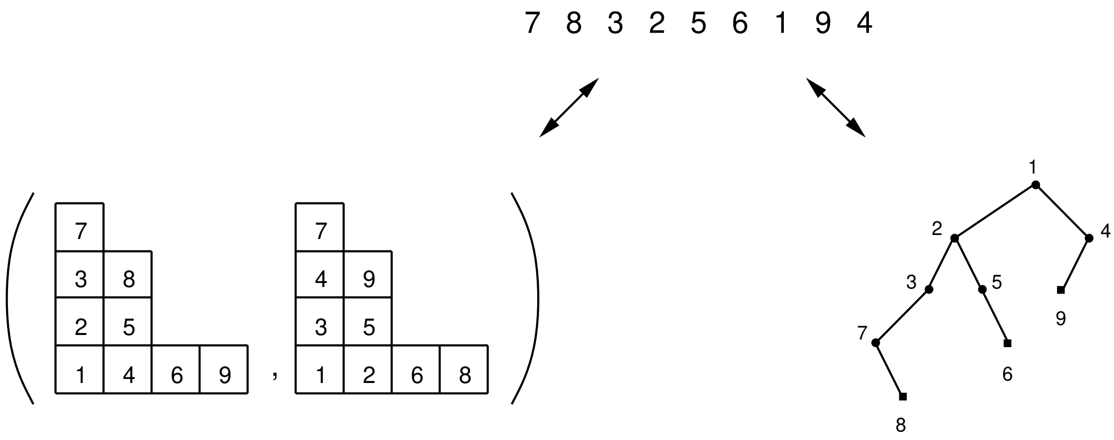


Figure 1.2 Permutation en bijection avec une paire de tableaux de Young standard et un arbre binaire croissant.

1.2 Permutations à motifs exclus

Nous allons maintenant introduire les *permutations à motifs exclus*, c'est à dire les permutations pour lesquelles certaines sous-suites (sous-mots) sont interdites.

Définition 1.7 *Une permutation* π *de* S_n *contient une* sous-suite *de* type τ *appartenant à* S_k *si et seulement s'il existe une suite d'indices* $1 \leq i_{\tau(1)} < i_{\tau(2)} < \cdots < i_{\tau(k)} \leq n$ *tels que* $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \cdots < \pi(i_k)$.

Nous notons $S_n(\tau)$ *l'ensemble des permutations de* S_n *qui ne contiennent pas de sous-suite de type* τ.

Exemple 1.8 *La permutation* 761254893 *appartient à* $S_9(2413)$ *car aucune de ses sous-suites de longueur* 4 *n'est de type* 2413*, mais n'appartient pas à* $S_9(3142)$ *notamment car la sous-suite* $\pi(2)\pi(4)\pi(7)\pi(9) = 6283$ *est de type* 3142.

Définition 1.9 *Une* permutation barrée $\overline{\tau}$ *sur* $[k]$ *est une permutation de* S_k *ayant un élément distingué (nous parlons de permutations p-barrées lorsque p éléments sont distingués).*
Nous notons τ *la permutation sur* $[k]$ *identique à* $\overline{\tau}$ *mais sans distinction d'élément, et* $\widetilde{\tau}$ *la permutation sur* $[k-1]$ *correspondant au type de la sous-suite composée des éléments non distingués de* $\overline{\tau}$.
Une permutation π *de* S_n *contient une sous-suite de type* $\overline{\tau}$ *si et seulement si* π *contient une sous-suite de type* $\widetilde{\tau}$ *qui ne fait pas elle-même partie d'une sous-suite de type* τ.

Nous notons $S_n(\overline{\tau})$ *l'ensemble des permutations de* S_n *qui ne contiennent pas de sous-suite de type* $\overline{\tau}$.

Exemple 1.10 *La permutation* $\pi = 761254893$ *appartient à* $S_9(41\overline{3}52)$ *car toutes les sous-suites de type* 3142 *font partie de sous-suites de type* 41352*. Par exemple, la sous-suite* $\pi(2)\pi(4)\pi(8)\pi(9) = 6293$ *de type* 3142 *fait partie de la sous-suite* $\pi(2)\pi(4)\pi(6)\pi(8)\pi(9) = 62493$ *de type* 41352.
Par contre, π *n'appartient pas à* $S_9(21\overline{3}4)$ *notamment car la sous-suite* $\pi(2)\pi(4)\pi(7) = 628$ *de type* 213 *ne fait pas partie d'une sous-suite de type* 2134.

Par la suite, nous emploierons le terme *motif* pour désigner une permutation, une permutation barrée ou une permutation p-barrée.

Notation 1.11 *Etant donné un ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$, $S_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *désigne l'ensemble des permutations appartenant à* $S_n(\tau_1) \cap S_n(\tau_2) \cap \ldots \cap S_n(\tau_p)$.
De même, $I_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *et* $\widehat{S}_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *désignent respectivement les ensembles des involutions et permutations alternantes excluant simultanément les motifs* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$.

Propriété 1.12 *(J. West [110]) Pour tout ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$*, nous avons* $\pi \in S_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) \iff \pi^* \in S_n({\tau_1}^*, {\tau_2}^*, \ldots, {\tau_p}^*) \iff \pi^c \in S_n({\tau_1}^c, {\tau_2}^c, \ldots, {\tau_p}^c) \iff \pi^{-1} \in S_n({\tau_1}^{-1}, {\tau_2}^{-1}, \ldots, {\tau_p}^{-1})$.

Corollaire 1.13 *Pour tout ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$*, nous avons*

- $\pi \in I_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) \iff \pi^{*c} \in I_n({\tau_1}^{*c}, {\tau_2}^{*c}, \ldots, {\tau_p}^{*c})$
  $\pi \in I_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) \iff \pi \in I_n({\tau_1}^{-1}, {\tau_2}^{-1}, \ldots, {\tau_p}^{-1})$

- $\pi \in \widehat{S}_{2k}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) \iff \pi^{*c} \in \widehat{S}_{2k}({\tau_1}^{*c}, {\tau_2}^{*c}, \ldots, {\tau_p}^{*c})$
  $\pi \in \widehat{S}_{2k+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) \iff \pi^* \in \widehat{S}_{2k+1}({\tau_1}^*, {\tau_2}^*, \ldots, {\tau_p}^*)$

1.3 Rappels sur quelques objets combinatoires classiques

Nous rappelons ici quelques correspondances classiques entre arbres binaires, mots de parenthèses et polyominos parallélogrammes, chacune de ces familles étant énumérée par les nombres de Catalan. Nous terminons ce paragraphe en rappelant une interprétation combinatoire des coefficients binomiaux, des nombres de Motzkin et de Schröder, interprétation que nous utiliserons par la suite.

1.3.1 Arbres binaires, mots de parenthèses et polyominos parallélogrammes

La figure 1.3 illustre les correspondances entre arbres binaires, mots de parenthèses et polyominos parallélogrammes que nous allons présenter maintenant.

Le langage des *mots de parenthèses* (ou systèmes de parenthèses bien formés ou encore mots de Dyck) est le langage $P_{x,\overline{x}} = \{w \in \{x, \overline{x}\}^* : |w|_x = |w|_{\overline{x}}; \forall w = w'w'', |w'|_x \geq |w'|_{\overline{x}}\}$.
Il est fréquent de représenter un mot de parenthèses w de $P_{x,\overline{x}}$ par un chemin de Dyck ω. Le $i^{ème}$ pas du chemin ω est un pas unitaire Nord-Est ou Sud-Est selon que la $i^{ème}$ lettre du mot est respectivement x ou $\overline{x}$.

Nous notons A_n l'ensemble des *arbres binaires complets* ayant $2n + 1$ sommets (n sommets internes et $n + 1$ feuilles).

Une bijection classique [62] met en correspondance les arbres binaires complets ayant $2n+1$ sommets et les arbres binaires ayant n sommets. Elle consiste à supprimer simultanément toutes les feuilles de l'arbre binaire complet pour obtenir l'arbre binaire. Nous notons $complété(a)$ l'arbre binaire complet obtenu à partir de l'arbre binaire a.

Une bijection entre un arbre binaire complet a de A_n et un mot de parenthèses de $P_{x,\overline{x}}$ de longueur $2n$ est définie par le codage suivant.

$$code(a) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } a \text{ est réduit à un sommet} \\ x\ code(gauche(a))\ \overline{x}\ code(droit(a)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons $a^\star$ le miroir de l'arbre binaire a obtenu en échangeant les sous-arbres gauche et droit de chaque sommet.

Un *polyomino parallélogramme* [21] est la donnée, sur le réseau carré, de deux chemins disjoints ayant même origine et même extrémité finale, et n'empruntant que des pas unitaires Nord et Est.

M. Delest et X. Viennot [21] ont donné une correspondance entre polyominos parallélogrammes et chemins de Dyck (ou mot de parenthèses). Celle-ci est obtenue en associant à un polyomino parallélogramme deux suites d'entiers, la première correspondant au nombre de cellules de chaque colonne, la seconde indiquant le nombre de cellules en contact pour chaque paire de colonnes consécutives. Ces deux suites d'entiers sont alors les hauteurs des pics (facteurs $x\overline{x}$) et les hauteurs augmentées d'une unité des creux (facteurs $\overline{x}x$) du chemin de Dyck (ou mot de parenthèses) correspondant.

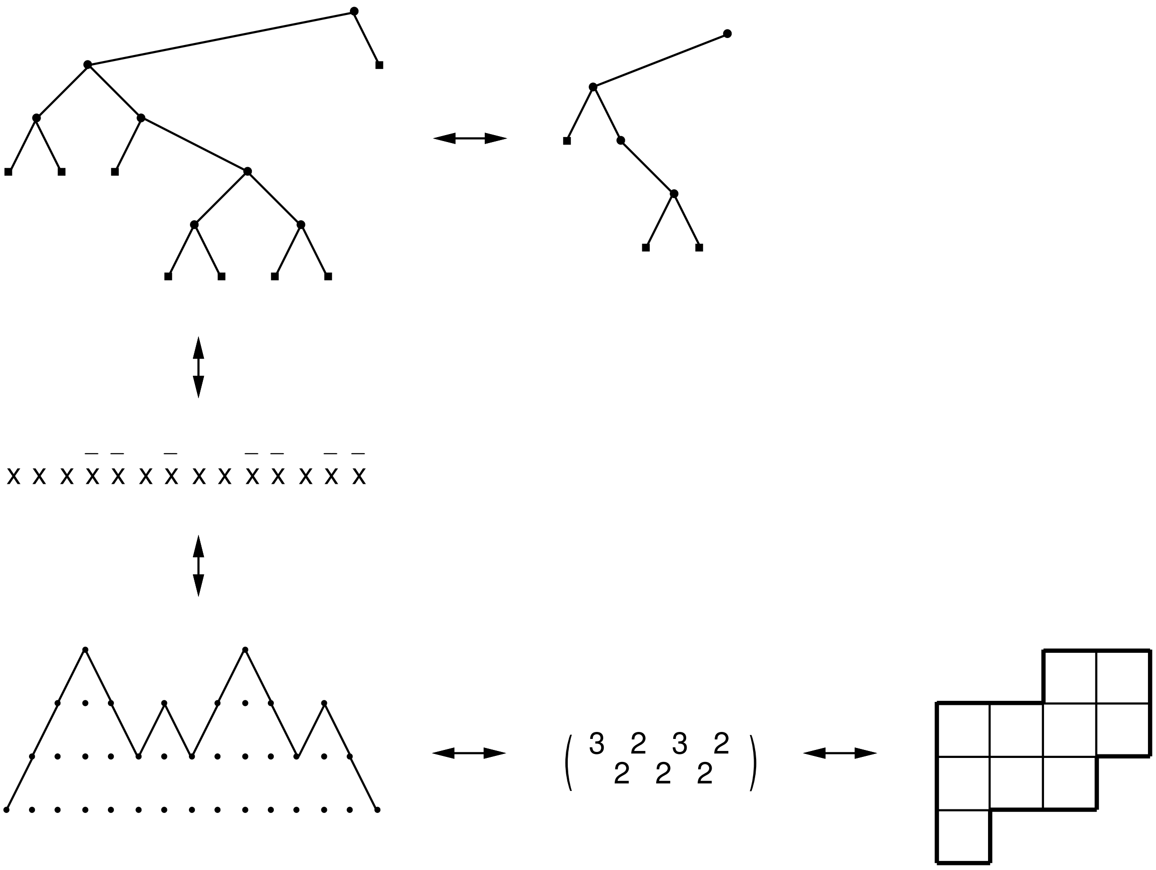


Figure 1.3 Mot de parenthèses en bijection avec un arbre binaire complet, un arbre binaire, un chemin de Dyck, deux suites d'entiers et un polyomino parallélogramme.

1.3.2 Nombres de Catalan

Le nombre de mots de parenthèses de longueur $2n$ est donné par le $n^{ème}$ nombre de Catalan $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.

Nous serons amenés par la suite à considérer certaines distributions classiques sur les nombres de Catalan. Nous les rappelons ici, et donnons leur interprétation sur les mots de parenthèses.

$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}^{<\alpha>}$ où $c_{n,k}^{<\alpha>} = \binom{2n-k-1}{n-1} - \binom{2n-k-1}{n}$ (nombres de Delannoy [36] ou nombres de scrutins [41] ou distribution α [65]).

Les nombres $c_{n,k}^{<\alpha>}$ énumèrent les mots de parenthèses w de longueur $2n$ de la forme $w = x^k\overline{x}w'$ de même que les mots de parenthèses w de longueur $2n$ comportant k facteurs premiers $w = w_1 w_2 \ldots w_k$ où $w_i \in xP_{x,\overline{x}}\overline{x}$ pour tout $i \in [k]$. Ce résultat est immédiat en considérant le miroir de l'arbre binaire complet codé par un mot de parenthèses.

$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}^{<\beta>}$ où $c_{n,k}^{<\beta>} = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{k-1} & \binom{n-1}{k} \\ \binom{n}{k-1} & \binom{n}{k} \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$ (nombres de Narayana [77] ou distribution β [65]).

Les nombres $c_{n,k}^{<\beta>}$ énumèrent les mots de parenthèses w de longueur $2n$ ayant k facteurs $x\overline{x}$, c'est à dire le nombre de chemins de Dyck ayant k pics.

1.3.3 Coefficients binomiaux, nombres de Motzkin et nombres de Schröder

Le langage $GD_{z,\overline{z}} = \{w \in \{z, \overline{z}\}^* : |w|_z = |w|_{\overline{z}}\}$ est parfois appelé langage du Grand Dyck.

Le nombre de mots de $GD_{z,\overline{z}}$ de longueur $2n$ est donné par le $n^{ème}$ coefficient binomial central $\binom{2n}{n}$.

Un *arbre 1-2* est un arbre dessiné (ou ordonné) et enraciné dans lequel chaque sommet possède au plus deux fils.

Le langage $P_{x,\overline{x}} ⧢ \{y\}^*$ désigne le langage de Motzkin (où $⧢$ est le symbole du produit de mélange).

Nous utiliserons par la suite les deux codages suivants (voir figure 1.4), appelés préfixe et suffixe, d'un arbre 1-2 (ou d'un arbre binaire complet) a possédant n arêtes par un mot de Motzkin de $P_{x,\overline{x}} ⧢ \{y\}^*$ (ou un mot de parenthèses de $P_{x,\overline{x}}$) de longueur n.

$$préfixe(a) = \begin{cases} \varepsilon \\ y\ préfixe(sous\_arbre\_central(a)) \\ x\ préfixe(sous\_arbre\_gauche(a))\ \overline{x}\ préfixe(sous\_arbre\_droit(a)) \end{cases}$$

suivant que la racine de a soit respectivement une feuille, un point simple, un point double.

$$suffixe(a) = \begin{cases} \varepsilon \\ suffixe(sous\_arbre\_central(a))\ y \\ suffixe(sous\_arbre\_gauche(a))\ x\ suffixe(sous\_arbre\_droit(a))\ \overline{x} \end{cases}$$

suivant que la racine de a soit respectivement une feuille, un point simple, un point double.

Clairement, pour un arbre binaire complet a, nous avons $préfixe(a) = code(a)$.

Remarquons que le codage préfixe du miroir d'un arbre 1-2 correspond au miroir et complémentaire du codage suffixe de l'arbre 1-2. Sur l'exemple illustré par la figure 1.4, nous avons $préfixe(a^\star) = suffixe(a)^{*c} = xxyxx\overline{x}y\overline{x}xx\overline{x}\overline{x}\overline{x}y\overline{x}yyxyx\overline{x}\overline{x}y$.

De plus, nous avons la propriété suivante. Soit s un sommet interne d'un arbre binaire complet a de numéro i dans l'ordre infixe, en ne numérotant que les sommets internes. Alors, le $i^{ème}$ $\overline{x}$ [resp. x] du codage préfixe [resp. suffixe] de a correspond à l'arête droite [resp. gauche] de s.

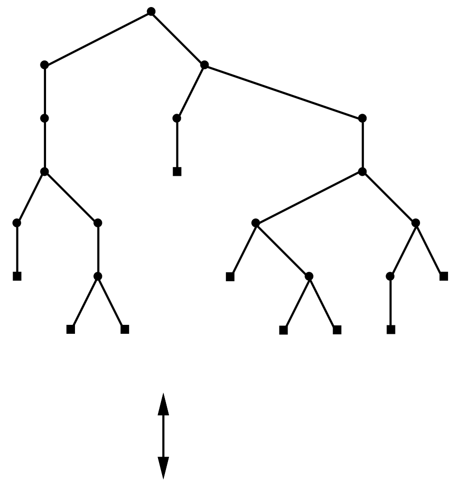
Un *buisson* [23] est un arbre dessiné et enraciné dans lequel aucun sommet, sauf éventuellement la racine, ne possède qu'un seul fils.

Les buissons possédant n arêtes sont en correspondance (voir figure 1.5) avec les mots de longueur $2n$ du langage $P_{x,\overline{x}} \backslash \{\{x, \overline{x}\}^* xxw\overline{x}\overline{x}\{x, \overline{x}\}^* : w \in P_{x,\overline{x}}\}$. Cette bijection résulte du codage classique d'un arbre par un parcours préfixe où une arête est codée par la lettre x [resp. $\overline{x}$] lors de sa première [resp. seconde] visite.

Les arbres 1-2 et les buissons possédant n arêtes sont énumérés par le $n^{ème}$ nombre de Motzkin $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$.

Le nombre d'arbres 1-2 possédant n sommets internes est donné par le $n^{ème}$ nombre de Schröder $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n-i} c_i$.

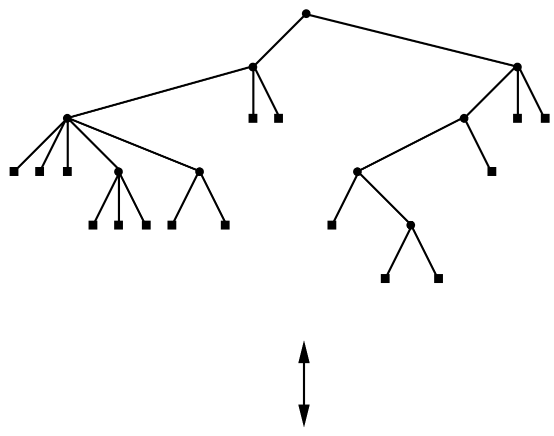
a =



préfixe(a) = $x\,y\,y\,x\,y\,\bar{x}\,y\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,y\,\bar{x}\,y\,x\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,y\,\bar{x}$

suffixe(a) = $y\,x\,x\,\bar{x}\,y\,\bar{x}\,y\,y\,x\,y\,x\,x\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,y\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,y\,\bar{x}\,\bar{x}$

Figure 1.4 Codages préfixe et suffixe d'un arbre 1-2.



$x\,x\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,x\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,x\,x\,x\,\bar{x}\,x\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,x\,\bar{x}\,\bar{x}$

Figure 1.5 Un buisson.

Chapitre 2

Arbre de génération d'une famille d'objets combinatoires

En Combinatoire, lorsque nous considérons une famille d'objets combinatoires, il est naturel de s'intéresser à la façon dont peuvent croître ces objets dans le but de les caractériser et de les énumérer. Cette approche se retrouve en particulier dans le cadre de la théorie des espèces de structures [60, 7] et des grammaires d'objets [32, 33].

Nous abordons ici cette problématique en considérant la notion d'arbre de génération d'une famille d'objets combinatoires. Un tel arbre peut être défini lorsque chaque objet de la famille est obtenu de manière unique à partir d'un autre objet plus petit (de la même famille) par une certaine règle de croissance, et lorsqu'il existe un unique objet de taille minimale. Ainsi, à chaque sommet de l'arbre correspond un objet de la famille.

A travers un exemple simple dans ce chapitre, et d'autres plus complexes dans les suivants, nous montrons qu'à de nombreux objets combinatoires peuvent être associés un arbre de génération. Pour chacun d'eux, la règle de croissance des objets permet de caractériser l'arbre de génération par un système de réécriture duquel il est possible de déduire des équations de récurrence. Par la suite, nous utiliserons à de nombreuses reprises le fait que, lorsque deux arbres de génération sont caractérisés par le même système de réécriture, ils sont isomorphes et induisent une bijection entre les deux familles d'objets combinatoires sous-jacentes.

Afin d'illustrer cette présentation de la méthode des arbres de génération, nous utilisons les mots de parenthèses comme exemple de référence.

2.1 Arbre de génération

Soit $E = \cup_{n \geq 0} E_n$ un ensemble d'objets combinatoires où E_n désigne l'ensemble des objets de taille n. Supposons que E_0 soit réduit à un seul objet, le générateur.
L'*arbre de génération* de l'ensemble E est un arbre pour lequel

- chaque objet de E_n apparaît une fois et une seule sur un sommet de niveau n,
- les arêtes de l'arbre reliant les sommets au niveau n à ceux au niveau $n+1$ correspondent aux règles de génération permettant de construire les objets de E_{n+1} à partir des objets de E_n.

Exemple 2.1 *Un mot de parenthèses w non vide se factorise de manière unique sous la forme $w = w_1 w_2 \dots w_p$ où les w_i sont des mots de parenthèses non vides et p est maximal (les w_i sont alors des mots de parenthèses premiers). Un tel mot w permet d'engendrer $p+1$ mots de parenthèses, à savoir les mots $x w_1 w_2 \dots w_{i-1} \overline{x} w_i w_{i+1} \dots w_p$ pour tout $i \in [p+1]$. Partant du mot vide, nous obtenons ainsi tous les mots de parenthèses, ce qui conduit à l'arbre de génération des mots de parenthèses donné par la figure 2.1.*
Notons que ces règles de génération correspondent exactement aux opérateurs d et D introduits par R. Cori [16].

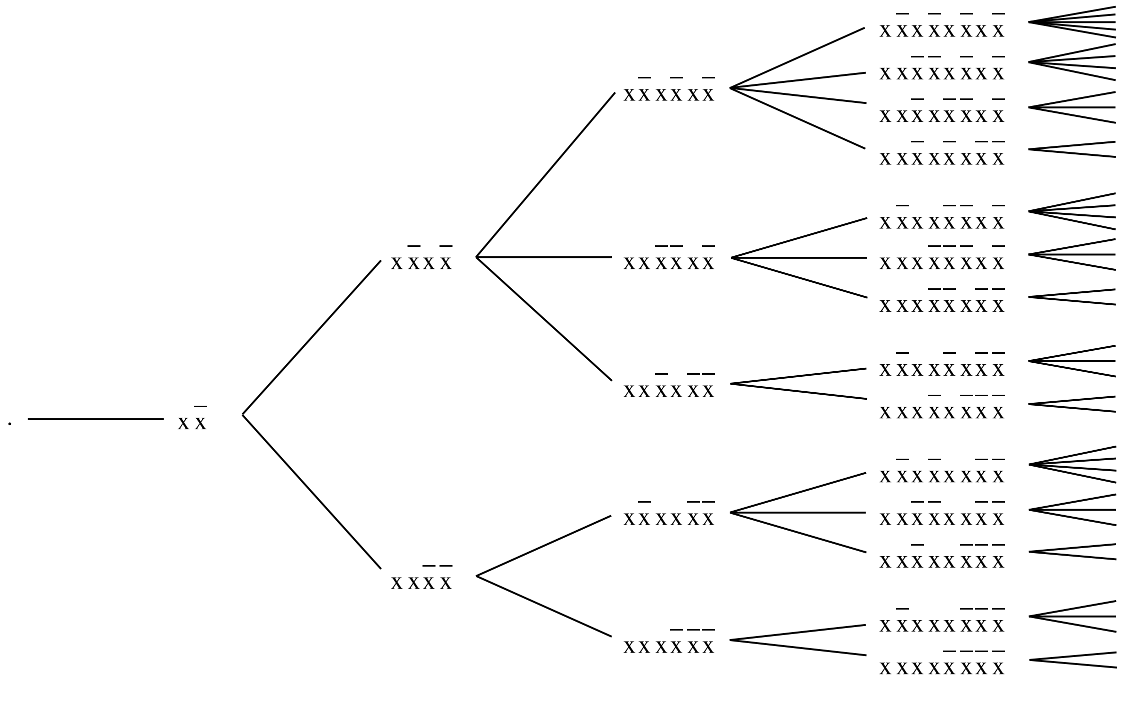


Figure 2.1 Arbre de génération des mots de parenthèses.

Remarque 2.2

(i) Il est possible d'étendre la définition d'arbre de génération à la notion de forêt d'arbres de génération. Ceci correspondrait au cas où l'ensemble considéré possèderait plusieurs générateurs (c'est à dire plusieurs objets minimaux).

(ii) Il serait également envisageable d'autoriser des arêtes reliant deux sommets situés aux niveaux n et $n+k$ (avec $k>1$) dans le cas où les règles de génération des objets auraient pour effet de les faire croître de k unités.

2.2 De l'arbre de génération au système de réécriture

Un arbre de génération d'un ensemble d'objets combinatoires peut être caractérisé par un *système de réécriture*. Celui-ci est obtenu en associant à chaque objet (sommet de l'arbre) une étiquette et en déduisant des règles de génération des objets un ensemble de règles de réécriture pour ces étiquettes.

Le système de réécriture caractérisant l'arbre de génération considéré se compose alors d'un axiome (étiquette initiale correspondant à l'objet générateur) et d'un ensemble de règles de réécriture. Nous le représentons ainsi.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \textit{étiquette\_initiale} & & \\ \textit{étiquette}_1 & \rightsquigarrow & \textit{étiquette}_1\textit{\_fils}_1, \textit{étiquette}_1\textit{\_fils}_2, \ldots, \textit{étiquette}_1\textit{\_fils}_{t_1} \\ \textit{étiquette}_2 & \rightsquigarrow & \textit{étiquette}_2\textit{\_fils}_1, \textit{étiquette}_2\textit{\_fils}_2, \ldots, \textit{étiquette}_2\textit{\_fils}_{t_2} \\ & & \vdots \\ \textit{étiquette}_r & \rightsquigarrow & \textit{étiquette}_r\textit{\_fils}_1, \textit{étiquette}_r\textit{\_fils}_2, \ldots, \textit{étiquette}_r\textit{\_fils}_{t_r} \end{array}\right.$$

où $\textit{étiquette}_i\textit{\_fils}_1, \textit{étiquette}_i\textit{\_fils}_2, \ldots, \textit{étiquette}_i\textit{\_fils}_{t_i}$ sont les t_i étiquettes obtenues à partir de l'étiquette $\textit{étiquette}_i$ pour tout $i \in [r]$.

Exemple 2.3 *Le système de réécriture*

$$\left\{\begin{array}{lcl} (0) & & \\ (p) & \rightsquigarrow & (p+1),(p),\ldots,(1) \end{array}\right.$$

dont l'arbre de dérivation est donné figure 2.2 caractérise l'arbre de génération des mots de parenthèses donné dans l'exemple 2.1. En effet, pour cette famille d'objets, l'étiquette d'un mot de parenthèses correspond à la taille de sa factorisation en mots premiers.

Un arbre de génération d'un ensemble d'objets combinatoires peut être caractérisé par un système de réécriture dans lequel certains termes des étiquettes correspondent à la valeur de certains paramètres associés à ces objets. Ces termes, qui ne sont pas forcément tous nécessaires à la caractérisation de l'arbre, peuvent être toutefois utiles pour considérer une distribution particulière des objets.

Exemple 2.4 *Le système de réécriture*

$$\left\{\begin{array}{lcl} (0,-1) & & \\ (p,c) & \rightsquigarrow & (p+1,c+1),(p,c),(p-1,c),\ldots,(1,c) \end{array}\right.$$

caractérise l'arbre de génération des mots de parenthèses. Il est tel qu'à chaque mot de parenthèses w correspond une étiquette (p,c) où p est le nombre de facteurs premiers de w et c est le nombre de facteurs $\overline{x}x$ de w (nombre de creux du chemin de Dyck correspondant). Pour cela, il est nécessaire d'associer l'étiquette $(0,-1)$ au mot vide.

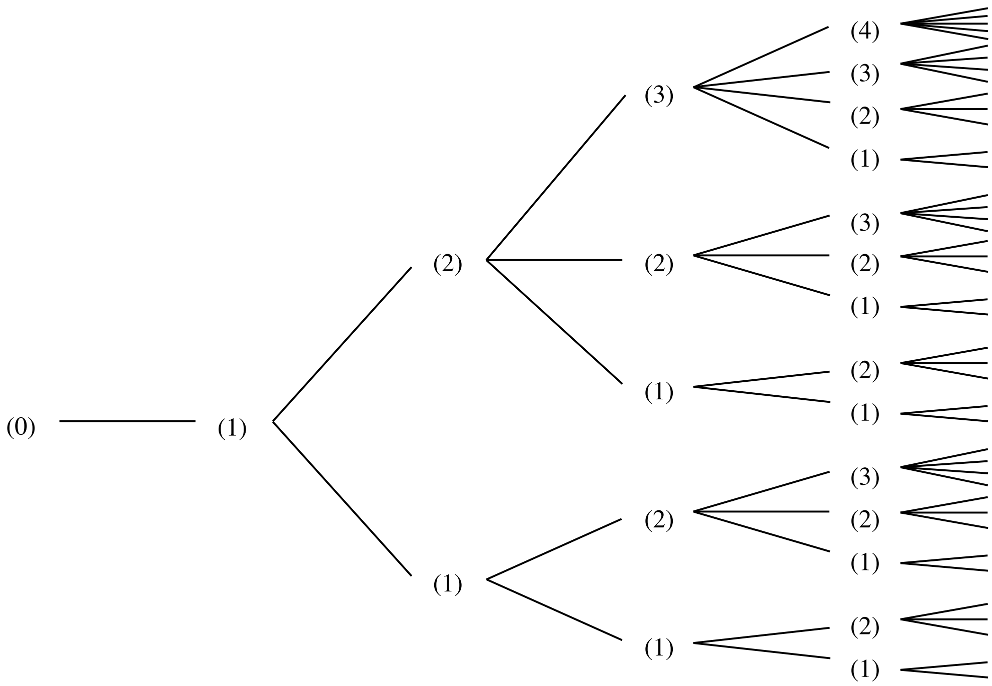


Figure 2.2 Arbre de dérivation du système de réécriture caractérisant l'arbre de génération des mots de parenthèses.

Remarque 2.5 *Deux arbres de génération caractérisés par le même système de réécriture sont isomorphes (symbolisé par $\cong$). Cet isomorphisme induit une bijection entre les deux ensembles d'objets correspondants qui transporte tous les paramètres associés aux étiquettes du système de réécriture.*

Exemple 2.6 *Considérons un nouvel arbre de génération des mots de parenthèses basé sur la construction suivante. Partant d'un mot de parenthèses w codant un chemin de Dyck de hauteur initiale p, $w = x^p\overline{x}w'$, nous engendrons $p+1$ mots de parenthèses, à savoir les mots $x^i\overline{x}x^{p+1-i}\overline{x}w'$ pour tout $i \in [p+1]$. Clairement, nous obtenons ainsi, en itérant cette construction, chaque mot de parenthèses une fois et une seule. L'arbre de génération correspondant est caractérisé par le système de réécriture*

$$\begin{cases} (0) \\ (p) \quad \rightsquigarrow \quad (1),(2),\ldots,(p+1) \end{cases}$$

identique à celui de l'exemple 2.3.

Nous en déduisons que la distribution des mots de parenthèses suivant le nombre de facteurs premiers est identique à la distribution de ces mêmes mots suivant leur hauteur initiale ; il s'agit des nombres de Delannoy.

2.3 Du système de réécriture aux récurrences

A partir d'un système de réécriture caractérisant un arbre de génération d'objets combinatoires, il est toujours possible d'établir des équations de récurrence pour le nombre de ces objets en fonction de leur taille et des paramètres de l'étiquette.

Exemple 2.7 *Considérons le système de réécriture caractérisant l'arbre de génération des mots de parenthèses donné dans l'exemple 2.3*

$$\left\{\begin{array}{lll} (0) & & \\ (p) & \leadsto & (p+1),(p),\ldots,(1) \end{array}\right.$$

Soit $c_{n,(p)}$ le nombre d'étiquettes (p) obtenues au niveau n de l'arbre de génération et c_n le nombre total d'étiquettes à ce même niveau. Ainsi, d'après ce que nous avons vu précédemment, $c_{n,(p)}$ est le nombre de mots de parenthèses de longueur $2n$ ayant exactement p facteurs premiers. Nous déduisons du système de réécriture les récurrences suivantes.

$$\left\{\begin{array}{lll} c_{0,(0)} & = & 1 \\ c_{1,(1)} & = & 1 \\ c_{n,(1)} & = & \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-1,(k)} \quad \textit{pour tout } n>1 \\ c_{n,(p)} & = & \sum_{k=p-1}^{n-1} c_{n-1,(k)} \quad \textit{pour tout } n>1 \textit{ et pour tout } p\in[2,n] \\ c_n & = & \sum_{p=1}^{n} c_{n,(p)} \quad \textit{pour tout } n\geq 1 \end{array}\right.$$

Nous pouvons alors vérifier que $c_{n,(p)} = \binom{2n-p-1}{n-1} - \binom{2n-p-1}{n}$ pour tout $1 \leq p \leq n$ et que $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ pour tout $n \geq 0$.

2.4 Arbres de génération et génération aléatoire

La méthode des arbres de génération est directement utilisable pour la génération aléatoire d'objets combinatoires.
En effet, tirer de façon uniforme et équiprobable l'un des éléments de taille n de l'ensemble étudié correspond à choisir aléatoirement un chemin partant de la racine et aboutissant à l'un des sommets du niveau n de l'arbre de génération. Pour cela, il est nécessaire de connaître, pour chaque sommet de l'arbre de génération, son nombre de descendants au niveau n. Ainsi, pour un sommet donné, il sera possible de choisir équiprobablement l'un de ses fils. Ce calcul est donc très similaire de celui à réaliser pour résoudre les récurrences du système de réécriture caractérisant l'arbre de génération : les règles de réécriture sont identiques et l'étiquette d'initialisation à prendre en compte est celle du sommet considéré.

Nous pouvons alors en déduire un algorithme en temps linéaire qui tire uniformément et équiprobablement l'un des éléments de l'ensemble étudié. Toutefois, cet algorithme manipule de grands nombres, et nous nous retrouvons confrontés aux mêmes problèmes que ceux présents dans la méthode de T. Hickey et J. Cohen [57] pour la génération aléatoire de mots d'un langage engendré par une grammaire algébrique.

Exemple 2.8 *Afin de générer aléatoirement un mot de parenthèses, de façon uniforme et équiprobable, il est nécessaire de calculer* $c_n^{r,(e)}$ *le nombre de sommets au niveau* n *issus d'un sommet d'étiquette* (e) *du niveau* r*. Pour cela, nous devons résoudre les récurrences du système de réécriture*

$$\left\{\begin{array}{lll}(e) & & \\ (p) & \leadsto & (1),(2),\ldots,(p+1)\end{array}\right.$$

qui correspond au système de réécriture des mots de parenthèses de l'exemple 2.6 (seule l'étiquette d'initialisation est modifiée). Nous pouvons vérifier que $c_n^{r,(e)} = \binom{2n-2r+e}{n-r} - \binom{2n-2r+e}{n-r-1}$ *pour tout* $1 \leq e \leq r \leq n$ *et plus précisément que le nombre de sommets ayant pour étiquette* (p)*, pour tout* $p \in [n]$*, est* $c_{n,(p)}^{r,(e)} = \binom{2n-2r+e-p-1}{n-r-1} - \binom{2n-2r+e-p-1}{n-r+e}$*. Nous en déduisons l'algorithme de génération aléatoire d'un mot de parenthèses illustré par la figure 2.3.*

<u>Entrée</u> : $n \geq 1$
<u>Sortie</u> : un mot de parenthèses w de longueur $2n$

$w' \longleftarrow \varepsilon$
$e \longleftarrow 1$
pour r variant de 1 à $n-1$
  choisir le fils d'étiquette (p) $(p \in [e+1])$ avec la probalité $\frac{c_n^{r+1,(p)}}{c_n^{r,(e)}}$
  $w' \longleftarrow x^{e+1-p}\overline{x}w'$
  $e \longleftarrow p$
retourner $x^e\overline{x}w'$

Figure 2.3 Algorithme de génération aléatoire d'un mot de parenthèses.

Chapitre 3

Arbres de génération de permutations : le logiciel forbid

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux arbres de génération des permutations et de deux familles particulières : les involutions et les permutations alternantes. Nous montrons comment ces arbres peuvent être construits et caractérisons chacun d'eux par un système de réécriture. De manière plus générale, nous considérons les arbres de génération de ces familles de permutations lorsque certains motifs sont interdits.

Ensuite, nous présentons un logiciel, baptisé *forbid* et développé en langage C, pour l'obtention de n'importe quelle famille de permutations (permutations, involutions, permutations alternantes) excluant un ou plusieurs motifs. Nous décrivons les différents états de sortie que permet ce logiciel : arbre de génération, ensemble des permutations, distributions de ces permutations suivant la plupart des paramètres classiques sur les permutations, ...

3.1 Arbres de génération de permutations à motifs exclus

3.1.1 Arbre de génération des permutations

Définition 3.1 *(J. West [110]) L'*arbre de génération des permutations *excluant l'ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ *vérifie*

- *sa racine est constituée par la permutation* 1 *de* S_1*,*
- *les fils d'une permutation* π *de* $S_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *sont toutes les permutations appartenant à* $S_{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *obtenues en insérant l'élément* $n+1$ *dans* π*, c'est à dire les permutations* $(n+1)\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$, $\pi(1)(n+1)\pi(2)\ldots\pi(n)$, ..., $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$.

L'arbre de génération des permutations excluant les motifs de $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ est noté $T(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$.

Remarque 3.2 *D'autres constructions pour l'arbre de génération des permutations sont également possibles comme l'a proposé S. Gire [45]. Par exemple, il est possible d'insérer l'élément* 1 *dans la permutation π dont tous les éléments ont préalablement été incrémentés d'une unité, ou bien d'insérer les éléments e appartenant à $[n+1]$ devant la permutation π dont tous les éléments supérieurs ou égaux à e ont préalablement été incrémentés d'une unité, ...*

L'arbre de génération de toutes les permutations (voir figure 3.1) est caractérisé par le système de réécriture

$$\begin{cases} (2) \\ (t) \rightsquigarrow \underbrace{(t+1),(t+1),\ldots,(t+1)}_{t \text{ fois}} \end{cases}$$

Ce système de réécriture vérifie qu'à chaque permutation de S_n correspond l'étiquette $(n+1)$.

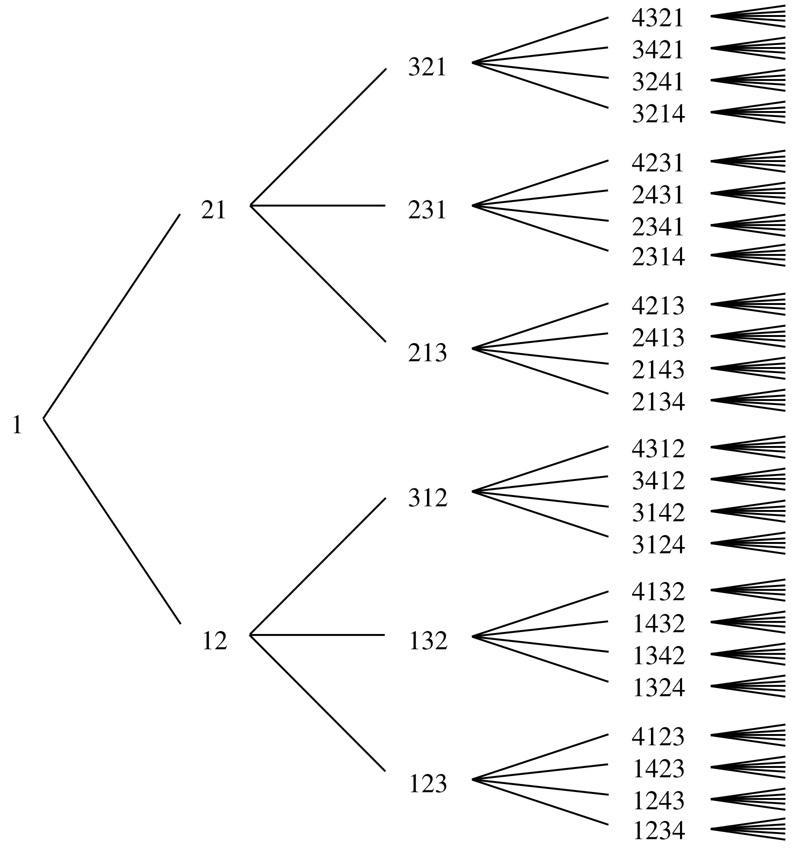


Figure 3.1 Arbre de génération de toutes les permutations.

Pour un ensemble de motifs exclus, l'arbre de génération $T(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ est donc un sous-arbre de l'arbre de génération de toutes les permutations. Par exemple, la figure 3.2 représente l'arbre de génération des permutations $T(312)$ jusqu'au niveau 4.

Définition 3.3 *(J. West [110], O. Guibert [53], S. Gire [45]) Etant donnée une permutation π de $S_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$, un* site *est soit une position entre deux éléments consécutifs $\pi(i)$ et $\pi(i+1)$*

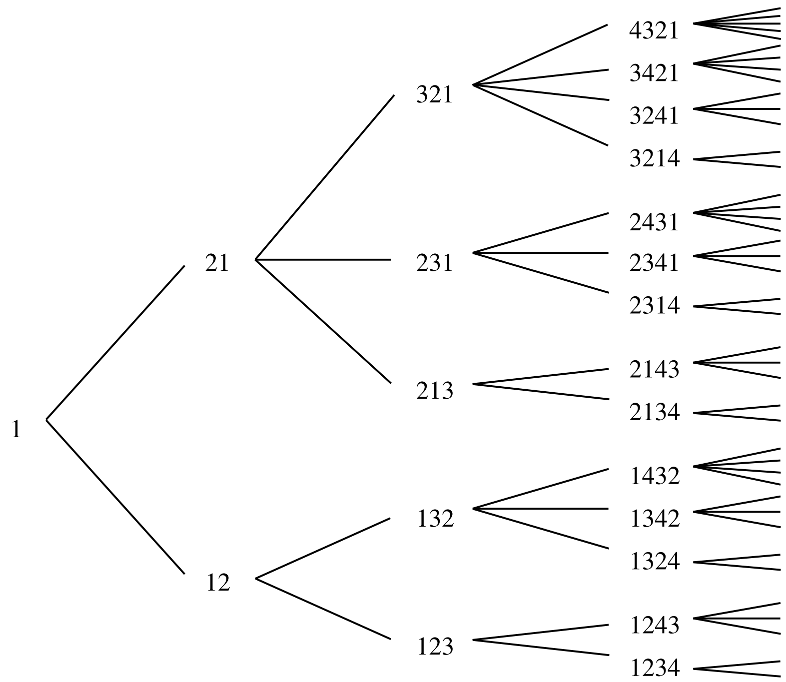


Figure 3.2 $T(312)$, l'arbre de génération des permutations excluant le motif 312.

pour tout $i \in [n-1]$, *soit la position à gauche de* $\pi(1)$, *soit la position à droite de* $\pi(n)$. *Un site est dit* actif *si l'insertion de l'élément* $n+1$ *dans cette position de la permutation* π *donne une permutation appartenant à* $S_{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *; le site est dit* inactif *dans le cas contraire. Un site est dit* temporairement inactif *s'il est inactif pour l'insertion de l'élément* $n+1$ *dans cette position de la permutation* π *et qu'existe* $k > 1$ *tel que l'insertion de l'élément* $n+k$ *dans cette position de la permutation* π' *obtenue en insérant les éléments de* $[n+1, n+k-1]$ *dans* π *rend ce site actif; le site inactif est dit* définitivement inactif *dans le cas contraire.*

Nous représentons par les symboles $_\diamond$, . *et* $_\bullet$ *les sites respectivement actif, temporairement inactif et définitivement inactif.*

Exemple 3.4 *La permutation* ${}_\diamond 2 . 1 {}_\diamond 5 . 4 {}_\diamond 6 {}_\diamond 3 {}_\bullet$ *de* $S_6(2314, \overline{4}2513)$ *possède* 4 *sites actifs car* $\{7215463, 2175463, 2154763, 2154673\} \subset S_7(2314, \overline{4}2513)$, 2 *sites temporairement inactifs car* $2715463 \notin S_7(2314, \overline{4}2513)$ *mais* $72815463 \in S_8(2314, \overline{4}2513)$ *et* $2157463 \notin S_7(2314, \overline{4}2513)$ *mais* $72158463 \in S_8(2314, \overline{4}2513)$, *et* 1 *site définitivement inactif car pour tout* $e > 6$ *la sous-suite* $563e$ *est de type* 2314.

La propriété suivante nous sera particulièrement utile pour établir certains résultats des chapitres suivants.

Propriété 3.5 *(O. Guibert [53], S. Gire [45]) Soient* τ *et* $\overline{\beta}$ *deux permutations respectivement non barrée et barrée sur* $[k]$, β *et* $\widetilde{\beta}$ *étant obtenus à partir de* $\overline{\beta}$ *conformément à la définition 1.9. Alors, nous avons les propriétés suivantes.*

(i) *Les* $\tau^{-1}(k)-1$ *premiers sites et les* $k-\tau^{-1}(k)$ *derniers sites de toute permutation* π *appartenant à* $S_n(\tau)$ *sont actifs.*

(ii) *Les* $\widetilde{\beta}^{-1}(k-1)-1$ *premiers sites et les* $k-1-\widetilde{\beta}^{-1}(k-1)$ *derniers sites de toute permutation* π *appartenant à* $S_n(\overline{\beta})$ *sont actifs.*

(iii) *Etant donnée une permutation* π *appartenant à* $S_n(\tau)$, *un site inactif de* π *reste définitivement inactif.*

(iv) *Etant donnée une permutation* π *appartenant à* $S_n(\overline{\beta})$, *un site inactif de* π *reste définitivement inactif si l'élément distingué est* $k-1$ *et si les éléments* k *et* $k-1$ *sont consécutifs dans un ordre quelconque dans* β, *ou bien si l'élément distingué est différent de* $k-1$.

(v) *Soient* π *une permutation appartenant à* $S_n(\tau)$ *et* π' *une permutation obtenue en insérant l'élément* $n+1$ *dans* π. *Alors* π' *n'appartient pas à* $S_{n+1}(\tau)$ *si et seulement si elle admet une sous-suite* $\pi'(l_1)\pi'(l_2)\dots\pi'(l_k)$ *de type* τ *telle qu'il existe* i *et* j *appartenant à* $[k]$ *vérifiant* $\pi'(l_i)=n+1$, $\tau(i)=k$ *et* $\pi'(l_j)=n$, $\tau(j)=k-1$.

Remarque 3.6 *Soit* $\overline{\beta}$ *une permutation barrée,* β *et* $\widetilde{\beta}$ *étant obtenus à partir de* $\overline{\beta}$ *conformément à la définition 1.9. Soit* x *l'élément distingué de* $\overline{\beta}$ *et posons* $i=\beta^{-1}(x)$.
Si $\beta(i-1)=x\pm 1$ *ou* $\beta(i+1)=x\pm 1$, *alors* $S_n(\overline{\beta})=S_n(\widetilde{\beta})$.

Preuve Par définition, si la permutation π appartient à $S_n(\widetilde{\beta})$, π appartient également à $S_n(\overline{\beta})$. Supposons maintenant que π n'appartienne pas à $S_n(\widetilde{\beta})$, c'est à dire que π possède une sous-suite $\widetilde{\sigma}$ de type $\widetilde{\beta}$. Posons $k=|\beta|$. Si $\widetilde{\sigma}$ ne fait pas elle-même partie d'une sous-suite de type β, π n'appartient pas à $S_n(\overline{\beta})$. Sinon, parmi toutes les sous-suites $\sigma' y \sigma''$ de type β avec $\widetilde{\sigma}=\sigma'\sigma''$ et $|\sigma'|=i-1$, choisissons celle dont l'élément y est situé le plus à droite [resp. gauche] possible dans π si $\beta(i-1)$ vaut $x+1$ ou $x-1$ [resp. sinon], de sorte que la sous-suite $\sigma'(1)\sigma'(2)\dots\sigma'(i-2)y\sigma''$ [resp. $\sigma' y \sigma''(2)\sigma''(3)\dots\sigma''(k-i)$] est de type $\widetilde{\sigma}$ mais ne fait pas elle-même partie d'une sous-suite de type β : π n'appartient donc pas à $S_n(\overline{\beta})$. □

Il est naturel de se demander si l'arbre de génération d'un ensemble de permutations à motifs exclus peut être fini. Ceci ne peut se produire que dans un seul cas.

Propriété 3.7 *Soit* $\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p\}$ *un ensemble de permutations non barrées. Alors,* $S_n(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p)$ *est vide à partir d'un certain rang* n *si et seulement s'il existe* $l,m\geq 0$ *tels que* $\{12\dots(l+1),(m+1)m\dots 1\}\subseteq\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p\}$.

Preuve Seul le motif $12\dots r$ [resp. $s(s-1)\dots 1$] permet d'exclure toutes les permutations $12\dots n$ [resp. $n(n-1)\dots 1$] pour tout $n\geq r$ [resp. s]. Or, P. Erdös et G. Szekeres [34] ont montré que $S_n(12\dots(l+1),$ $(m+1)m\dots 1)$ est vide pour tout $n>l.m$. □

Ce résultat se généralise aux permutations p-barrées. En effet, exclure le motif identité [resp. miroir de l'identité] sur $[k]$ avec p éléments distingués revient à exclure le motif identité [resp. miroir de l'identité] sur $[k-p]$. Par exemple, $S_n(1\overline{2}\overline{3}4\overline{5}67\overline{8}\overline{9},43\overline{2}1)=S_n(1234,321)$.

3.1.2 Arbre de génération des involutions

Définition 3.8 *L'*arbre de génération des involutions *excluant l'ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ *obtenu par la* méthode dite des points fixes *vérifie*

- *sa racine est constituée par l'involution* 1 *de* I_1,
- *les fils de l'involution* π *de* $I_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *sont les involutions appartenant à* $I_{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *suivantes : involutions* $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(i-1)(n+1)\pi(i+1)\pi(i+2)\ldots\pi(n)i$, *pour chaque point fixe* i *de* π, *et l'involution* $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$.

L'arbre de génération de toutes les involutions par la méthode des points fixes (voir figure 3.3) est caractérisé par le système de réécriture

$$\begin{cases} (1) & \\ (p) & \rightsquigarrow \quad \underbrace{(p-1),(p-1),\ldots,(p-1)}_{p \text{ fois}},(p+1) \end{cases}$$

Ce système de réécriture est tel qu'à chaque involution correspond une étiquette (p) où p est le nombre de points fixes de cette involution.
A partir de ce système de réécriture, nous obtenons l'équation de récurrence suivante.

$$\begin{cases} |I_{1,1}| & = & 1 \\ |I_{n,p}| & = & |I_{n-1,p-1}| + (p+1).|I_{n-1,p+1}| \quad \text{pour tout } 0 \le p \le n \text{ , } p \text{ et } n \text{ ayant même parité} \end{cases}$$

où $I_{n,p}$ est l'ensemble des involutions sur $[n]$ ayant p points fixes.

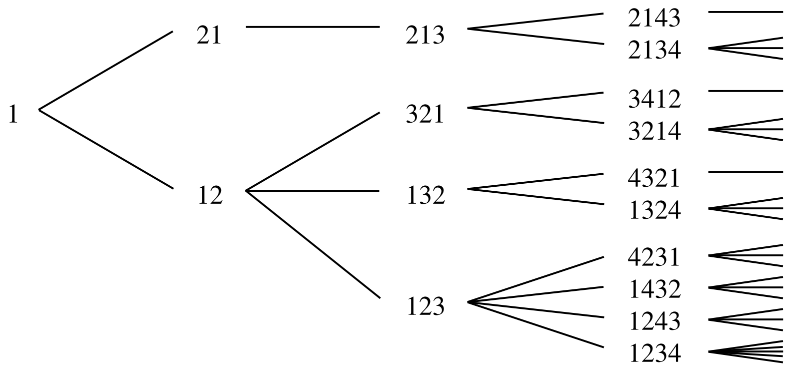


Figure 3.3 Arbre de génération de toutes les involutions par la méthode des points fixes.

Une seconde construction permet d'obtenir un autre arbre de génération des involutions. Cette construction est basée sur la formule de récurrence classique pour les involutions. Notons que J.S. Beissinger [5] donne une construction équivalente sur les tableaux de Young standard.

Définition 3.9 *L'*arbre de génération des involutions *excluant l'ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ *obtenu par la* méthode dite récurrente *vérifie*

- *sa racine est constituée par l'involution* ε *de* I_0,

- *les fils de l'involution π de $I_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ sont l'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$ lorsqu'elle appartient à $I_{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ et les involutions $\pi^+(1)\pi^+(2)\ldots\pi^+(i-1)(n+2)$ $\pi^+(i)\pi^+(i+1)\ldots\pi^+(n)i$ pour tout $i \in [n+1]$ si elles appartiennent à $I_{n+2}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$, où $\pi^+(j) = \pi(j)$ [resp. $\pi(j)+1$] si $\pi(j) < i$ [resp. $\geq i$].*

L'arbre de génération de toutes les involutions par la méthode récurrente (voir figure 3.4) est caractérisé par le système de réécriture

$$\begin{cases} (0) & & \\ (n) & \leadsto & (n+1) \\ & \overset{2}{\leadsto} & \underbrace{(n+2), (n+2), \ldots, (n+2)}_{n+1 \text{ fois}} \end{cases}$$

Ce système de réécriture est tel qu'à chaque involution de I_n correspond l'étiquette (n) .
A partir de ce système de réécriture, nous obtenons l'équation de récurrence suivante.

$$\begin{cases} |I_0| &= |I_1| &= 1 \\ |I_n| &= |I_{n-1}| + (n-1).|I_{n-2}| & \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

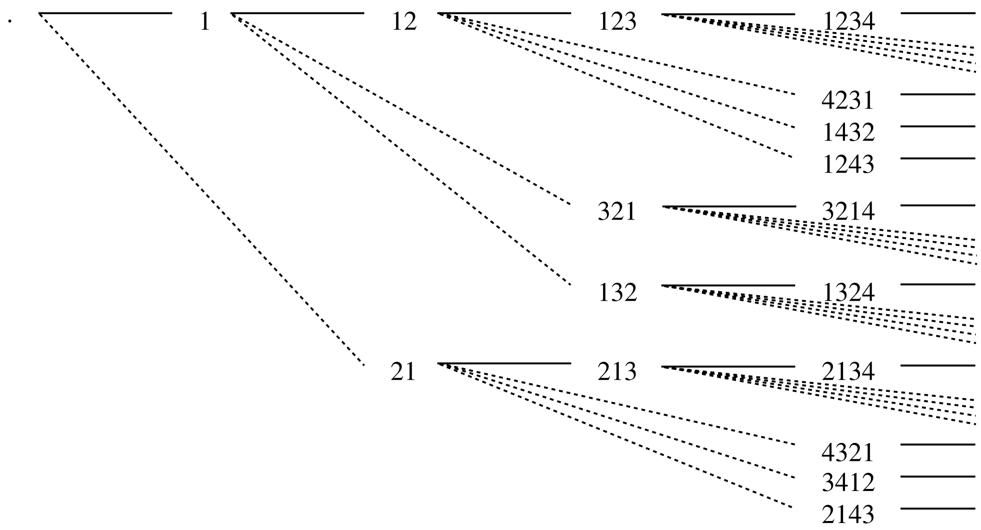


Figure 3.4 Arbre de génération de toutes les involutions par la méthode récurrente.

La propriété suivante nous sera utile dans certaines démonstrations ultérieures.

Propriété 3.10 *Soit τ une permutation non barrée sur $[k]$. Nous avons les propriétés suivantes.*

(i) Si $\pi \in I_n(\tau)$ et $\tau(k) \neq k$, alors $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1) \in I_{n+1}(\tau)$.

(ii) Un site inactif qui ne permet pas d'engendrer une involution sur $[n+2]$ à partir d'une involution de $I_n(\tau)$ par la méthode récurrente reste définitivement inactif.

Preuve

- (i). En effet, l'élément $n+1$ qui est inséré ne peut pas correspondre à l'élément k du motif exclu τ.

- (ii). L'insertion ne change pas l'ordre des éléments précédents.

□

3.1.3 Arbre de génération des permutations alternantes

Définition 3.11 *L'*arbre de génération des permutations alternantes *excluant l'ensemble de motifs* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ *vérifie*

- *sa racine est constituée par la permutation alternante* ε *de* $\widehat{S}_0$,
- *les fils d'une permutation alternante* π *de* $\widehat{S}_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *sont les permutations alternantes appartenant à* $\widehat{S}_{n+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ *suivantes : permutations alternantes* $\pi^+(1)\pi^+(2)\ldots\pi^+(n)i$ *pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, \pi(n)\}$ *[resp.* $\{\pi(n)+1, \pi(n)+2, \ldots, n+1\}$*] si* n *est pair [resp. impair], où* $\pi^+(j) = \pi(j)$ *[resp.* $\pi(j)+1$*] si* $\pi(j) < i$ *[resp.* $\geq i$*].*

L'arbre de génération de toutes les permutations alternantes (voir figure 3.5) est caractérisé par le système de réécriture

$$\begin{cases} (1,0) \\ (x,y) \rightsquigarrow (y+i, x+1-i) \text{ pour tout } i \in [x] \end{cases}$$

Ce système de réécriture est tel qu'à chaque permutation alternante π de $\widehat{S}_n$ correspond une étiquette (x, y) vérifiant $x + y = n + 1$ et x [resp. y] $= \pi(n)$ si n est pair [resp. impair].

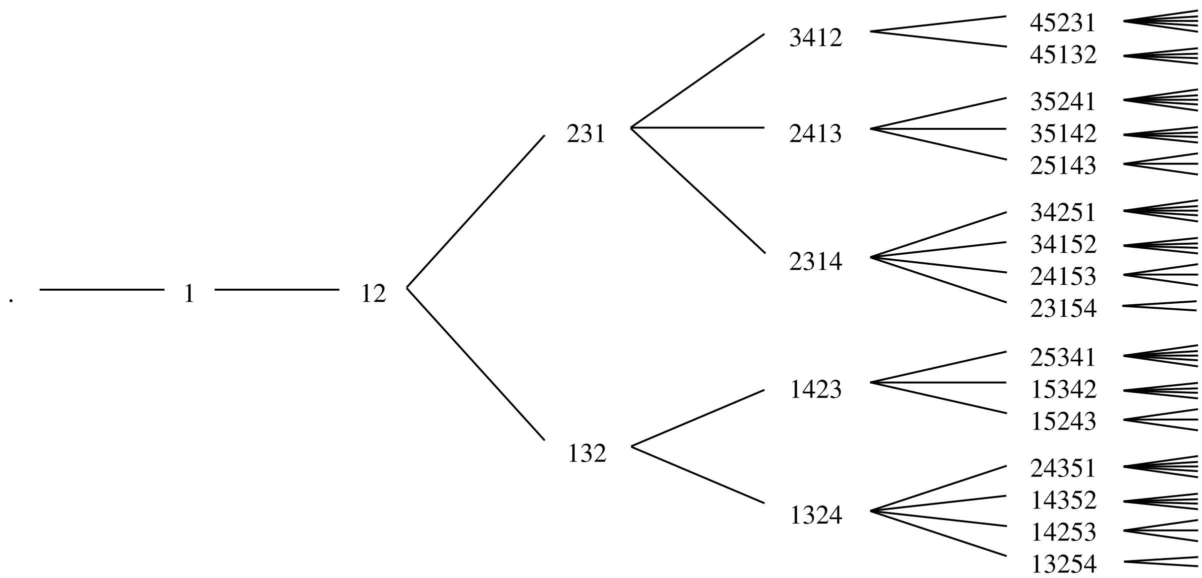


Figure 3.5 Arbre de génération de toutes les permutations alternantes.

3.2 Le logiciel *forbid*

Nous nous limitons ici à l'aspect utilisation du logiciel *forbid* puisque les principaux algorithmes, comme par exemple l'implémentation de certaines propriétés pour l'amélioration des performances, ont déjà été exposés dans [53].

forbid est un logiciel d'aide à la recherche sur les permutations à motifs exclus pour lequel de nombreuses options sont possibles. Nous présentons ici celles que nous pensons être les plus utiles.

forbid construit, à partir d'une liste de motifs exclus fournie par l'utilisateur, l'arbre de génération (jusqu'à un certain niveau) de la famille désirée. Cette famille peut être celle des permutations, celle des involutions (les deux méthodes de construction de l'arbre de génération des involutions sont possibles) ou celle des permutations alternantes.
Différents états de sortie, au choix de l'utilisateur, peuvent être obtenus. Un premier groupe permet d'obtenir l'arbre de génération sous diverses formes : arbre ASCII, fichier destiné au logiciel de visualisation de graphes *CABRI*, règles de réécriture (pour éventuellement deviner le système de réécriture), ... Un deuxième groupe fournit l'ensemble des permutations à motifs exclus et le couple de tableaux de Young standard correspondant par l'algorithme de Robinson-Schensted. Un troisième groupe procure les distributions de cet ensemble de permutations à motifs exclus suivant de nombreux paramètres (minima ou maxima à gauche ou à droite, montées, excédences, indices des éléments extrêmes, cycles, points fixes, ...).

Nous adoptons les notations syntaxiques "Backus Normal Form" pour présenter *forbid*.

$\lhd\, type \rhd$	désigne une expression du type indiqué
$\lhd\, type \rhd *$	désigne une suite de $\lhd type \rhd$ de longueur quelconque
$\lhd\, type \rhd +$	désigne une suite de $\lhd type \rhd$ de longueur non nulle
::=	indique que les expressions gauche et droite sont équivalentes
`Mot`	représente la chaîne de caractères `Mot`
[ ]	signale que ce qui est entre crochets est optionnel
{}	exprime un choix unique parmi les objets (séparés par des virgules) entre accolades

La syntaxe de la commande `forbid` est la suivante.
`forbid` $\lhd familles \rhd$ $\lhd sorties \rhd$ [+]$\lhd niveau\_max \rhd$ $\lhd motif\_exclu \rhd *$ [−`r`[+] $\lhd perm\_racine \rhd$ *] [− `f` [$\lhd fichier \rhd$]]

- `forbid` : nom du programme exécutable
- $\lhd familles \rhd$ ::= {`p`, `a`, `i`, `I`}+ où chaque caractère correspond à une famille différente
  - `p` pour les permutations
  - `a` pour les permutations alternantes
  - `i` pour les involutions par la méthode récurrente
  - `I` pour les involutions par la méthode des points fixes
- $\lhd sorties \rhd$ ::= {`a`, `Y`, `p`, `c`, `f`, `r`, ∗, `t`, `s`, `m`, `e`, `i`, `y`, `x`}+ où chaque caractère correspond à une sortie différente

- [+] $\lhd$ *niveau_max* $\rhd$: limite la hauteur de l'arbre de génération, construit jusqu'au niveau *niveau_max* (absence du symbole +) ou jusqu'aux niveaux $k +$ *niveau_max* pour chaque permutation racine de $\lhd$*perm_racine* $\rhd$ sur $[k]$ (présence du symbole +)
- $\lhd$*motif_exclu*$\rhd$: un motif (permutation p-barrée, barrée ou non barrée) à exclure
- $\lhd$*perm_racine*$\rhd$: une permutation non barrée, racine de l'arbre construit
- $-$ `f` [$\lhd$*fichier*$\rhd$] : spécifie le fichier (l'écran par défaut) devant recevoir les résultats

Exemple 3.12 *La commande*

`forbid p am +3 236-4-15 2413 41-352 -r 1 321 12 -f resultat`

demande au logiciel forbid, parmi l'ensemble des permutations excluant simultanément les motifs $236\overline{41}5$, 2413 *et* $41\overline{3}52$ *les permutations issues de* 1, 321 *et* 12 *dans l'arbre de génération des permutations, et respectivement sur* [4], [6] *et* [5] *au plus. La sortie, redirigée vers le fichier* `resultat`*, se compose de l'arbre ASCII (sortie* `a`*) et des distributions selon le nombre de montées et montées inverses (sortie* `m`*).*

Une page d'aide est donnée par le logiciel *forbid*; il suffit pour cela de taper la commande `forbid` sans option.

Nous présentons maintenant en détail chacune des sorties du logiciel *forbid*, en les illustrant avec l'ensemble des permutations excluant le motif 312.

- L'option `a` fournit l'arbre de génération sous forme d'un fichier texte ASCII.
  Dans ce cas, les permutations à motifs exclus sur $[n]$ sont représentées sur une même colonne. Chaque permutation est donnée avec ses sites actifs (`_`) et inactifs (`.`), et est suivie de son nombre de fils (entre parenthèses).

  Exemple 3.13 *Arbre ASCII de* $S_n(312)$*.*

```
Commande : forbid p a 4 312 -r 1 -f exemple
_1_(2)      _2_1_(3)     _3_2_1_(4)      _4_3_2_1_(5)
                                         .3_4_2_1_(4)
                                         .3.2_4_1_(3)
                                         .3.2.1_4_(2)
                         .2_3_1_(3)      .2_4_3_1_(4)
                                         .2.3_4_1_(3)
                                         .2.3.1_4_(2)
                         .2.1_3_(2)      .2.1_4_3_(3)
                                         .2.1.3_4_(2)
            .1_2_(2)     .1_3_2_(3)      .1_4_3_2_(4)
                                         .1.3_4_2_(3)
                                         .1.3.2_4_(2)
                         .1.2_3_(2)      .1.2_4_3_(3)
                                         .1.2.3_4_(2)
```

- L'option `Y` fournit l'ensemble des permutations à motifs exclus.
  Chaque ligne éditée correspond à une permutation (dont les éléments sont séparés par un caractère blanc). De plus, pour chaque permutation obtenue, cette option fournit la paire de tableaux de Young standard de même forme (codés par des mots de Yamanushi) lui correspondant par l'algorithme de Robinson-Schensted.

  Exemple 3.14 $S_n(312)$.

```
Commande : forbid p Y 4 312 -r 1 -f exemple
1              1            1
2 1            12           12
3 2 1          123          123
4 3 2 1        1234         1234
3 4 2 1        1231         1123
3 2 4 1        1231         1213
3 2 1 4        1231         1231
2 3 1          121          112
2 4 3 1        1213         1123
2 3 4 1        1211         1112
2 3 1 4        1211         1121
2 1 3          121          121
2 1 4 3        1212         1212
2 1 3 4        1211         1211
1 2            11           11
1 3 2          112          112
1 4 3 2        1123         1123
1 3 4 2        1121         1112
1 3 2 4        1121         1121
1 2 3          111          111
1 2 4 3        1112         1112
1 2 3 4        1111         1111
```

- L'option `p` fournit le mot parenthésé codant l'arbre de génération obtenu, où figure notamment le nombre de sites actifs.

  Exemple 3.15 *Mot parenthésé de* $S_n(312)$.

```
Commande : forbid p p 4 312 -r 1 -f exemple
(((23)(234))((23)(234)(2345)))
```

- L'option `c` fournit le fichier destiné au logiciel *CABRI* correspondant à l'arbre de génération obtenu, en vue de sa visualisation.

Un fichier texte, décrivant l'arbre de génération, est créé. Le logiciel *CABRI* reconnait alors ce dernier et le dessine. Chaque permutation est donnée avec ses sites actifs (`_`) et inactifs (`.`).

Exemple 3.16 *La commande* `forbid p c 3 312 -r 1 -f exemple_cabri` *crée le fichier* `exemple_cabri` *à destination du logiciel CABRI pour* $S_n(312)$.

- L'option `r` fournit toutes les règles de réécriture obtenues, en éliminant les redondances. L'arbre de génération est parcouru en regardant localement le nombre de fils t d'un sommet et pour chacun de ses fils, leur nombre de fils, respectivement $t_1, t_2, \ldots, t_t$. La règle de réécriture ainsi obtenue est $t \rightsquigarrow t_1, t_2, \ldots, t_t$. Toutes les règles de réécriture rencontrées sont éditées par ordre croissant sur t et sur les t_i.

Exemple 3.17 *Règles de réécriture de* $S_n(312)$.

```
Commande : forbid p r 10 312 -r 1 -f exemple
#fils --> #fils de tous les successeurs
 2    -->    2  3
 3    -->    2  3  4
 4    -->    2  3  4  5
 5    -->    2  3  4  5  6
 6    -->    2  3  4  5  6  7
 7    -->    2  3  4  5  6  7  8
 8    -->    2  3  4  5  6  7  8  9
 9    -->    2  3  4  5  6  7  8  9 10
10    -->    2  3  4  5  6  7  8  9 10 11
#regles differentes comptees = 9
```

- L'option `*` fournit la valeur de plusieurs paramètres sur les permutations obtenues. Cette sortie est donnée sous forme tabulaire, où chaque colonne correspond à un paramètre différent et chaque ligne correspond à une permutation. Les paramètres considérés sont les suivants.
  - `n` l'ordre de la permutation
  - `fils` le nombre de fils de la permutation correspondante dans l'arbre de génération
  - `sig` le nombre de minima à gauche (ou saillants inférieurs à gauche), `sid` le nombre de minima à droite (ou saillants inférieurs à droite), `ssg` le nombre de maxima à gauche (ou saillants supérieurs à gauche), `ssd` le nombre de maxima à droite (ou saillants supérieurs à droite)
  - `mont` le nombre de montées, `mont-1` le nombre de montées inverses

- `exc>=` le nombre d'excédences larges (éléments supérieurs ou égaux à leurs indices),
  `exc>` le nombre d'excédences strictes (éléments supérieurs à leurs indices)
- `pi-1(n)` l'indice du plus grand élément,
  `pi-1(1)` l'indice de l'élément 1,
  `pi(n)` le dernier élément,
  `pi(1)` le premier élément
- `cycles` le nombre de cycles,
  `+lgcyc` la longueur du plus long cycle,
  `ptfix` le nombre de points fixes
- `invers` le nombre d'inversions
- `major` l'index du major (somme des indices des descentes) de la permutation,
  `major-1` l'index du major de la permutation inverse

Exemple 3.18 *Les valeurs de ces paramètres pour $S_n(312)$ sont donnés par la figure 3.6.*

- Les options `t`, `s`, `m`, `e`, `i`, `y`, `x` fournissent les distributions de l'ensemble des permutations à motifs exclus selon un paramètre particulier.
  Chaque distribution est donnée sous forme tabulaire, avec en abscisse l'ordre des permutations et en ordonnée les valeurs du paramètre. De plus, la première ligne totalise chaque colonne, énumérant ainsi les permutations obtenues selon leur ordre.
  Les différents paramètres sont les suivants.
  - `t` le nombre de fils
  - `s` le nombre de minima ou maxima à gauche ou à droite (ou saillants)
  - `m` le nombre de montées et de montées inverses
  - `e` le nombre d'excédences strictes et larges
  - `i` les indices et valeurs relativement à n et 1
  - `y` le nombre de cycles et la longueur du plus long cycle
  - `x` le nombre de points fixes

Exemple 3.19 *Distribution de $|S_n(312)|$ suivant le nombre de maxima. Nous reconnaissons les premiers termes des nombres de Narayana et de Delannoy (distributions des nombres de Catalan).*

```
Commande : forbid p s 10 312 -r 1 -f exemple
Perm. : #saillants superieurs gauches sur les ordonnees
Sn= =1 =2 =5 =14 =42 =132 =429 =1430 =4862 =16796
10:  -  -  -   -   -    -    -     -     -      1
 9:  -  -  -   -   -    -    -     -     1     45
 8:  -  -  -   -   -    -    -     1    36    540
 7:  -  -  -   -   -    -    1    28   336   2520
 6:  -  -  -   -   -    1   21   196  1176   5292
 5:  -  -  -   -   1   15  105   490  1764   5292
 4:  -  -  -   1  10   50  175   490  1176   2520
 3:  -  -  1   6  20   50  105   196   336    540
 2:  -  1  3   6  10   15   21    28    36     45
 1:  1  1  1   1   1    1    1     1     1      1
    1: 2: 3:  4:  5:   6:   7:    8:    9:    10: [n]
Perm. : #saillants superieurs droits sur les ordonnees
Sn= =1 =2 =5 =14 =42 =132 =429 =1430 =4862 =16796
10:  -  -  -   -   -    -    -     -     -      1
 9:  -  -  -   -   -    -    -     -     1      9
 8:  -  -  -   -   -    -    -     1     8     44
 7:  -  -  -   -   -    -    1     7    35    154
 6:  -  -  -   -   -    1    6    27   110    429
 5:  -  -  -   -   1    5   20    75   275   1001
 4:  -  -  -   1   4   14   48   165   572   2002
 3:  -  -  1   3   9   28   90   297  1001   3432
 2:  -  1  2   5  14   42  132   429  1430   4862
 1:  1  1  2   5  14   42  132   429  1430   4862
    1: 2: 3:  4:  5:   6:   7:    8:    9:    10: [n]
```

```
Commande : forbid p * 4 312 -r 1 -f exemple
```

n	fils	sig	sid	ssg	ssd	mont	mont-1	exc>=	exc>	pi-1(n)	pi-1(1)	pi(n)	pi(1)	cycles	+lgcyc	ptfix	invers	major	major-1
1	2	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	3	2	1	1	2	0	0	1	1	1	2	1	2	1	2	0	1	1	1
3	4	3	1	1	3	0	0	2	1	1	3	1	3	2	2	1	3	3	3
4	5	4	1	1	4	0	0	2	2	1	4	1	4	2	2	0	6	6	6
4	4	3	1	2	3	1	1	2	2	2	4	1	3	1	4	0	5	5	3
4	3	3	1	2	2	1	1	3	2	3	4	1	3	2	3	1	4	4	3
4	2	3	2	2	1	1	1	3	1	4	3	4	3	3	2	2	3	3	3
3	3	2	1	2	2	1	1	2	2	2	3	1	2	1	3	0	2	2	1
4	4	2	1	2	3	1	1	3	2	2	4	1	2	2	3	1	4	5	4
4	3	2	1	3	2	2	2	3	3	3	4	1	2	1	4	0	3	3	1
4	2	2	2	3	1	2	2	3	2	4	3	4	2	2	3	1	2	2	1
3	2	2	2	2	1	1	1	2	1	3	2	3	2	2	2	1	1	1	1
4	3	2	2	2	2	1	1	2	2	3	2	3	2	2	2	0	2	4	4
4	2	2	3	3	1	2	2	3	1	4	2	4	2	3	2	2	1	1	1
2	2	1	2	2	1	1	1	2	0	2	1	2	1	2	1	2	0	0	0
3	3	1	2	2	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	1	2	2
4	4	1	2	2	3	1	1	3	1	2	1	2	1	3	2	2	3	5	5
4	3	1	2	3	2	2	2	3	2	3	1	2	1	2	3	1	2	3	2
4	2	1	3	3	1	2	2	3	1	4	1	4	1	3	2	2	1	2	2
3	2	1	3	3	1	2	2	3	0	3	1	3	1	3	1	3	0	0	0
4	3	1	3	3	2	2	2	3	1	3	1	3	1	3	2	2	1	3	3
4	2	1	4	4	1	3	3	4	0	4	1	4	1	4	1	4	0	0	0

Figure 3.6 Les paramètres générés par l'option * de *forbid*.

Chapitre 4

Permutations à motifs exclus énumérées par quelques suites classiques

Afin d'illustrer cette méthode consistant à construire l'arbre de génération d'une famille d'objets combinatoires, nous avons considéré quelques classes de permutations à motifs exclus pour lesquels nous obtenons des résultats nouveaux. Pour cela, le logiciel *forbid* nous a été d'une grande utilité, nous permettant souvent de deviner des formules d'énumération et parfois nous suggérant des bijections par isomorphisme d'arbres de génération.

L'ensemble des résultats obtenus vient compléter le catalogue (voir annexe A) déjà important relatif à l'énumération d'ensembles de permutations à motifs exclus auquel de nombreux auteurs ont contribué.

La particularité des résultats obtenus ici réside dans le fait que les formules d'énumération obtenues sont toutes très classiques en Combinatoire.
Ainsi, nous mettons en évidence des ensembles de permutations à motifs exclus dont les formules d'énumération sont proches des nombres de Catalan [13] tels les coefficients binomiaux centraux qui énumèrent les mots du langage que nous appelons Grand Dyck et les nombres de Motzkin [75] et de Schröder [90] qui dénombrent en particulier les arbres 1-2 selon deux paramètres différents.

Dans un premier temps, nous mettons en correspondance trois ensembles de permutations à motifs exclus et montrons qu'ils sont énumérés par les nombres de Pell satisfaisant la formule de récurrence $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ $(p_1 = 1, p_2 = 2)$.

Ensuite, nous mettons en évidence de nombreux ensembles de permutations à motifs exclus en bijection avec les mots du Grand Dyck et donc énumérés par les coefficients binomiaux centraux $\binom{2n}{n}$.

De plus, nous complétons les travaux de S. Gire [45] sur les nombres de Motzkin $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$ et ceux de J. West [110, 112] et S. Gire [45] sur les nombres de Schröder $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n-i} c_i$.
En particulier, nous montrons que les arbres de génération d'un ensemble de permutations et de deux ensembles d'involutions à motifs exclus sont caractérisés par le même système de réécriture, qui lui-même caractérise un arbre de génération des arbres 1-2 suivant le nombre de sommets. Nous procédons de même pour d'autres ensembles de permutations en les reliant à ces mêmes arbres, mais considérés cette fois-ci distribués suivant leur nombre de sommets internes.

Pour terminer, nous nous intéressons aux tableaux de Young standard de hauteur bornée ainsi qu'à des paires de tels tableaux. Ceci revient à considérer respectivement les involutions et les permutations excluant le motif identité. Nous donnons les systèmes de réécriture caractérisant les arbres de génération de ces objets.

4.1 Nombres de Pell

Les nombres de Pell, dont les premières valeurs sont $1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots$, apparaissent dans un exercice proposé par G.L. Alexanderson [59].

Nous allons montrer que ces nombres énumèrent trois ensembles de permutations à motifs exclus que nous mettons en correspondance par isomorphisme de leurs arbres de génération.

Théorème 4.1 *Les ensembles de permutations à motifs exclus* $S_n(123, 2143, 3214)$, $S_n(213, 1234, 1243)$ *et* $S_n(132, 2341, 3241)$ *sont en bijection et sont énumérés par le* $n^{\text{ème}}$ *nombre de Pell donné par*

$$p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k$$

défini par la formule de récurrence $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ $(p_1 = 1, p_2 = 2)$.

Pour établir ce résultat, nous montrons que les arbres de génération $T(123, 2143, 3214)$, $T(213, 1234, 1243)$ et $T(132, 2341, 3241)$ sont isomorphes en les caractérisant par le même système de réécriture.

Proposition 4.2

- *Le système de réécriture* $\mathcal{S}_{Pell}$ *(voir figure 4.1) caractérisant les arbres de génération* $T(123, 2143, 3214)$, $T(213, 1234, 1243)$ *et* $T(132, 2341, 3241)$ *est*
$$\left\{\begin{array}{lll} (2) & & \\ (2) & \rightsquigarrow & (2),(3) \\ (3) & \rightsquigarrow & (2),(2),(3) \end{array}\right.$$
- *Les étiquettes* (2) *et* (3) *du système de réécriture* $\mathcal{S}_{Pell}$ *correspondent au nombre de sites actifs d'une permutation de l'un quelconque des trois arbres de génération.*

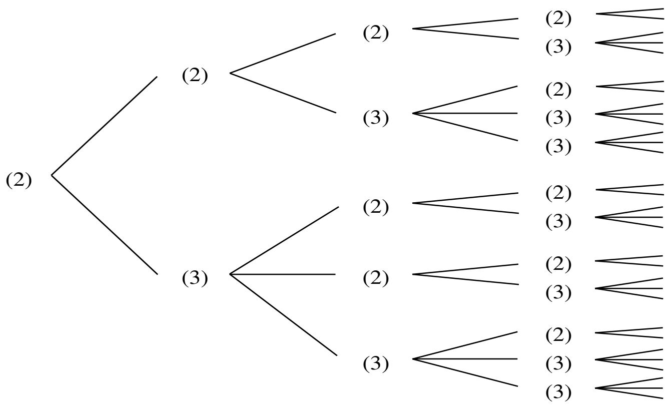


Figure 4.1 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Pell}$.

Lemme 4.3 *Les permutations π de $S_n(123, 2143, 3214)$ ont les trois premiers sites actifs si $\pi(1) = n$, les deux premiers sites actifs sinon.*

Preuve Clairement, compte-tenu de la forme des motifs exclus, les deux premiers sites de π sont toujours actifs.
Supposons qu'il y ait un site actif autre que l'un des trois premiers. Alors, la permutation $\pi(1)\pi(2)\pi(3)\ldots(n+1)\ldots$ appartient à $S_{n+1}(123, 2143, 3214)$. Le motif 123 étant interdit, nous devrions avoir $\pi(3) < \pi(2) < \pi(1)$ et ainsi la sous-suite $\pi(1)\pi(2)\pi(3)(n+1)$ serait de type 3214, ce qui est interdit. S'il y a 3 sites actifs, alors $\pi(1)\pi(2)(n+1)\ldots \in S_{n+1}(123, 2143, 3214)$. Si $\pi(1) < n$, alors soit la sous-suite $\pi(1)\pi(2)(n+1)$ est de type 123 si $\pi(1) < \pi(2)$, soit la sous-suite $\pi(1)\pi(2)(n+1)n$ est de type 2143 sinon. A l'inverse, si $\pi(1) = n$, le troisième site est actif d'après la forme des motifs exclus. □

Les deux lemmes suivants se démontrent de façon analogue.

Lemme 4.4 *Les permutations π de $S_n(213, 1234, 1243)$ ont les trois premiers sites actifs si $\pi(2) = n$, les deux premiers sites actifs sinon.*

Lemme 4.5 *Les permutations π de $S_n(132, 2341, 3241)$ ont les premier, deuxième et dernier sites actifs si $\pi(1) = n$, les premier et dernier sites actifs sinon.*

Preuve de la proposition 4.2. Clairement, la permutation 1 engendre les permutations 12 et 21 et admet donc 2 fils dans chacun des trois arbres de génération.
D'après les lemmes précédents, une permutation π de $S_n(123, 2143, 3214)$ [resp. $S_n(213, 1234, 1243)$ et $S_n(132, 2341, 3241)$] telle que $\pi^{-1}(n) = 1$ [resp. 2 et 1] permet d'engendrer 3 permutations, chacune d'elles en engendrant respectivement 3,2,2 [resp. 2,3,2 et 3,2,2]. Par contre, si $\pi^{-1}(n) \neq 1$ [resp. 2 et 1], la permutation π n'engendre que 2 permutations, chacune d'elles en engendrant respectivement 3,2 [resp. 2,3 et 3,2]. □

Preuve du théorème 4.1. Soit maintenant p_n le nombre de permutations de $S_n(123, 2143, 3214)$, $S_n(213, 1234, 1243)$ ou $S_n(132, 2341, 3241)$.
D'après le système de réécriture $\mathcal{S}_{Pell}$, nous avons $p_{n,(2)} = p_{n-1,(2)} + 2p_{n-1,(3)}$ et $p_{n,(3)} = p_{n-1,(2)} + p_{n-1,(3)}$

où $p_{n,(t)}$ est le nombre d'étiquettes (t) au niveau n $(t = 2, 3)$. Ainsi, nous obtenons que $p_n = p_{n,(2)} + p_{n,(3)} = 2(p_{n-1,(2)} + p_{n-1,(3)}) + p_{n-1,(3)} = 2p_{n-1} + p_{n-2}$, avec $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$.
Nous pouvons également déduire du système de réécriture $\mathcal{S}_{Pell}$ que $\begin{pmatrix} p_{n,(2)} & p_{n,(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$. Alors, nous avons que $p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k$ pour tout $n \geq 1$ avec $p_{n,(2)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2k} 2^k$ et $p_{n,(3)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2k+1} 2^k$. □

4.2 Coefficients binomiaux centraux

Les coefficients binomiaux centraux, dont les premières valeurs sont $1, 2, 6, 20, 70, 252, \ldots$, apparaissent lors de l'énumération de divers objets combinatoires, comme par exemple dans le cas des polyominos convexes dirigés comptés suivant le périmètre [14, 109].

Nous montrons que onze ensembles de permutations à motifs exclus sont en correspondance avec les mots du Grand Dyck, par isomorphisme de leurs arbres de génération (il est cependant nécessaire d'exhiber quatre systèmes de réécriture differénts), et sont donc énumérés par les coefficients binomiaux centraux. De plus, nous prouvons analytiquement qu'il en est de même pour un autre ensemble de permutations à motifs exclus.

Théorème 4.6 *Les ensembles de permutations à motifs exclus $S_n(1234, 1243, 1423, 4123)$, $S_n(1324, 1342, 1432, 4132)$, $S_n(2134, 2143, 2413, 4213)$, $S_n(2314, 2413, 3142, 3241)$, $S_n(1234, 1324, 2134, 2314)$, $S_n(1234, 2134, 2314, 3124)$, $S_n(1324, 2134, 2314, 3124)$, $S_n(1324, 2134, 3124, 3214)$, $S_n(1324, 2314, 3124, 3214)$, $S_n(1342, 2341, 3142, 3241)$ et $S_n(1324, 1342, 2314, 2341)$, sont en bijection avec les mots de $GD_{z,\overline{z}}$ de longueur $2n-2$, et sont donc énumérés par le $(n-1)^{ème}$ coefficient binomial central*

$$\binom{2n-2}{n-1}$$

La même formule énumère les permutations de $S_n(1342, 2341, 2431, 3241)$.

Le schéma général de la preuve qui suit est donné par la figure 4.2 où les ensembles regroupés seront caractérisés par le même système de réécriture.

Proposition 4.7

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck1}$ (voir figure 4.3) caractérisant les arbres de génération $T(2134, 2143, 2413, 4213)$, $T(1234, 1243, 1423, 4123)$ et $T(1324, 1342, 1432, 4132)$ est*
$$\begin{cases} (1,2) \\ (p,t) \rightsquigarrow (1,t+1),(2,t+1),\ldots,(p+1,t+1),\underbrace{(0),(0),\ldots,(0)}_{t-p-1 \text{ fois}} \end{cases}$$
- *L'étiquette (p,t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck1}$ correspondant à une permutation π sur $[n]$ de l'un quelconque des trois arbres de génération vérifie*

$S_n(1234, 1243, 1423, 4123)$

$S_n(1324, 1342, 1432, 4132)$

$S_n(2134, 2143, 2413, 4213)$

$\uparrow$

$*$

-1

$\downarrow$

$S_n(2314, 2413, 3412, 3421)$

$S_n(2314, 2413, 3142, 3241)$

$\uparrow$

$*$

-1

$\downarrow$

$S_n(1342, 2413, 2431, 3142)$

Mots de $GD_{z,\overline{z}}$ de longueur $2n-2$

$S_n(1234, 1324, 2134, 2314)$

$S_n(1234, 2134, 2314, 3124)$

$S_n(1324, 2134, 2314, 3124)$

$S_n(1324, 2134, 3124, 3214)$

$S_n(1324, 2314, 3124, 3214)$

$S_n(1342, 2341, 3142, 3241)$

$\uparrow$

-1

$*$

$\downarrow$

$S_n(3124, 3142, 3214, 3241)$

$S_n(1324, 1342, 2314, 2341)$ $\qquad$ $S_n(1342, 2341, 2431, 3241)$

Figure 4.2 Schéma des bijections entre mots de $GD_{z,\overline{z}}$ et plusieurs ensembles de permutations à motifs exclus.

– $p = \pi^{-1}(n)$ *pour* $\pi \in T(2134, 2143, 2413, 4213)$,

– $p = \min\{i : \pi(i) < \pi(i+1)\}$ *(ou* $p = n$ *si* $\pi = n(n-1)\dots 1$*) pour* $\pi \in T(1234, 1243, 1423, 4123)$,

– $p = maxd(\pi)$ *pour* $\pi \in T(1324, 1342, 1432, 4132)$,

– t *est le nombre de sites actifs de* π.

L'étiquette (0) *indique pour sa part que la permutation correspondante n'a aucun site actif.*

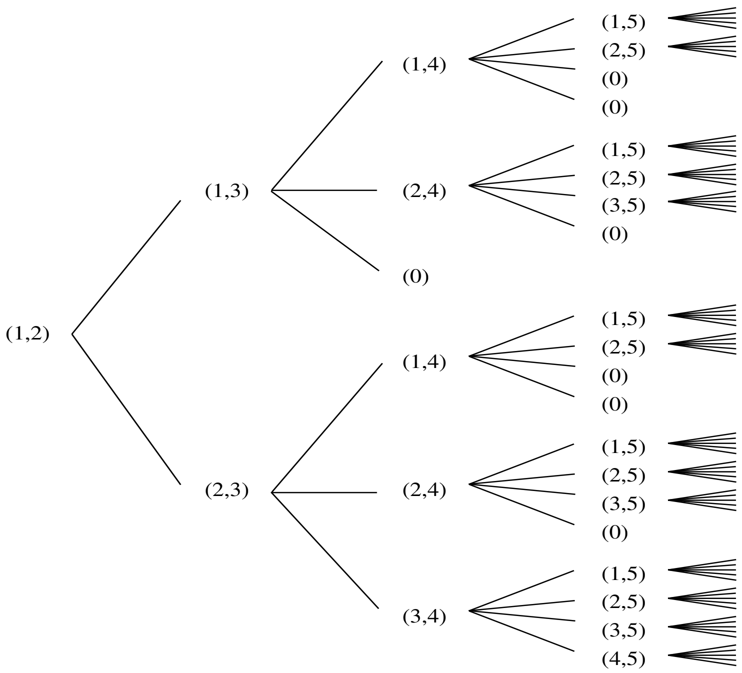


Figure 4.3 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck1}$.

Lemme 4.8 *Les permutations de* $S_n(2134, 2143, 2413, 4213)$ *[resp.* $S_n(1234, 1243, 1423, 4123)$ *et* $S_n(1324, 1342, 1432, 4132)$*] ont soit tous leurs sites actifs, soit aucun lorsqu'elles contiennent une sous-suite de type* 213 *[resp.* 123 *et* 132*].*

Preuve Il suffit de remarquer que $\{2134, 2143, 2413, 4213\} = \{213 \sqcup\!\sqcup\, 4\}$ [resp. $\{1234, 1243, 1423, 4123\} = \{123 \sqcup\!\sqcup\, 4\}$ et $\{1324, 1342, 1432, 4132\} = \{132 \sqcup\!\sqcup\, 4\}$]. $\square$

Preuve de la proposition 4.7. Compte-tenu du lemme précédent, nous pouvons utiliser les travaux de J. West [110] qui a montré que les arbres de génération $T(213)$, $T(123)$ et $T(132)$ sont caractérisés par le système de réécriture $\begin{cases} (1) \\ (f) \quad \leadsto \quad (1), (2), \dots, (f+1) \end{cases}$ pour lequel l'interprétation de l'étiquette f est identique à celle que nous donnons pour le paramètre p de l'étiquette (p,t) dans notre système de réécriture (en fait, $f = p + 1$).

Soit π une permutation appartenant à l'arbre de génération $T(2134, 2143, 2413, 4213)$ [resp. $T(1234, 1243, 1423, 4123)$ et $T(1324, 1342, 1432, 4132)$].

Si π appartient à $T(213)$ [resp. $T(123)$ et $T(132)$], son étiquette est (p,t) et elle engendre $p+1$ permutations appartenant à $T(213)$ [resp. $T(123)$ et $T(132)$] ayant un site actif supplémentaire : leurs étiquettes sont donc $(1,t+1),(2,t+1),\ldots,(p+1,t+1)$. De plus, π engendre $t-(p+1)$ permutations n'appartenant pas à $T(213)$ [resp. $T(123)$ et $T(132)$] ; elles ont donc toutes (0) pour étiquette.
Dans le cas où la permutation π n'appartient pas à $T(213)$ [resp. $T(123)$ et $T(132)$], son étiquette est (0) et elle n'engendre aucune permutation.

Remarquons que la permutation 1 a bien pour étiquette $(1,2)$. □

Proposition 4.9

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck2}$ (voir figure 4.4) caractérisant les arbres de génération $T(2314,2413,3412,3421)$ et $T(2314,2413,3142,3241)$ est*
$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,t) & \rightsquigarrow \quad (B,3),(B,4),\ldots,(B,t+1),(A,t+1) \\ (B,t) & \rightsquigarrow \quad (B,3),(B,4),\ldots,(B,t),(C,t),(A,t) \\ (C,t) & \rightsquigarrow \quad (C,2),(C,3),\ldots,(C,t+1) \end{cases}$$
- *L'étiquette (X,t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck2}$ correspondant à une permutation π sur $[n]$ de l'un quelconque des deux arbres de génération vérifie*
  - *$X=A$ si le dernier site est actif et $\pi(n)=n$,*
  - *$X=B$ si le dernier site est actif et $\pi(n)\neq n$,*
  - *$X=C$ si le dernier site est inactif,*
  - *t est le nombre de sites actifs de π.*

Lemme 4.10 *Pour une permutation π de $S_n(2314,2413,3412,3421)$, nous avons les propriétés suivantes.*

(i) Les premier et avant-dernier sites et celui situé à gauche de n sont actifs.

(ii) Le dernier site est actif si et seulement si π appartient à $S_n(231)$.

(iii) Tous les sites à droite de n jusqu'à l'antépénultième sont inactifs.

(iv) Les autres sites sont actifs si et seulement si tous les éléments situés à leur gauche sont inférieurs à tous ceux situés à leur droite et à la gauche de n.

(v) L'insertion de l'élément $n+1$ dans l'un des sites actifs à gauche de n laisse dans le même état tous les sites situés à gauche de $n+1$ dans la permutation obtenue.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus. En particulier, l'avant-dernier site est toujours actif car seul le motif 2314 pourrait l'inactiver par une sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)$ de type 231 formée sur les $n-1$ premiers éléments de π ; mais alors la sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)\pi(n)$ est de l'un des types 2413, 3412 ou 3421, ces motifs étant tous exclus.

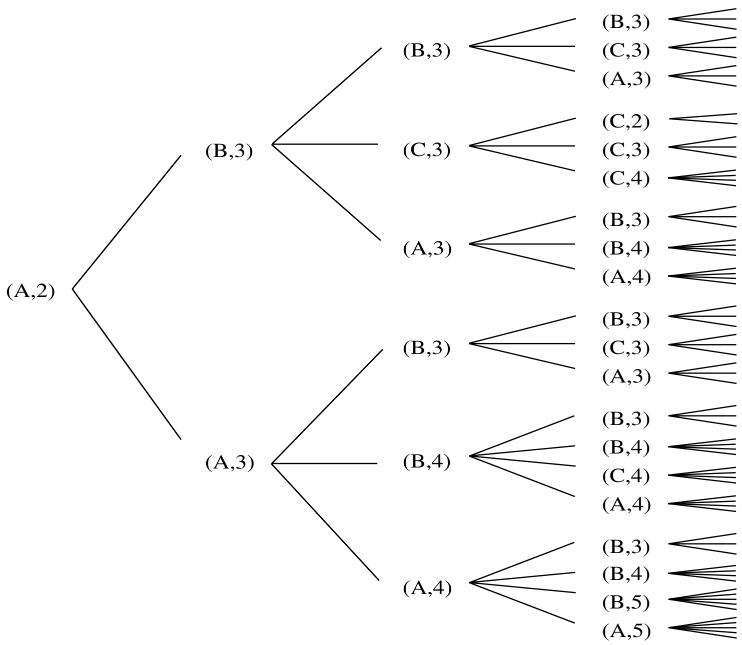


Figure 4.4 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck2}$.

- (ii) résulte du motif 2314 interdit et de la forme des trois autres.
- (iii) permet d'éviter les motifs 3412 et 3421 à partir de la sous-suite $n\pi(n-1)\pi(n)$.
- (iv) résulte de la forme du motif exclu 2413.
- (v) résulte de la forme des motifs exclus.

□

Pour des raisons analogues, nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 4.11 *Pour une permutation π de $S_n(2314, 2413, 3142, 3241)$, nous avons les propriétés suivantes.*

(i) Le premier site et ceux entourant n sont actifs.

(ii) Le dernier site est actif si et seulement si π appartient à $S_n(231)$.

(iii) Les autres sites situés à droite de n sont inactifs.

(iv) Les autres sites sont actifs si et seulement si tous les éléments situés à leur gauche sont inférieurs à tous ceux situés à leur droite et à la gauche de n.

(v) L'insertion de l'élément $n+1$ dans l'un des sites actifs à gauche de n laisse dans le même état tous les sites situés à gauche de $n+1$ dans la permutation obtenue.

Preuve de la proposition 4.9. Clairement, dans les deux arbres de génération des permutations, la permutation 1 doit être étiquetée $(A, 2)$ (elle engendre les deux permutations 12 et 21).
Soit π une permutation de $S_n(2314, 2413, 3412, 3421)$ [resp. $S_n(2314, 2413, 3142, 3241)$] d'étiquette (X, t).

- $X = A$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que le dernier.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [t-1]$.
    Le dernier site reste actif.
    L'étiquette de γ est alors $(B, i+2)$.
  - Insertion dans le dernier site.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(A, t+1)$.
- $X = B$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux derniers sites actifs.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [t-2]$.
    Le dernier site reste actif.
    L'étiquette de γ est alors $(B, i+2)$.
  - Insertion dans l'avant-dernier des sites actifs.
    La sous-suite $n(n+1)\pi(n)$ est de type 231 et inactive le dernier site.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (C, t).
  - Insertion dans le dernier site.
    Le site à gauche de $\pi(n)$ [resp. à droite de n] s'inactive car la sous-suite $n(n+2)\pi(n)(n+1)$ est de type 2413.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (A, t).
- $X = C$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que le dernier site actif.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [t-1]$.
    A droite de $n+1$, seul l'avant-dernier site [resp. le site à droite de $n+1$] reste actif.
    L'étiquette de γ est alors $(C, i+1)$.
  - Insertion dans le dernier site actif.
    Tous les sites actifs à gauche de n restent actifs et les deux sites entourant $n+1$ sont actifs.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(C, t+1)$.

□

Proposition 4.12 *Un arbre de génération des mots de $GD_{z,\overline{z}}$ (voir figure 4.5) est*

$$\begin{cases} \varepsilon & \\ \varepsilon & \rightsquigarrow \quad \overline{z}z, \\ & \quad z\overline{z} \\ x^l\overline{x}w' & \rightsquigarrow \quad x^i\overline{x}x^{l+1-i}\overline{x}w' \text{ pour tout } i \in [0, l+1] \end{cases}$$

où ε est le mot vide, $l > 0$, $x \in \{z, \overline{z}\}$ et $\overline{\overline{z}} = z$.

Preuve Cet arbre de génération est construit de manière analogue à celui obtenu pour les mots de parenthèses en s'intéressant à leur distribution suivant la hauteur initiale (exemple 2.6). □

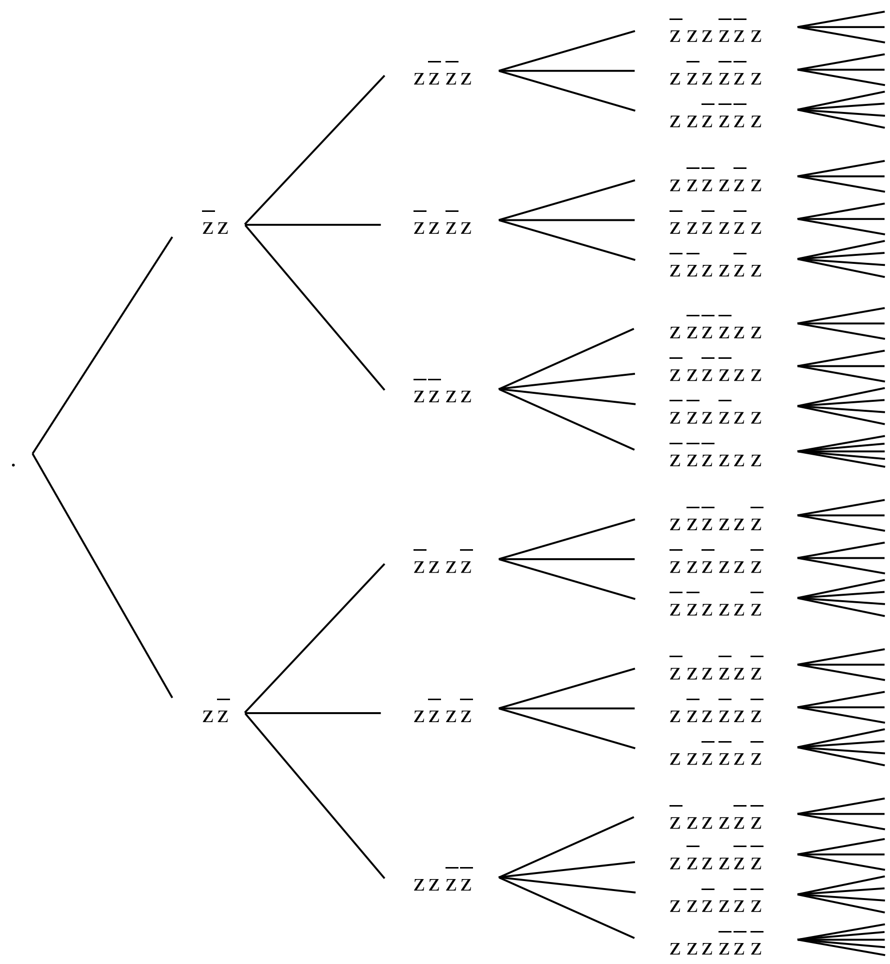


Figure 4.5 Arbre de génération des mots de $GD_{z,\overline{z}}$.

Proposition 4.13

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck3}$ (voir figure 4.6) caractérisant cet arbre de génération des mots de $GD_{z,\overline{z}}$ et les arbres de génération $T(1342, 2413, 2431, 3142)$, $T(1234, 1324, 2134, 2314)$, $T(1234, 2134, 2314, 3124)$, $T(1324, 2134, 2314, 3124)$, $T(1324, 2134, 3124, 3214)$, $T(1324, 2314, 3124, 3214)$ et $T(1342, 2341, 3142, 3241)$ est*
$$\begin{cases} (0) \\ (l) \quad \rightsquigarrow \quad (1),(1),(2),\ldots,(l+1) \end{cases}$$
- *L'étiquette (l) du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck3}$ est telle que*
  - *le mot de $GD_{z,\overline{z}}$ est de la forme $w = x^l\overline{x}w'$ avec $x \in \{z, \overline{z}\}$ et $\overline{\overline{z}} = z$,*
  - *$l+2$ est le nombre de sites actifs d'une permutation de l'un quelconque des sept arbres de génération.*

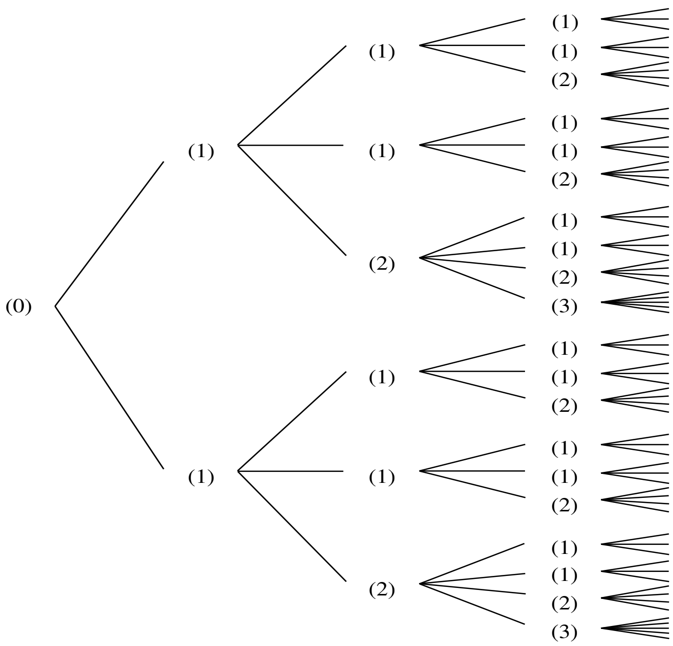


Figure 4.6 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck3}$ caractérisant notamment les mots de $GD_{z,\overline{z}}$.

Lemme 4.14 *Pour une permutation de* $S_n(1342, 2413, 2431, 3142)$*, nous avons les propriétés suivantes.*

(i) Les premier et dernier sites sont actifs.

(ii) Les autres sites actifs sont soit tous situés à gauche de n, soit tous situés à droite de n.

(iii) Un site est actif si et seulement si tous les éléments situés à sa gauche sont soit inférieurs, soit supérieurs à tous ceux situés à sa droite.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Supposons qu'un site situé à gauche [resp. droite] de n soit actif, excepté le premier [resp. dernier]. Alors, tous les sites à droite [resp. gauche] de n sauf le dernier [resp. premier] sont inactifs à cause de la sous-suite $\pi(1)n(n+1)\pi(n)$ [resp. $\pi(1)(n+1)n\pi(n)$] de type 1342 [resp. 2431].
- (iii).
  Considérons un site actif autre que les premier et dernier. Si l'élément n est situé à droite [resp. gauche] de ce site, alors, pour éviter les motifs 2413 et 2431 [resp. 3142 et 1342], tous les éléments à gauche de ce site doivent être inférieurs [resp. supérieurs] à tous ceux à sa droite.
  Soit $k \in [n]$ tel que les k premiers [resp. derniers] éléments de π forment une permutation de $[k]$ et donc que les $n-k$ derniers [resp. premiers] éléments de π forment une permutation de $[k+1, n]$. L'activation du site situé à droite du $k^{ème}$ [resp. $(n-k)^{ème}$] élément de π ne peut créer que des sous-suites de type 1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214, 1243, 2143, 1423, 1432, 4123, 4132, 4213,

4231, 4312, 4321 [resp. 1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214, 2341, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321] dont aucune n'est à exclure.

□

Lemme 4.15 *Si une permutation π appartenant à $S_n(1234, 1324, 2134, 2314)$, [resp. $S_n(1234, 2134, 2314, 3124)$, $S_n(1324, 2134, 2314, 3124)$, $S_n(1324, 2134, 3124, 3214)$, $S_n(1324, 2314, 3124, 3214)$] a $l+2$ sites actifs dans l'arbre de génération correspondant, alors ses $l+2$ premiers sites sont actifs et le type la sous-suite $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(l+1)$ appartient à $S_{l+1}(123, 132, 213, 231) = \{(l+1)l\ldots 1, (l+1)l\ldots 312\}$ [resp. $S_{l+1}(123, 213, 231, 312) = \{(l+1)l\ldots 1, 1(l+1)l\ldots 2\}$, $S_{l+1}(132, 213, 231, 312) = \{12\ldots(l+1), (l+1)l\ldots 1\}$, $S_{l+1}(132, 213, 312, 321) = \{12\ldots(l+1), 23\ldots(l+1)1\}$, $S_{l+1}(132, 231, 312, 321) = \{12\ldots(l+1), 2134\ldots(l+1)\}$].*
De plus, pour une permutation de $S_n(1324, 2314, 3124, 3214)$, le site situé à droite de n est actif.

Preuve Les motifs exclus étant des permutations de S_4 ayant 4 pour dernier élément, lorsqu'un site est inactif, tous ceux à sa droite sont également inactifs. De plus, les trois premiers sites sont actifs.
R. Simion et F.W. Schmidt [95] ont montré que $|S_n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)| = 2$ pour tout $n \geq 2$ lorsque $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ sont des permutations de S_3 différentes deux à deux et vérifiant $\{123, 321\} \not\subset \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$. Il est alors aisé de caractériser les deux permutations à motifs exclus des ensembles correspondants. □

Lemme 4.16 *Une permutation de $S_n(1342, 2341, 3142, 3241)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Les premier, deuxième et dernier sites sont actifs.

(ii) Les autres sites à droite de n sont inactifs.

(iii) L'insertion de l'élément $n+1$ dans l'un des sites actifs à gauche de n laisse dans le même état tous les sites situés à gauche de $n+1$ dans la permutation obtenue.

Preuve

- (i) et (iii) résultent de la forme des motifs exclus.
- (ii). Autrement, la sous-suite $n\pi(\pi^{-1}(n)+1)(n+1)\pi(n)$ serait de type 3142 ou 3241 et la sous-suite $\pi(1)n(n+1)\pi(n)$ serait de type 1342 ou 2341.

□

Preuve de la proposition 4.13. Pour les mots de $GD_{z,\overline{z}}$, le résultat se déduit immédiatement de la proposition 4.12 définissant l'arbre de génération de ces mots.
Considérons maintenant le cas des permutations à motifs exclus. Clairement, l'étiquette de la permutation 1 doit être (0) dans tous les cas. Soit π une permutation de l'un quelconque des arbres de génération des permutations ayant pour étiquette (l).

- $\pi \in S_n(1342, 2413, 2431, 3142)$.
  Il nous suffit de considérer le cas où les l sites actifs autres que les premier et dernier sites sont à gauche de n. En effet, dans le cas contraire, l'étude de π^* se ramène au cas considéré.

- Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1).
- Insertion dans l'un des sites actifs autre que les premier et dernier sites.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [2, l+1]$.
  L'étiquette de γ est alors $(i-1)$.
- Insertion dans le dernier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(l+1)$.

• $\pi \in S_n(1234, 1324, 2134, 2314)$.

- Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(l+1)$.
- Insertion dans le deuxième site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1).
- Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux premiers sites.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [3, l+2]$.
  L'étiquette de γ est alors $(i-2)$.

• $\pi \in S_n(1234, 2134, 2314, 3124)$.
Le type des $l+1$ premiers éléments de π est $(l{+}1)l \dots 1$ [resp. $1(l{+}1)l \dots 2$].

- Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(l+1)$ [resp. (1)].
- Insertion dans le deuxième site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1) [resp. $(l+1)$].
- Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux premiers sites.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [3, l+2]$.
  L'étiquette de γ est alors $(i-2)$ [resp. $(i-2)$].

• $\pi \in S_n(1324, 2134, 2314, 3124)$.
Le type des $l+1$ premiers éléments de π est $12 \dots (l{+}1)$ [resp. $(l{+}1)l \dots 1$].

- Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1) [resp. $(l+1)$].
- Insertion dans le deuxième site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1) [resp. (1)].
- Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux premiers sites.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [3, l+2]$.
  L'étiquette de γ est alors $(i-1)$ [resp. $(i-2)$].

• $\pi \in S_n(1324, 2134, 3124, 3214)$.
Le type des $l+1$ premiers éléments de π est $12 \dots (l{+}1)$ [resp. $23 \dots (l{+}1)1$].

- Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1) [resp. (1)].

– Insertion dans l'un des sites actifs autre que les premier, avant-dernier et dernier sites actifs.
Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [2, l]$.
L'étiquette de γ est alors $(i-1)$ [resp. $(i-1)$].
– Insertion dans l'avant-dernier site actif.
L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (l) [resp. $(l+1)$].
– Insertion dans le dernier site actif.
L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(l+1)$ [resp. (l)].

- $\pi \in S_n(1324, 2314, 3124, 3214)$.
  – Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1).
  – Insertion dans l'un des sites actifs autre que le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [2, l+2]$.
  L'étiquette de γ est alors $(i-1)$.
- $\pi \in S_n(1342, 2341, 3142, 3241)$.
  – Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors (1).
  – Insertion dans l'un des sites actifs autre que le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [2, l+2]$.
  L'étiquette de γ est alors $(i-1)$.

□

Proposition 4.17

- *Le système de réécriture* $\mathcal{S}_{GrandDyck4}$ *(voir figure 4.7) caractérisant les arbres de génération* $T(3124, 3142, 3214, 3241)$ *et* $T(1324, 1342, 2314, 2341)$ *est*
$$\begin{cases} (A,2) & \\ (A,t) & \rightsquigarrow \quad (B,2),(B,3),\ldots,(B,t-1),(A,t+1),(A,t+1) \\ (B,t) & \rightsquigarrow \quad (B,2),(B,3),\ldots,(B,t+1) \end{cases}$$
- *L'étiquette* (X,t) *du système de réécriture* $\mathcal{S}_{GrandDyck4}$ *correspondant à une permutation* π *de l'un quelconque des deux arbres de génération vérifie*
  – $X = A$ *si tous les sites sont actifs,*
  – $X = B$ *sinon,*
  – t *est le nombre de sites actifs de* π.

Lemme 4.18 *Une permutation* π *de* $S_n(3124, 3142, 3214, 3241)$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Tous les sites sont actifs si et seulement si $\pi^{-1}(n) \geq n-1$.

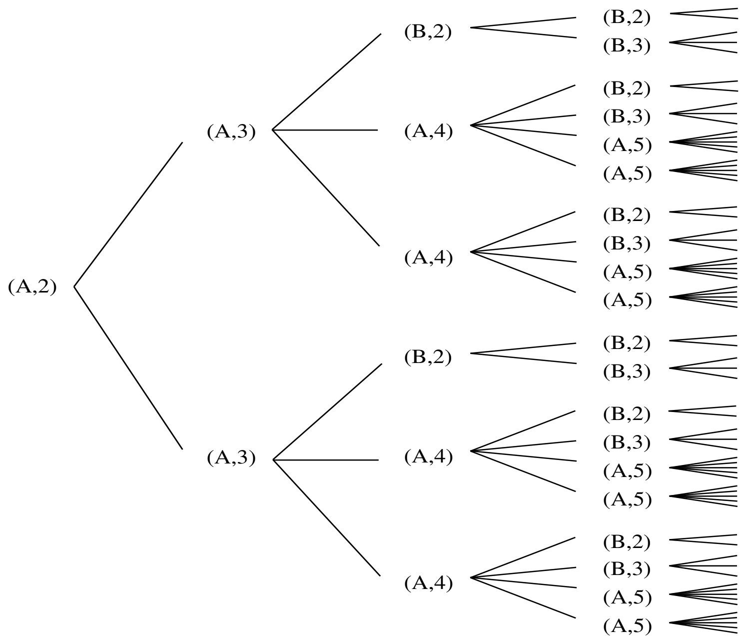


Figure 4.7 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck4}$.

(ii) Si $\pi^{-1}(n) \leq n-2$, tous les sites situés à gauche et à droite de $\pi(\pi^{-1}(n)+1)$ sont respectivement actifs et inactifs.

Preuve D'après la forme des motifs exclus, le site situé à droite de n est actif et aucun des motifs exclus ne peut inactiver le dernier site si $\pi(n-1) = n$.
Ensuite, si $\pi^{-1}(n) \leq n-2$, le site à droite de $\pi(\pi^{-1}(n)+1)$ est inactif car autrement la sous-suite $n\pi(\pi^{-1}(n)+1)(n+1)\pi(n)$ serait de type 3142 ou 3241.
Enfin, tous les sites à droite d'un site inactif sont également inactifs. En effet, d'une part cela est immédiat s'il est inactivé par 3124 ou 3214, et, d'autre part, s'il est inactivé à cause d'une sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)(n+1)\pi(i_3)$ de type 3142 [resp. 3241], alors la sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)(n+1)$ serait de type 3124 [resp. 3214]. $\square$

Lemme 4.19 *Pour une permutation π de $S_n(1324, 1342, 2314, 2341)$, soit $p \in [0, n-1]$ l'élément maximum tel que $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(p) = n(n-1)\dots(n+1-p)$. Alors, nous avons les propriétés suivantes.*

(i) Tous ses sites sont actifs si et seulement si $\pi(n) = n-p$.

(ii) Si $t = \pi^{-1}(n-p)$ appartient à $]p+1, n[$, seuls les t premiers sites de π sont actifs.

Preuve Tout d'abord, tous les sites à droite d'un site inactif sont également inactifs. En effet, d'une part c'est évident s'il est inactivé par 1324 ou 2314, et, d'autre part, s'il est inactivé à cause d'une sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)(n+1)\pi(i_3)$ de type 1342 [resp. 2341], alors la sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)(n+1)$ serait de type 1324 [resp. 2314].

Ensuite, tous les sites à gauche de $n-p$ sont actifs. Autrement, soit il existerait une sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)(n+1)$ de type 1324 ou 2314 avec $i_3 < \pi^{-1}(n-p)$ de sorte que, comme $i_1 > p$, la sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)(n-p)$ serait du même type, soit il existerait une sous-suite $\pi(i_1)\pi(i_2)(n+1)\pi(i_3)$ de type 1342 ou 2341 avec $i_2 < \pi^{-1}(n-p)$ de sorte que, comme $i_1 > p$, les sous-suites $\pi(i_1)\pi(i_2)(n-p)\pi(i_3)$ et $\pi(i_1)\pi(i_2)\pi(i_3)(n-p)$ seraient respectivement du même type et de type 1324 ou 2314.
Enfin, les sites à droite de $n-p$ sont inactifs si $\pi^{-1}(n-p) < n$ puisque la sous-suite $\pi(p+1)(n-p)(n+1)\pi(n)$ est de type 1342 ou 2341; par contre, le dernier site est actif si $\pi(n) = n-p$. □

Preuve de la proposition 4.17. La permutation 1 ayant ses deux sites actifs dans les deux arbres de génération des permutations, son étiquette est $(A, 2)$.
Soit π une permutation de $S_n(1342, 2341, 3142, 3241)$ [resp. $S_n(1324, 1342, 2314, 2341)$] d'étiquette (X, t).

- $X = A$.
  - Insertion dans l'un des $n-1$ premiers [resp. du deuxième à l'avant-dernier] sites de π.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ [resp. $(i+1)^{ème}$] site de π, pour tout $i \in [t-2] = [n-1]$.
    L'étiquette de γ est alors $(B, i+1)$.
  - Insertion dans l'avant-dernier [resp. premier] site de π.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(A, t+1)$.
  - Insertion dans le dernier site de π.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(A, t+1)$.
- $X = B$.
  - Insertion dans l'un des $t-1$ premiers [resp. du deuxième au $t^{ème}$] sites de π.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ [resp. $(i+1)^{ème}$] site de π, pour tout $i \in [t-1]$.
    L'étiquette de γ est alors $(B, i+1)$.
  - Insertion dans le dernier [resp. premier] site actif de π.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(B, t+1)$.

□

Proposition 4.20

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck5}$ (voir figure 4.8) caractérisant l'arbre de génération $T(1342, 2341, 2431, 3241)$ est*

$$\begin{cases} (0,2) \\ (p,t) \quad \rightsquigarrow \quad (t-p-1, t-p+1), \underbrace{(0,2),(0,2),\ldots,(0,2)}_{p \text{ fois}}, (p,p+3),(p,p+4),\ldots,(p,t+1) \end{cases}$$

- *L'étiquette (p,t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck5}$ correspondant à une permutation π de l'arbre de génération vérifie*
  - *$p = 0$ si $\pi(1) = 1$,*
  - *$p+1$ est le nombre de sites actifs situés à gauche du dernier élément de π inférieur à $\pi(1)$ sinon,*

– *t est le nombre de sites actifs de π.*

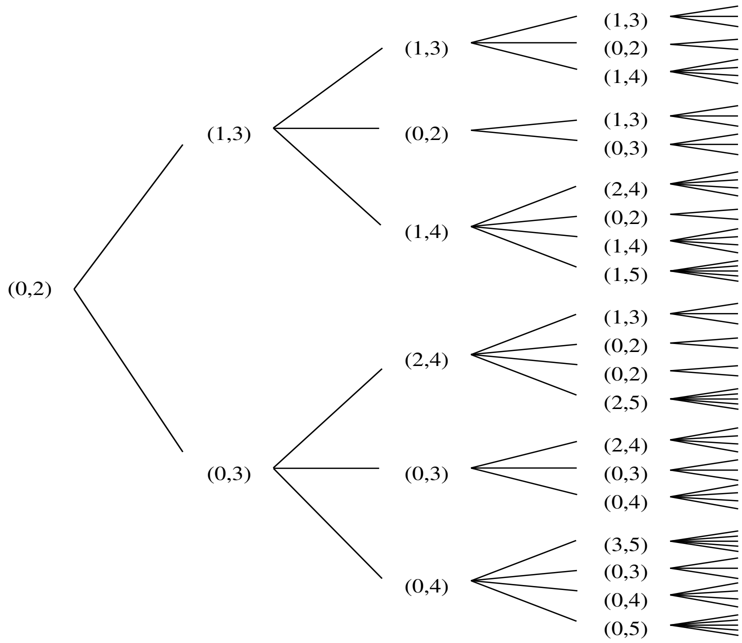


Figure 4.8 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck5}$.

Lemme 4.21 *Une permutation π de $S_n(1342, 2341, 2431, 3241)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Les premier et dernier sites sont actifs.

(ii) Si $\pi(1) \neq n$, tous les sites à droite de n jusqu'à l'avant-dernier sont inactifs.

(iii) A droite du dernier élément de π inférieur à $\pi(1) \neq 1$, un site est actif si et seulement si tous les éléments à sa gauche sont inférieurs à tous ceux à sa droite.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Autrement, la sous-suite $\pi(1)n(n+1)\pi(n)$ serait de type 1342 ou 2341.
- (iii).
  Si un tel site est inactif, en raison d'une sous-suite $\pi(i)\pi(j)(n+1)\pi(l)$ de type 1342, 2341, 3241, ou d'une sous-suite $\pi(j)(n+1)\pi(k)\pi(l)$ de type 2431, alors $\pi(j) > \pi(l)$ et $\pi(j)$ [resp. $\pi(l)$] est à gauche [resp. droite] du site inactif.
  Soient $\pi(j)$ et $\pi(l)$ deux éléments respectivement à gauche et à droite du site considéré, avec $\pi(j) > \pi(l)$; comme $\pi(l) > \pi(1)$, le site est inactif car la sous-suite $\pi(1)\pi(j)(n+1)\pi(l)$ serait de type 1342.

$\square$

Preuve de la proposition 4.20. L'étiquette de la permutation 1 doit être $(0, 2)$.
Soit π une permutation de $S_n(1342, 2341, 2431, 3241)$ d'étiquette (p, t).

- Insertion dans le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le premier site de π.
  Le deuxième site de γ est actif. Les p sites actifs de π, du deuxième au $(p+1)^{ème}$, deviennent inactifs pour γ à cause de la sous-suite $n\pi(1)(n+1)e$ de type 3241 où e est le dernier élément inférieur à $\pi(1)$. Les $t-p-1$ derniers sites actifs de π restent actifs dans γ.
  L'étiquette de γ est alors $(t-p-1, t-p+1)$.
- Insertion dans l'un des sites actifs à gauche du dernier élément inférieur à $\pi(1)$ autre que le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [2, p+1]$.
  Les sites à gauche de $n+1$ dans γ, excepté le premier, sont inactifs car la sous-suite $\pi(1)(n+2)(n+1)e$ est de type 2431 où e est le dernier élément inférieur à $\pi(1)$.
  L'étiquette de γ est alors $(0, 2)$.
- Insertion dans l'un des sites actifs à droite du dernier élément inférieur à $\pi(1)$.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [p+2, t]$.
  Les sites à gauche de $n+1$ dans γ sont inchangés car aucune sous-suite n'est de type 2431.
  L'étiquette de γ est alors $(p, i+1)$.

$\square$

Preuve du théorème 4.6. Il résulte des propositions 4.7, 4.9, 4.13 et 4.17 et des opérations de symétrie par miroir et inverse, comme le montre la figure 4.2. Il nous reste à prouver (analytiquement) que $|S_n(1342, 2341, 2431, 3241)| = \binom{2n-2}{n-1}$. Nous déduisons du système de réécriture $\mathcal{S}_{GrandDyck5}$ les récurrences suivantes.

$$\begin{cases} g_{n,(0,2)} & = \sum_{u=3}^{n} \sum_{q=1}^{u-2} q \cdot g_{n-1,(q,u)} \quad \text{pour tout } n > 1 \\ g_{n,(t-2,t)} & = \sum_{u=0}^{n+1-t} g_{n-1,(u,u+t-1)} \quad \text{pour tout } n > 2 \text{ et } t > 2 \\ g_{n,(p,t)} & = \sum_{u=t-1}^{n} g_{n-1,(p,u)} \quad \text{pour tout } n > 2 \text{ et } 0 \le p < t-2 \\ g_n & = \sum_{t=2}^{n+1} \sum_{p=0}^{t-2} g_{n,(p,t)} \quad \text{pour tout } n \ge 1 \\ g_{1,(0,2)} & = 1 \\ g_{1,\neq(0,2)} & = 0 \end{cases}$$

Des calculs simples permettent de vérifier que $g_{n,(p,t)} = \binom{2n-2-t}{n-3}$ pour tout $n \ge 3$ et $0 \le p \le t-2 \le n-1$ et que $g_n = \binom{2n-2}{n-1}$ pour tout $n \ge 1$. $\square$

4.3 Nombres de Motzkin

Les nombres de Motzkin [75], dont les premières valeurs sont $1, 2, 4, 9, 21, 51, \ldots$, apparaissent dans de nombreux travaux en Combinatoire Enumérative comme par exemple ceux de R. Donaghey [23, 24], R. Donaghey et L.W. Shapiro [25], J. Riordan [82], P. Hanlon [55].

Dans le contexte de nos travaux, S. Gire [45] a montré que les permutations de $S_n(321, 3\bar{1}42)$ sont énumérées par les nombres de Motzkin en établissant une correspondance par isomorphisme d'arbres de génération entre ces permutations et les arbres 1-2 distribués suivant le nombre d'arêtes.

Nous prolongeons ici ces résultats de S. Gire en montrant qu'un autre ensemble de permutations et que deux ensembles d'involutions à motifs exclus sont caractérisés par le même système de réécriture que les arbres 1-2.

Enfin, nous nous intéressons aux permutations vexillaires introduites par A. Lascoux et M.P. Schützenberger [69]. Ces permutations sont exactement celles pour lesquelles les partitions associées aux tables d'inversion (ou codes de Lehmer) de la permutation et de son inverse sont conjuguées. J. West [110] a montré que ces permutations, qui excluent le motif 2143 [72], sont en correspondance avec celles excluant le motif 1234, ce qui a permis de déduire des travaux d'I.M. Gessel [42] une formule les énumérant. Ici, nous conjecturons que les involutions vexillaires sont énumérées par les nombres de Motzkin.

Théorème 4.22 *Les ensembles de permutations à motifs exclus $S_n(321, 3\bar{1}42)$, $S_n(231, 4\bar{1}32)$, et les ensembles d'involutions à motifs exclus $I_n(3412)$, $I_n(4321)$, $I_n(1234)$, sont en correspondance avec les arbres 1-2 ayant n arêtes et les buissons ayant $n-1$ arêtes, et sont donc énumérés par le $n^{\text{ème}}$ nombre de Motzkin*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$$

De plus, les ensembles $I_n(2143)$ et $I_n(1243)$ sont en bijection.

Conjecture 4.23 *Les involutions vexillaires sur $[n]$ sont énumérées par le $n^{\text{ème}}$ nombre de Motzkin et nous avons plus précisément*

$$|I_n(2143)| = |I_n(1432)| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$$

$\boxed{\text{Arbres 1-2 ayant } n \text{ arêtes}}$ [45]

$\boxed{S_n(321, 3\bar{1}42)}$ [45]

$\boxed{\text{Buissons ayant } n-1 \text{ arêtes}}$

$\boxed{S_n(231, 4\bar{1}32)}$

$\boxed{I_n(3412)}$ $\qquad$ $\boxed{I_n(2143)}$ conjecture 4.23

$\boxed{I_n(4321)}$ $\qquad$ $\boxed{I_n(1243)}$ conjecture 4.23

$\updownarrow$

$\boxed{I_n(1234)}$ $\qquad$ $\boxed{I_n(1432)}$ conjecture 4.23

Figure 4.9 Schéma des correspondances entre arbres 1-2, buissons et plusieurs ensembles de permutations et involutions à motifs exclus.

Le schéma général de la preuve qui suit est donné par la figure 4.9 où les ensembles regroupés seront caractérisés par le même système de réécriture.

Proposition 4.24 *(S. Gire [45])*

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin1}$ (voir figure 4.10) caractérisant l'arbre de génération [45] des arbres 1-2 suivant le nombre d'arêtes et l'arbre de génération $T(321, 3\bar{1}42)$ est*
$$\begin{cases} (2) \\ (t) \quad \rightsquigarrow \quad (1), (2), \ldots, (t-1), (t+1) \end{cases}$$
- *L'étiquette (t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin1}$ correspond au nombre de*
  - *sommets de la branche droite ayant au plus un fils (sommets non doubles) pour l'arbre 1-2,*
  - *sites actifs d'une permutation de l'arbre de génération $T(321, 3\bar{1}42)$.*

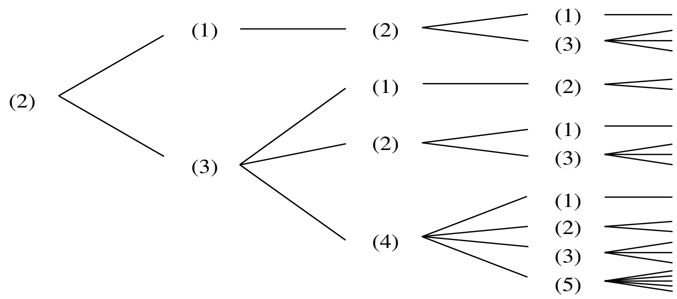


Figure 4.10 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin1}$.

Proposition 4.25

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin1}$ caractérise l'arbre de génération $T(231, 4\bar{1}32)$ et les arbres de génération des involutions par la méthode des points fixes de $I_n(3412)$ et de $I_n(4321)$.*
- *L'étiquette (t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin1}$ correspond au nombre de*
  - *sites actifs dans le cas des permutations de $S_n(231, 4\bar{1}32)$,*
  - *points fixes actifs pour les involutions de $I_n(3412)$ et $I_n(4321)$.*

Lemme 4.26 *Une permutation π de $S_n(231, 4\bar{1}32)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Le dernier site est actif.

(ii) Le $k^{ème}$ site est actif si et seulement si $\pi(k) = k$ et tous les éléments à sa gauche [resp. droite] sont inférieurs [resp. supérieurs] à k.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.

- (ii).
Si le $k^{ème}$ site est actif, comme le motif 231 est interdit, nous avons $\{\pi(k), \pi(k+1), \ldots, \pi(n)\} = [k, n]$. Si $\pi(k) > k$, alors la permutation obtenue en activant le site situé à gauche de $\pi(k)$ contiendrait la sous-suite $(n+1)\pi(k)k$ de type 321 ne faisant pas elle-même partie d'une sous-suite de type 4132.
Si $\pi(k) = k$ et $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k-1)\} = [k-1]$, le motif 231 ne peut clairement pas inactiver le $k^{ème}$ site. Il en est de même pour le motif $4\bar{1}32$ car toute sous-suite $(n+1)\pi(i_1)\pi(i_2)$ de type 321 avec $k < i_1$ fait partie d'une sous-suite $(n+1)k\pi(i_1)\pi(i_2)$ de type 4132.

□

Lemme 4.27 *Une involution π de $I_n(3412)$ [resp. $I_n(4321)$] vérifie les propriétés suivantes.*

(i) L'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$ appartient à $I_{n+1}(3412)$ [resp. $I_{n+1}(4321)$].

(ii) Un point fixe j [resp. i] de π est actif si et seulement s'il n'existe pas de cycle (i, k) [resp. (j, k)] de π avec $i < j < k$.

Preuve

- (i) résulte de la forme du motif exclu.
- (ii). En effet, l'activation du point fixe j [resp. i] engendrerait la sous-suite $k(n+1)ij$ [resp. $(n+1)kji$] de type 3412 [resp. 4321].

□

Remarque 4.28 *Une correspondance directe entre les involutions de $I_n(3412)$ et les mots du langage de Motzkin $P_{x,\overline{x}} \sqcup \{y\}^*$ s'obtient en codant un point fixe par la lettre y et le début et la fin d'un cycle par respectivement les lettres x et $\overline{x}$, deux cycles ne pouvant se chevaucher.*

Preuve de la proposition 4.25. Tout d'abord, la permutation ou l'involution 1 a clairement pour étiquette (2).
Soit π une permutation ou une involution de l'un quelconque des arbres de génération ayant pour étiquette (t).

- $\pi \in S_n(231, 4\bar{1}32)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que le dernier site.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [t-1]$.
    L'étiquette de γ est alors (i).
  - Insertion dans le dernier site.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
- $\pi \in I_n(3412)$ [resp. $I_n(4321)$].
  - Transformation d'un point fixe actif en un cycle.
    Soit γ l'involution obtenue en transformant le $i^{ème}$ point fixe actif de π en un cycle avec l'élément $n+1$, pour tout $i \in [t-1]$.
    L'étiquette de γ est alors (i) [resp. $(t-i)$].

– Ajout d'un point fixe.
  L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors $(t+1)$ [resp. $(t+1)$].

□

Proposition 4.29 *Un arbre de génération des mots de $P_{x,\overline{x}} \backslash \{\{x,\overline{x}\}^* x x w \overline{x}\overline{x} \{x,\overline{x}\}^* : w \in P_{x,\overline{x}}\}$ codant les buissons (voir figure 4.11) est*

$$\begin{cases} x\overline{x}x\overline{x} \\ w_1 w_2 \ldots\ldots w_t \ \rightsquigarrow \ w_1 w_2 \ldots w_{i-1} x w_i w_{i+1} \ldots w_t \overline{x} \text{ pour tout } i \in [t-1] \cup \{t+1\} \end{cases}$$

où les w_i sont des mots de parenthèses premiers, pour tout $i \in [t]$.

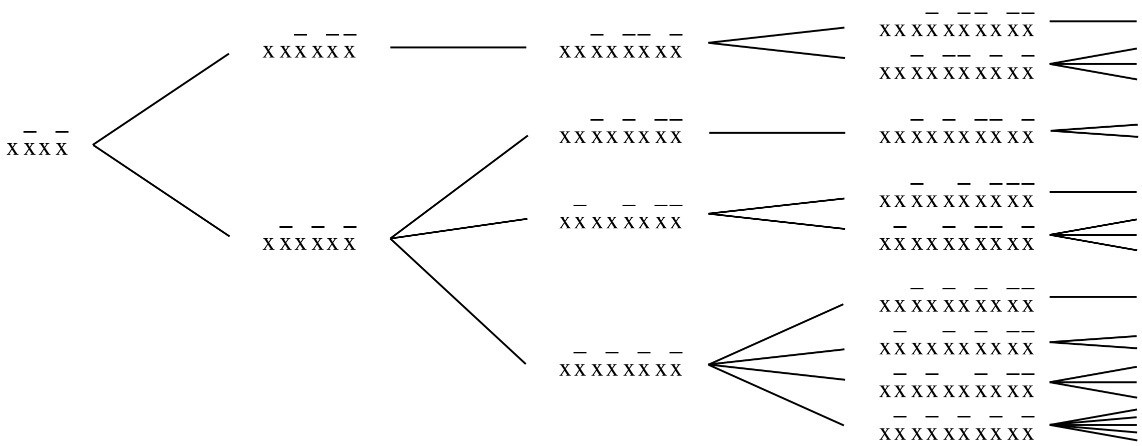


Figure 4.11 Arbre de génération des mots codant les buissons.

Cet arbre de génération des buissons, du fait de sa construction, est clairement caractérisé par le système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin1}$.

Nous allons maintenant caractériser les ensembles d'involutions $I_n(2143)$ et $I_n(1243)$ à l'aide des deux systèmes de réécriture suivants.

Lemme 4.30 *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin2}$ (voir figure 4.12) donné par*

$$\begin{cases} (1) & & \\ (t) & \rightsquigarrow & (t+1) \\ & \overset{2}{\rightsquigarrow} & (2,t+1),(3,t+1),\ldots,(t+1,t+1) \\ (p,t) & \rightsquigarrow & (p,p) \\ & \overset{2}{\rightsquigarrow} & (2,t+1),(3,t+1),\ldots,(p+1,t+1),(p,t),(p,t-1),\ldots,(p,p+1) \end{cases}$$

et le système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin2'}$ (voir figure 4.13) défini par

$$\left\{\begin{array}{lll}(1) & & \\ (1) & \rightsquigarrow & (2) \\ & \stackrel{2}{\rightsquigarrow} & (3) \\ (t) & \rightsquigarrow & (t,t) \\ & \stackrel{2}{\rightsquigarrow} & (t+2),(2,t+1),(3,t+1),\ldots,(t,t+1) \textit{ pour tout } t \geq 2 \\ (p,t) & \rightsquigarrow & (p,p) \\ & \stackrel{2}{\rightsquigarrow} & (p+1,t+1),(2,t+1),(3,t+1),\ldots,(p,t+1),(p,t),(p,t-1),\ldots,(p,p+1)\end{array}\right.$$

sont équivalents dans le sens où les arbres de dérivation qu'ils engendrent possèdent des étiquettes identiques à chaque niveau.

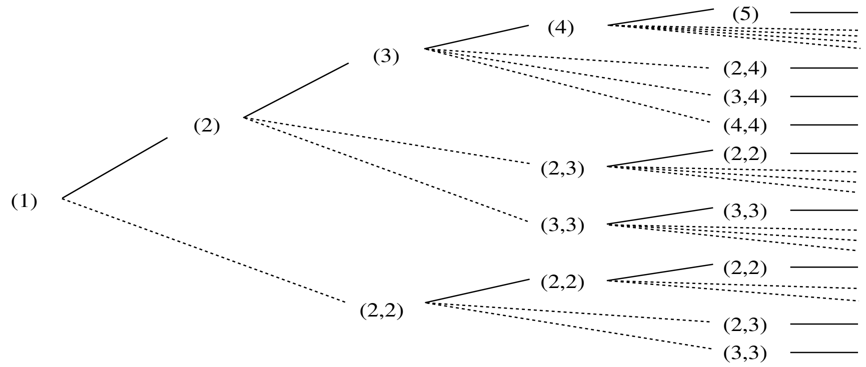


Figure 4.12 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin2}$.

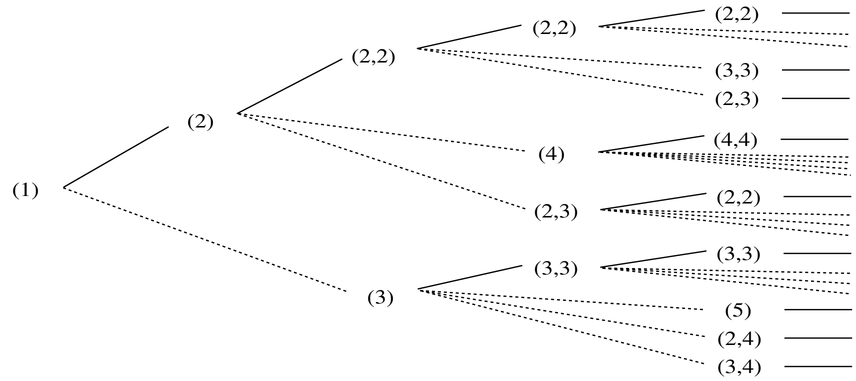


Figure 4.13 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin2'}$.

Preuve La transformation de $\mathcal{S}_{Motzkin2}$ en $\mathcal{S}_{Motzkin2'}$ s'effectue en remplaçant pour tout $x \geq 1$

- la règle $(x+1) \rightsquigarrow (x+2)$ par la règle $(x) \stackrel{2}{\rightsquigarrow} (x+2)$,
- la règle $(x) \stackrel{2}{\rightsquigarrow} (x+1,x+1)$ par la règle $(x+1) \rightsquigarrow (x+1,x+1)$.

Les autres règles sont conservées. □

Proposition 4.31

- *L'arbre de génération des involutions de $I_n(2143)$ [resp. $I_n(1243)$] par la méthode récurrente est caractérisé par le système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin2}$ [resp. $\mathcal{S}_{Motzkin2'}$].*
- *Les étiquettes (t) et (p,t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Motzkin2}$ [resp. $\mathcal{S}_{Motzkin2'}$] correspondant à une involution π sur $[n]$ de l'arbre de génération vérifient*
  - *$p = \min\{d : \pi(d-1) > \pi(d)\}$ [resp. $\min\{m : \pi(m-1) < \pi(m)\}$] pour $\pi \in I_n(2143)$ [resp. $I_n(1243)$] et $\pi \neq 12\ldots n$ [resp. $n(n-1)\ldots 1$],*
  - *t est le nombre de sites actifs de π, c'est à dire le nombre d'involutions respectivement de $I_{n+2}(2143)$ [resp. $I_{n+2}(1243)$] obtenues à partir de π.*

Lemme 4.32 *Une involution π de $I_n(2143)$ [resp. $I_n(1243)$] d'étiquette (t) ou (p,t) définie conformément à la proposition 4.31 vérifie les propriétés suivantes.*

(i) L'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$ appartient à $I_{n+1}(2143)$ [resp. $I_{n+1}(1243)$].

(ii) Les sites de l'involution $12\ldots n$ [resp. $n(n-1)\ldots 1$], qui appartient à $I_n(2143)$ [resp. $I_n(1243)$] pour tout $n \geq 0$, sont tous actifs.

(iii) L'involution $\pi \neq 12\ldots n$ [resp. $n(n-1)\ldots 1$] a pour étiquette (p,t). Ses p premiers sites sont actifs et le dernier site est inactif.

(iv) Si $\pi \neq 12\ldots n$ [resp. $n(n-1)\ldots 1$] a pour étiquette (p,t), l'ajout du point fixe $(n+1)$ ou l'insertion d'un cycle $(k, n+2)$ avec $k > p$ dans l'un des sites actifs de π inactive, dans l'involution γ ainsi obtenue, tous les sites situés entre $\gamma(p)$ et $n+1$ ou entre $\gamma(p)$ et $n+2$. Si $\pi \neq 12\ldots n$ [resp. $n(n-1)\ldots 1$], l'insertion d'un cycle $(k, n+2)$ dans l'un des sites actifs de π laisse dans le même état tous les sites situés à droite de $n+2$ dans l'involution γ ainsi obtenue.

Preuve

- (i) et (ii) résultent de la forme du motif exclu.
- (iii).
  - Etudions l'involution sur $[n+2]$ obtenue en insérant le couple $(i, n+2)$ avec $i \in [p]$ en incrémentant d'une unité les éléments de π supérieurs ou égaux à i.
    Les éléments à gauche de l'élément $n+2$ forment toujours une sous-suite croissante [resp. décroissante] ce qui interdit à $n+2$ de jouer le rôle de 4 dans le motif 2143 [resp. 1243].
    Par définition, nous avons $\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(p-1) > \pi(p)$ [resp. $\pi(1) > \pi(2) > \cdots > \pi(p-1) < \pi(p)$]. Comme π est une involution, nous avons $\pi^{-1}(1) < \pi^{-1}(2) < \cdots < \pi^{-1}(p-1) > \pi^{-1}(p)$ [resp. $\pi^{-1}(1) > \pi^{-1}(2) > \cdots > \pi^{-1}(p-1) < \pi^{-1}(p)$]. Cela interdit à i de jouer le rôle de 3 dans le motif 2143 [resp. 1243] puisque tous les éléments inférieurs à i forment une sous-suite croissante [resp. décroissante].

  - Le dernier site est inactif car autrement la sous-suite $\pi(1)\pi(p)(n+2)(n+1)$ serait de type 2143 [resp. 1243].

- (iv).
  - En effet, la sous-suite $\gamma(1)\gamma(p)(n+1)$ ou $\gamma(1)\gamma(p)(n+2)$ de type 213 [resp. 123] et inactive les sites à droite de $\gamma(p)$ et ceux à gauche de $n+1$ ou $n+2$.
  - Si le $l^{ème}$ site de γ avec $l > k$ est inactif, le $(l-1)^{ème}$ site de π l'est également. En effet, le seul cas à considérer serait l'existence d'une sous-suite $\gamma^+(i_1)\gamma^+(i_2)(n+4)k$ ou $\gamma^+(i_1)\gamma^+(i_2)(n+3)l$ avec $i_2 < l$ ou $i_2 < k$ qui soit de type 2143 [resp. 1243], où $\gamma^+(j) = \gamma(j)$ ou $\gamma(j)+1$ selon que $\gamma(j) < l$ ou $\geq l$. Dans ce cas, la sous-suite $\gamma(i_1)\gamma(i_2)(n+2)(l-1)$ serait du même type.

□

Preuve de la proposition 4.31. Clairement, l'étiquette de l'involution ε est (1).
Soit π une involution de l'un des arbres de génération par la méthode récurrente.

- $\pi \in I_n(2143)$.
  - $\pi = 12\ldots n$ a pour étiquette (t) avec $t = n+1$.
    - Ajout d'un point fixe engendrant l'involution $12\ldots(n+1)$.
      L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
    - Insertion dans l'un des sites actifs.
      Soit γ l'involution obtenue en insérant le cycle $(i, n+2)$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [t]$.
      L'étiquette de γ est alors $(i+1, t+1)$.
  - $\pi \neq 12\ldots n$ a pour étiquette (p, t).
    - Ajout d'un point fixe engendrant l'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$.
      L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors (p, p).
    - Insertion dans l'un des p premiers sites.
      Soit γ l'involution obtenue en insérant le cycle $(i, n+2)$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [p]$.
      L'étiquette de γ est alors $(i+1, t+1)$.
    - Insertion dans l'un des $t-p$ derniers sites actifs.
      Soit γ l'involution obtenue en insérant le cycle $(i, n+2)$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [p+1, t]$.
      L'étiquette de γ est alors $(p, p+1+t-i)$.

- $\pi \in I_n(1243)$.
  - $\pi = \varepsilon$ a pour étiquette (1).
    Elle permet d'engendrer les involutions 1 d'étiquette (2) et 21 d'étiquette (3).
  - $\pi = n(n-1)\ldots 1$ a pour étiquette (t) avec $t = n+1$, pour tout $n > 0$.
    - Ajout d'un point fixe engendrant l'involution $n(n-1)\ldots 1(n+1)$.
      L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors (t, t).
    - Insertion dans le premier site (engendrant l'involution $(n+2)(n+1)\ldots 1$).
      L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors $(t+2)$.
    - Insertion dans l'un des sites actifs autre que le premier site.
      Soit γ l'involution obtenue en insérant le cycle $(i, n+2)$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout

$i \in [2, t]$.
L'étiquette de γ est alors $(i, t+1)$.

– $\pi \neq n(n-1)\dots 1$ a pour étiquette (p, t).
  * Ajout d'un point fixe engendrant l'involution $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)(n+1)$.
    L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors (p, p).
  * Insertion dans le premier site (engendrant l'involution $(n+2)(\pi(1)+1)(\pi(2)+1)\dots(\pi(n)+1)1)$.
    L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors $(p+1, t+1)$.
  * Insertion dans l'un des p premiers sites autre que le premier site.
    Soit γ l'involution obtenue en insérant le cycle $(i, n+2)$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [2, p]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i, t+1)$.
  * Insertion dans l'un des $t-p$ derniers sites actifs.
    Soit γ l'involution obtenue en insérant le cycle $(i, n+2)$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [p+1, t]$.
    L'étiquette de γ est alors $(p, p+1+t-i)$.

□

Preuve du théorème 4.22. Il résulte des propositions 4.24, 4.25, 4.29 et 4.31.
De plus, les ensembles d'involutions $I_n(4321)$ et $I_n(1234)$ sont en bijection puisque les tableaux de Young standard correspondant à ces involutions par l'algorithme de Robinson-Schensted sont transposés l'un de l'autre. □

4.4 Nombres de Schröder

Les nombres de Schröder [90], dont les premières valeurs sont $1, 2, 6, 22, 90, 394, \dots$, sont liés à l'énumération de nombreux objets combinatoires classiques. Ils apparaissent dans les travaux de D.E. Knuth [62], G. Kreweras [66], D.G. Rogers [84], D.G. Rogers et L.W. Shapiro [86, 87], D. Gouyou-Beauchamps et B. Vauquelin [50], L.W. Shapiro et A.B. Stephens [94]. Notons que, parfois, les nombres $1, 3, 11, 45, 197, \dots$ sont également appelés nombres de Schröder.

Récemment, J. West [110, 112] a montré que les permutations excluant les deux motifs 2413 et 3142 sont énumérés par les nombres de Schröder. S. Gire [45] a pour sa part prolongé ce résultat en montrant que ces permutations sont en correspondance avec celles excluant les deux motifs 3124 et 3214 et avec les arbres 1-2 distribués suivant le nombre de sommets internes. En fait, les arbres de génération de ces trois ensembles sont caractérisés par le même système de réécriture.
Nous montrons que huit nouveaux ensembles de permutations à motifs exclus ont des arbres de génération également caractérisés par ce système de réécriture, et sont donc dénombrés par les nombres de Schröder.

Théorème 4.33 *Les ensembles de permutations à motifs exclus* $S_n(1234, 2134)$, $S_n(1324, 2134)$, $S_n(1324, 2314)$, $S_n(2134, 3124)$, $S_n(2314, 3124)$, $S_n(1342, 2341)$, $S_n(3142, 3241)$, $S_n(3412, 3421)$,

$S_n(2413, 3142)$ et $S_n(3124, 3214)$ sont en bijection avec les arbres 1-2 ayant $n-1$ sommets internes et sont donc énumérés par le $(n-1)^{ème}$ nombre de Schröder

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{n-1-i} c_i$$

Proposition 4.34 *(J. West [110, 112])*

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ (voir figure 4.14) caractérisant l'arbre de génération $T(2413, 3142)$ est*
$$\begin{cases} (2) \\ (t) \quad \rightsquigarrow \quad (3), (4), \ldots, (t+1), (t+1) \end{cases}$$
- *L'étiquette (t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ correspond au nombre de sites actifs de la permutation associée dans l'arbre de génération.*

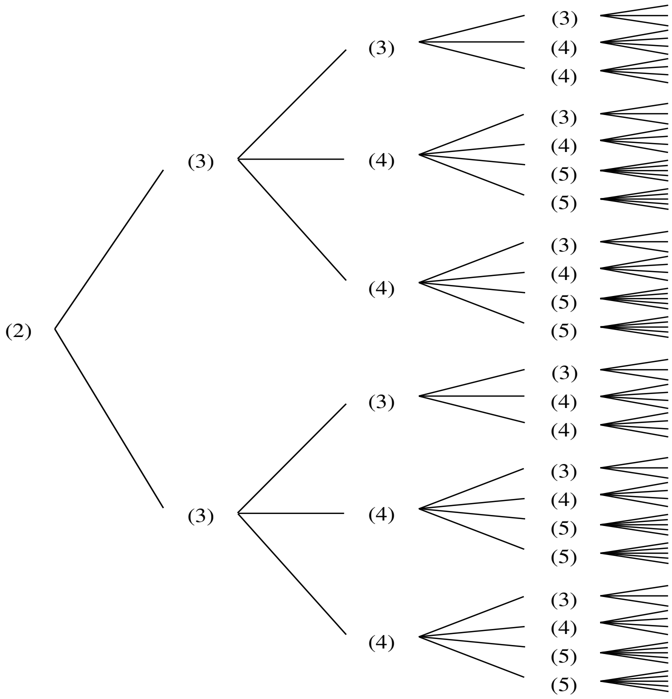


Figure 4.14 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ caractérisant notamment les arbres 1-2 suivant le nombre de sommets internes.

Proposition 4.35 *(S. Gire [45])*

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ caractérise l'arbre de génération [45] des arbres 1-2 suivant le nombre de sommets internes et l'arbre de génération $T(3124, 3214)$.*
- *L'étiquette (t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ correspond au nombre de*

– *mots premiers du mot de Schröder (ou mot de Motzkin) codant l'arbre 1-2 augmenté de 2,*
– *sites actifs de la permutation associée dans l'arbre de génération.*

Proposition 4.36

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ caractérise les arbres de génération $T(1234, 2134)$, $T(1324, 2134)$, $T(1324, 2314)$, $T(2134, 3124)$, $T(2314, 3124)$, $T(1342, 2341)$, $T(3142, 3241)$ et $T(3412, 3421)$.*
- *L'étiquette (t) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Schröder}$ correspond au nombre de sites actifs de la permutation associée pour l'un quelconque des huit arbres de génération.*

Lemme 4.37 *Pour une permutation de $S_n(1234, 2134)$, $S_n(1324, 2134)$, $S_n(1324, 2314)$, $S_n(2134, 3124)$, $S_n(2314, 3124)$, $S_n(1342, 2341)$, $S_n(3142, 3241)$, $S_n(3412, 3421)$, l'insertion de l'élément $n+1$ dans l'un des sites actifs laisse dans le même état tous les sites situés à gauche de $n+1$ dans la permutation obtenue.*

Preuve En effet, tous les motifs exclus sont des permutations de S_4 pour lesquelles l'élément 3 est situé à gauche de l'élément 4. □

Lemme 4.38 *Si une permutation π appartenant à $S_n(1234, 2134)$ [resp. $S_n(1324, 2134)$, $S_n(1324, 2314)$, $S_n(2134, 3124)$, $S_n(2314, 3124)$] a t sites actifs dans l'arbre de génération correspondant, alors ses t premiers sites sont actifs et le type la sous-suite $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(t-1)$ appartient à $S_{t-1}(123, 213)$ [resp. $S_{t-1}(132, 213)$, $S_{t-1}(132, 231)$, $S_{t-1}(213, 312)$, $S_{t-1}(231, 312)$]. De plus, pour une permutation de $S_n(1324, 2314)$ ou $S_n(2314, 3124)$, le site situé à droite de n est actif.*

Preuve Ce résultat se déduit clairement de la forme des motifs exclus dont le dernier élément 4 est aussi le plus grand élément. □

Remarque 4.39

(i) $S_n(123, 213) = \{\pi : \forall \pi(i) \in [2, n], |\{j : j < i, \pi(j) < \pi(i)\}| \in \{0, 1\}\}$.

(ii) $S_n(132, 213) = \{\pi : \exists\ 0 = e_0 < e_1 < \cdots < e_l = n \text{ tel que }$
$\pi = (e_{l-1}+1)(e_{l-1}+2)\ldots e_l(e_{l-2}+1)(e_{l-2}+2)\ldots e_{l-1}\ldots(e_0+1)(e_0+2)\ldots e_1\}$.

(iii) $S_n(132, 231) = \{\pi : 1 \leq j < i = \pi^{-1}(1) < k \leq n, \pi(j) > \pi(j+1) \text{ et } \pi(k-1) < \pi(k)\}$.

(iv) $S_n(213, 312) = \{\pi : 1 \leq j < i = \pi^{-1}(n) < k \leq n, \pi(j) < \pi(j+1) \text{ et } \pi(k-1) > \pi(k)\}$.

(v) $S_n(231, 312) = \{\pi : \exists\ 0 = e_0 < e_1 < \cdots < e_l = n \text{ tel que }$
$\pi = e_1(e_1-1)\ldots(e_0+1)e_2(e_2-1)\ldots(e_1+1)\ldots e_l(e_l-1)\ldots(e_{l-1}+1)\}$.

Preuve R. Simion et F.W. Schmidt [95] ont montré que $|S_n(123,213)| = |S_n(132,213)| = |S_n(132,231)| = |S_n(213,312)| = |S_n(231,312)| = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Afin de n'étudier que les cas utiles, remarquons que $\{132,231\} = \{213,312\}^c$ et $\{132,213\} = \{231,312\}^*$. Ensuite, notons que les arbres de génération des permutations $T(123,213)$, $T(132,213)$, $T(132,231)$ sont caractérisés par le système de réécriture $\left\{ \begin{array}{lcl} (2) & & \\ (2) & \rightsquigarrow & (2),(2) \end{array} \right.$ pour lequel l'étiquette correspond au nombre de sites actifs; plus précisément, les deux sites actifs sont respectivement les deux premiers, le premier et celui à droite de n, le premier et le dernier. Nous en déduisons alors la caractérisation des permutations à motifs exclus des ensembles correspondants. □

Lemme 4.40 *Une permutation de $S_n(1342,2341)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Les deux premiers et le dernier sites sont actifs.

(ii) Si $\pi(1) \neq n$, les sites à droite de n jusqu'à l'avant-dernier sont inactifs.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Autrement, la sous-suite $\pi(1)n(n+1)\pi(n)$ serait de type 1342 ou 2341.

□

Lemme 4.41 *Une permutation de $S_n(3142,3241)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Les deux premiers sites, celui situé à droite de n et le dernier sont actifs.

(ii) Tous les autres sites à droite de n sont inactifs.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Autrement, la sous-suite $n\pi(\pi^{-1}(n)+1)(n+1)\pi(n)$ serait de type 3142 ou 3241.

□

Lemme 4.42 *Une permutation de $S_n(3412,3421)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Le premier et les deux derniers sites sont actifs.

(ii) Les sites à droite de n jusqu'à l'antépénultième sont inactifs.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Autrement, la sous-suite $n(n+1)\pi(n-1)\pi(n)$ serait de type 3412 ou 3421.

□

Preuve de la proposition 4.36. La permutation 1 ayant ses deux sites actifs, pour chacun des ensembles considérés, son étiquette est (2).
Soit π une permutation de l'un quelconque des arbres de génération des permutations ayant pour étiquette (t).

- $\pi \in S_n(1234, 2134)$.
  - Insertion dans l'un des deux premiers sites.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux premiers sites.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [3, t]$.
    L'étiquette de γ est alors (i).

- $\pi \in S_n(1324, 2134)$.
  Soit $k = \pi(j) = \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t-1)\}$.
  - Insertion dans le premier site ou dans le site situé à droite de k.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
  - Insertion dans l'un des sites à gauche de k autre que le premier site.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [2, j]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i+1)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs situé à droite de k autre que le premier d'entre eux.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [j+2, t]$.
    L'étiquette de γ est alors (i).

- $\pi \in S_n(1324, 2314)$.
  - Insertion dans le premier site ou dans le dernier site actif.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que les premier et dernier sites actifs.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [2, t-1]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i+1)$.

- $\pi \in S_n(2134, 3124)$.
  Soit $k = \pi(j) = \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(t-1)\}$.
  - Insertion dans l'un des sites à gauche de k autre que le dernier d'entre eux.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [j-1]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i+2)$.
  - Insertion dans l'un des sites entourant k.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs à droite de k autre que le premier d'entre eux.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site de π, pour tout $i \in [j+2, t]$.
    L'étiquette de γ est alors (i).

- $\pi \in S_n(2314, 3124)$.
  Reprenons les notations de la remarque 4.39 selon lesquelles la sous-suite $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(t-1)$ est

de type $\tau = e_1(e_1-1)\dots(e_0+1)e_2(e_2-1)\dots(e_1+1)\dots e_l(e_l-1)\dots(e_{l-1}+1)$ avec $0 = e_0 < e_1 < \dots < e_l = t-1$.

- Insertion dans le premier site ou dans l'un des sites actifs correspondant à une montée, autre que le dernier site actif.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $(e_j+1)^{ème}$ site de π (c'est à dire dans le site situé à gauche de e_{j+1} relativement à τ), pour tout $j \in [0, l-1]$.
  L'étiquette de γ est alors $(e_{j+1}+2)$.
- Insertion dans l'un des sites actifs correspondant à une descente autre que le dernier site actif.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $(e_j+i)^{ème}$ site de π (c'est à dire dans l'un des sites situés entre e_{j+1} et e_j+1 relativement à τ), pour tout $j \in [0, l-1]$ et pour tout $i \in [2, e_{j+1}-e_j]$.
  L'étiquette de γ est alors (e_j+i+1).
- Insertion dans le dernier site actif.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.

Notons que les insertions dans les $t-1$ premiers sites engendrent chacune des étiquettes $(3), (4), \dots, (t+1)$ exactement une fois puisque les étiquettes générées vont de e_0+3 à e_l+2.

- $\pi \in S_n(1342, 2341)$.
  - Insertion dans le premier ou dernier site.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que les premier et dernier sites.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [2, t-1]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i+1)$.
- $\pi \in S_n(3142, 3241)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux derniers sites actifs.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [t-2]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i+2)$.
  - Insertion dans l'avant-dernier des sites actifs ou dans le dernier site.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.
- $\pi \in S_n(3412, 3421)$.
  - Insertion dans l'un des sites actifs autre que les deux derniers sites.
    Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [t-2]$.
    L'étiquette de γ est alors $(i+2)$.
  - Insertion dans l'un des deux derniers sites.
    L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(t+1)$.

$\square$

Preuve du théorème 4.33. Il résulte des propositions 4.34, 4.35 et 4.36. $\square$

4.5 Systèmes de réécriture pour les tableaux de Young standard bornés

L'algorithme de Robinson-Schensted [83, 89] donne une correspondance entre permutations sur $[n]$ et paires de tableaux de Young standard de même forme $\lambda \vdash n$. Cette correspondance met en évidence de nombreuses propriétés et permet en particulier la lecture de certains paramètres des permutations sur les tableaux associés.
Par exemple, la longueur de la plus longue sous-suite croissante [resp. décroissante] d'une permutation est la longueur [resp. hauteur] des tableaux correspondants [89]. Rappelons que des résultats plus fins, caractérisant exactement la forme des tableaux, ont été obtenus par C. Greene [51]. Pour sa part, M.P. Schützenberger [92] a montré que lorsque la permutation considérée est une involution, les deux tableaux obtenus par l'algorithme de Robinson-Schensted sont identiques.

Ainsi, s'intéresser aux paires de tableaux de même forme et aux tableaux de Young standard de longueur [resp. hauteur] au plus k revient à considérer respectivement les permutations et les involutions excluant le motif identité $12\dots(k{+}1)$ [resp. miroir de l'identité $(k{+}1)k\dots1$]. En effet, l'exclusion de ces motifs consiste à interdire des sous-suites croissantes [resp. décroissantes] de longueur $k+1$.

Ce problème, que nous abordons ici sous une forme purement combinatoire, a été considéré dans la thèse d'I. Schur. Depuis, de nombreux auteurs se sont intéressés au dénombrement des paires de tableaux de Young standard de hauteur bornée [73, 62, 85, 95, 42, 110] et des tableaux de Young standard de hauteur bornée [79, 47, 48, 49, 99, 118, 37]. Nous pouvons en particulier citer les résultats asymptotiques obtenus par A. Regev [79], ainsi que les conjectures énoncées par F. Bergeron, L. Favreau et D. Krob [6].

Notre apport consiste ici à établir des systèmes de réécriture caractérisant les arbres de génération des permutations de $S_n(12\dots(k{+}1))$ et des involutions de $I_n(12\dots(k{+}1))$, et à en déduire des équations de récurrence dans le cas des permutations de $S_n(12\dots(k{+}1))$. Malheureusement, leur complexité ne nous a pas permis de pouvoir les exploiter.

Avant de présenter notre contribution à ce problème, rappelons tout d'abord les résultats connus dans ce cadre.

$\lvert S_n(123)\rvert = c_n$	P.A. MacMahon [73]
$\lvert S_n(1234)\rvert = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{n}{k}^2\frac{3k^2+2k+1-n-2kn}{(k+1)^2(k+2)(n-k+1)}$	I.M. Gessel [42]
$\lvert I_n(123)\rvert = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$	
$\lvert I_n(1234)\rvert = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2i}c_i$	A. Regev [79]
$\lvert I_n(12345)\rvert = c_{\lfloor \frac{n+1}{2}\rfloor}.c_{\lceil \frac{n+1}{2}\rceil}$	D. Gouyou-Beauchamps [49]
$\lvert I_n(123456)\rvert = 6\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2i}.c_i.\frac{(2i+2)!}{(i+2)!(i+3)!}$	D. Gouyou-Beauchamps [49]

4.5.1 Paires de tableaux de Young standard de hauteur bornée

J. West [110] s'est intéressé aux arbres de génération $T(123)$ et $T(1234)$. Nous généralisons ses résultats en donnant une caractérisation de l'arbre de génération $T(12\ldots(k+1))$, et ce pour tout entier k.

Définition 4.43 *Nous appelons* $i^{ème}$ suite des minima *d'une permutation π la suite constituée des minima à gauche de la sous-suite obtenue en supprimant de π les éléments des $i-1$ premières suites des minima.*
Nous notons p_i l'indice dans σ du premier élément constituant la $i^{ème}$ suite des minima de σ, avec $p_i = n+1$ si si cette suite est vide, et adoptons par convention le fait que $p_0 = 0$.

Exemple 4.44 *Les première, deuxième et troisième suites des minima de la permutation $\pi = 547298136$ sont respectivement les suites 5421, 73 et 986. Nous avons alors $p_0 = 0$, $p_1 = 1 = \pi^{-1}(5)$, $p_2 = \pi^{-1}(7) = 3$, $p_3 = \pi^{-1}(9) = 5$ et $p_i = 10$ pour tout $i \geq 4$.*

Proposition 4.45 *Soit π une permutation de S_n admettant exactement k suites des minima. Alors, la plus longue sous-suite croissante de π est exactement de longueur j.*

Preuve Soit y un élément de la $(q+1)^{ème}$ suite des minima de π. Alors, il existe un élément x appartenant à la $q^{ème}$ suite des minima tel que $x < y$ et $\pi^{-1}(x) < \pi^{-1}(y)$. Ainsi, π possède une sous-suite croissante de longueur k. De plus, deux éléments d'une sous-suite croissante de π ne peuvent appartenir à la même $i^{ème}$ suite des minima de π. □

Remarque 4.46 *La preuve précédente nous permet de constater que la suite $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(p_j)$ contient une sous-suite croissante de longueur j pour tout $j \in [k]$.*

Proposition 4.47

- *Pour tout entier positif k, l'arbre de génération $T(12\ldots(k+1))$ est caractérisé par le système de réécriture*

$$\left\{\begin{array}{lll} (\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k-1 \text{ fois}}) & & \\ (p_2,p_3,\ldots,p_k) & \rightsquigarrow & (p_2+1,p_3+1,\ldots,p_k+1), \\ & & (p_2,p_3,\ldots,p_{i-1},s,p_{i+1}+1,p_{i+2}+1,\ldots,p_k+1) \\ & & \qquad \textit{pour tout } i \in [2,k] \textit{ et pour tout } s \in [p_{i-1}+1,p_i] \end{array}\right.$$

- *A une permutation π de $S_n(12\ldots(k+1))$ correspond, par ce système de réécriture, une étiquette $(p_2,p_3,\ldots,p_k)$ dans laquelle p_i est l'indice du premier élément de la $i^{ème}$ suite des minima de π (voir définition 4.43).*

Exemple 4.48 *La permutation $\pi = 6254713$ possède les trois suites des minima 621, 543 et 7. Ainsi, π n'appartient pas à $S_7(123)$ mais a pour étiquette $(3,5)$ dans $T(1234)$ et pour étiquette $(3,5,8,8)$ dans $T(123456)$.*

Lemme 4.49 *Pour une permutation d'étiquette $(p_2, p_3, \dots, p_k)$ dans l'arbre de génération $T(12\dots(k+1))$, seuls les p_k premiers sites sont actifs.*

Preuve Ce résultat est une conséquence de la proposition 4.45. □

Preuve de la proposition 4.47. Clairement, l'étiquette de la permutation 1 est $(2, 2, \dots, 2)$ par définition des étiquettes.

Soit π une permutation de l'arbre de génération $T(12\dots(k+1))$ ayant pour étiquette $(p_2, p_3, \dots, p_k)$.

- Insertion dans le premier site.
  L'étiquette de la permutation ainsi obtenue est alors $(p_2 + 1, p_3 + 1, \dots, p_k + 1)$.
- Insertion dans l'un des p_k premiers sites autre que le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $s^{ème}$ site de π, pour tout $s \in [2, p_k]$.
  Alors, il existe $i \in [2, k]$ tel que $p_{i-1} < s \leq p_i$.
  L'étiquette de γ est alors $(p_2, p_3, \dots, p_{i-1}, s, p_{i+1} + 1, p_{i+2} + 1, \dots, p_k + 1)$.

□

Corollaire 4.50 *Soit $P(n; p_2, p_3, \dots, p_k)$ le nombre de permutations de $S_n(12\dots(k+1))$ ayant pour étiquette $(p_2, p_3, \dots, p_k)$ où $2 \leq p_2 < p_3 < \dots < p_k \leq n+1$, et posons $P(n; p_2, p_3, \dots, p_j, n+1, n+1, \dots, n+1) = P(n; p_2, p_3, \dots, p_j)$.*
Nous avons alors les équations de récurrence suivantes.

$$\begin{cases} P(1;) \;=\; 1 \\ P(n; p_2, p_3, \dots, p_k) = \\ \qquad\qquad P(n-1; p_2 - 1, p_3 - 1, \dots, p_k - 1) \\ \qquad + \;\; P(n-1; p_2, p_3, \dots, p_{k-1}) \\ \qquad + \;\; \sum_{i=2}^{k} \sum_{s=p_i}^{p_{i+1}-2} P(n-1; p_2, p_3, \dots, p_{i-1}, s, p_{i+1} - 1, p_{i+2} - 1, \dots, p_k - 1) \\ |S_n(12\dots(k+1))| - |S_n(12\dots k)| = \sum_{2 \leq p_2 < p_3 < \dots < p_k \leq n} P(n; p_2, p_3, \dots, p_k) \end{cases}$$

Par exemple, nous avons $P(n; p_2) = \binom{2n-p_2}{n-1} - \binom{2n-p_2}{n}$ pour tout $p_2 \in [2, n]$. Aussi, avant même de connaître $P(n; p_2, p_3, \dots, p_k)$ dans le cas général, il serait bien évidemment utile d'avoir une formule pour $P(n; p_2, p_3)$, problème étudié par J. West [110].

Conjecture 4.51 *Le nombre de permutations π de $S_n(1234)$ telles que $\pi(1) < \pi(2) < \pi(3) = n$ est*

$$P(n; 2, 3) = \sum_{l=1}^{n-2} \binom{n-3}{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\binom{l+1}{m} \cdot \binom{l+1}{m+1} \cdot \binom{l+1}{m+2}}{\binom{l+1}{1} \cdot \binom{l+1}{2}}$$

Remarquons que $\sum_{m=0}^{l-1} \frac{\binom{l+1}{m} \cdot \binom{l+1}{m+1} \cdot \binom{l+1}{m+2}}{\binom{l+1}{1} \cdot \binom{l+1}{2}}$ dénombre les permutations de Baxter ayant l éléments [15, 108].

4.5.2 Tableaux de Young standard de hauteur bornée

Nous donnons ici une caractérisation de l'arbre de génération des involutions excluant le motif $12\dots(k+1)$, arbre obtenu par la méthode récurrente. Cet arbre de génération est très semblable à celui donnant les permutations excluant ce même motif.

Proposition 4.52

- *Pour tout entier $k \geq 2$, l'arbre de génération des involutions de $I_n(12\ldots(k+1))$ obtenu par la méthode récurrente est caractérisé par le système de réécriture*

$$\left\{\begin{array}{lll}
(0;) & & \\
(n; \underbrace{p_1, p_2, \ldots, p_j}_{0 \leq j \leq k-2} & \rightsquigarrow & (n+1; p_1, p_2, \ldots, p_j, n+1) \\
& \overset{2}{\rightsquigarrow} & (n+2; p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, s, p_{i+1}+1, p_{i+2}+1, \ldots, p_j+1) \\
& & \quad \textit{pour tout } i \in [j] \textit{ et pour tout } s \in [p_{i-1}+1, p_i] \\
& \overset{2}{\rightsquigarrow} & (n+2; p_1, p_2, \ldots, p_j, s) \textit{ pour tout } s \in [p_j+1, n+1] \\
(n; p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}) & \rightsquigarrow & (p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, n+1) \\
& \overset{2}{\rightsquigarrow} & (n+2; p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, s, p_{i+1}+1, p_{i+2}+1, \ldots, p_{k-1}+1), \\
& & \quad \textit{pour tout } i \in [k-1] \textit{ et pour tout } s \in [p_{i-1}+1, p_i] \\
& & (p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, s) \textit{ pour tout } s \in [p_{k-1}+1, n+1] \\
(p_1, p_2, \ldots, p_k) & \overset{2}{\rightsquigarrow} & (p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, s, p_{i+1}+1, p_{i+2}+1, \ldots, p_k+1) \\
& & \quad \textit{pour tout } i \in [k] \textit{ et pour tout } s \in [p_{i-1}+1, p_i]
\end{array}\right.$$

- *A une involution π de $I_n(12\ldots(k+1))$ correspond, par ce système de réécriture, une étiquette dans laquelle p_i est l'indice du premier élément de la $i^{\text{ème}}$ suite des minima de π (voir définition 4.43).*

Exemple 4.53 *L'involution $\pi = 57381624$ possède les trois suites des minima 531, 762 et 84. Ainsi, π n'appartient pas à $I_8(123)$, mais a pour étiquette $(1, 2, 4)$ dans le cas de $I_8(1234)$ et a pour étiquette $(8; 1, 2, 4)$ dans le cas de $I_8(12345)$ et de $I_8(1234567)$.*

Lemme 4.54 *Pour une involution π de $I_n(12\ldots(k+1))$, nous avons les propriétés suivantes.*

(i) *Si π possède j suites des minima, où $j \in [0, k-1]$, tous ses sites sont actifs.*
En adoptant les définitions de la proposition 4.52, π a pour étiquette $(n; p_1, p_2, \ldots, p_j)$.

(ii) *Si π possède exactement k suites des minima, seuls les p_k premiers sites engendrant des involutions de I_{n+2} sont actifs.*
En adoptant les définitions de la proposition 4.52, π a pour étiquette $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Preuve

- (i). L'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$ appartient à $I_{n+1}(12\ldots(k+1))$ et toutes les involutions de I_{n+2} engendrées à partir de π appartiennent à $I_{n+2}(12\ldots(k+1))$ car π appartient à $I_n(12\ldots(j+1))$.
- (ii). D'après la proposition 4.45, π possède une sous-suite σ de type $12\ldots k$. L'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$ n'appartient donc pas à $I_{n+1}(12\ldots(k+1))$. De plus, comme $\pi(p_k)$ appartient à σ, toutes les insertions à droite de $\pi(p_k)$ engendrent des involutions de I_{n+2} contenant au moins une sous-suite de type $12\ldots(k+1)$. Par contre, aucune des insertions à gauche de $\pi(p_k)$ n'engendre d'involutions de I_{n+2} contenant une sous-suite de type $12\ldots(k+1)$.

$\square$

Preuve de la proposition 4.52. Clairement, l'étiquette de l'involution ε de $I_0(12\ldots(k+1))$ est $(0;)$. Cherchons les étiquettes des fils d'une involution π de $I_n(12\ldots(k+1))$ dans l'arbre de génération obtenu par la méthode récurrente.

- Ajout d'un point fixe engendrant l'involution $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)(n+1)$.
  - π a pour étiquette $(n;p_1,p_2,\ldots,p_j)$ avec $j\in[0,k-2]$.
    L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors $(n+1;p_1,p_2,\ldots,p_j,n+1)$.
  - π a pour étiquette $(n;p_1,p_2,\ldots,p_{k-1})$.
    L'étiquette de l'involution ainsi obtenue est alors $(p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},n+1)$.
- Insertion dans l'un des sites situés à gauche du premier élément de la dernière suite des minima engendrant une involution de I_{n+2}.
  - π a pour étiquette $(n;p_1,p_2,\ldots,p_j)$ avec $j\in[0,k-1]$.
    Soit γ l'involution obtenue en insérant l'élément $n+2$ dans le $s^{ème}$ site de π, pour tout $s\in[p_j]$, et en incrémentant d'une unité tous les éléments de π supérieurs ou égaux à s.
    Alors, il existe $i\in[j]$ tel que $p_{i-1}<s\leq p_i$.
    L'étiquette de γ est alors $(n+2;p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},s,p_{i+1}+1,p_{i+2}+1,\ldots,p_j+1)$.
  - π a pour étiquette $(p_1,p_2,\ldots,p_k)$.
    Soit γ l'involution obtenue en insérant l'élément $n+2$ dans le $s^{ème}$ site de π, pour tout $s\in[p_k]$, et en incrémentant d'une unité tous les éléments de π supérieurs ou égaux à s.
    Alors, il existe $i\in[k]$ tel que $p_{i-1}<s\leq p_i$.
    L'étiquette de γ est alors $(p_1,p_2,\ldots,p_{i-1},s,p_{i+1}+1,p_{i+2}+1,\ldots,p_k+1)$.
- Insertion dans l'un des sites situés à droite du premier élément de la dernière suite des minima engendrant une involution de I_{n+2}.
  - π a pour étiquette $(n;p_1,p_2,\ldots,p_j)$ avec $j\in[0,k-2]$.
    Soit γ l'involution obtenue en insérant l'élément $n+2$ dans le $s^{ème}$ site de π, pour tout $s\in[p_j+1,n+1]$, et en incrémentant d'une unité tous les éléments de π supérieurs ou égaux à s.
    L'étiquette de γ est alors $(n+2;p_1,p_2,\ldots,p_j,s)$.
  - π a pour étiquette $(n;p_1,p_2,\ldots,p_{k-1})$.
    Soit γ l'involution obtenue en insérant l'élément $n+2$ dans le $s^{ème}$ site de π, pour tout $s\in[p_{k-1}+1,n+1]$, et en incrémentant d'une unité tous les éléments de π supérieurs ou égaux à s.
    L'étiquette de γ est alors $(p_1,p_2,\ldots,p_{k-1},s)$.

□

Chapitre 5

Permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile

D.E. Knuth [62] s'est intéressé aux permutations qui peuvent être triées par passage dans une pile. Il les a caractérisées comme étant exactement les permutations excluant le motif 231 et celles-ci, du fait de leur nombre, sont parfois appelées permutations de Catalan.

Dans ce problème du tri d'une permutation par passage dans une pile, nous constatons que la pile ne doit contenir à tout instant que des entiers allant en croissant à partir du sommet de pile. Ainsi, dans un certain sens, la pile vérifie une condition que nous pouvons qualifier de contrainte de type "tour de Hanoï" par référence au problème du même nom.

Parmi les extensions possibles du problème considéré par D.E. Knuth, J. West [110, 113] s'est intéressé à l'énumération des permutations triables par plusieurs passages consécutifs dans une pile, celle-ci devant à tout instant obéir à cette condition "tour de Hanoï". Il a donné une caractérisation de l'ensemble des permutations sur $[n]$ triables par deux passages consécutifs dans une pile en terme de permutations à motifs exclus : il s'agit de $S_n(2341, 3\bar{5}241)$. De plus, il en a conjecturé la formule d'énumération $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ dont les premières valeurs sont $1, 2, 6, 22, 91, 408, \ldots$

Une première preuve de cette conjecture, basée sur la résolution d'une récurrence très complexe avec des outils de calcul formel, a été donnée par D. Zeilberger [119].
D'autre part, S. Dulucq, S. Gire et J. West [28, 45], en utilisant la méthode des arbres de génération, ont établi une correspondance entre les permutations de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ dites permutations non séparables et l'ensemble des cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes dont le nombre est exactement $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ comme l'a montré W.T. Tutte [105]. De plus, cette bijection fait correspondre aux paramètres degré de la face distinguée et nombre de sommets de ces cartes les paramètres nombre de maxima à droite et descentes de ces permutations. Or, W.G. Brown [11] d'une part, et W.G. Brown et W.T. Tutte [12] d'autre part, ont donné des formules exprimant la distribution de ces cartes suivant ces deux paramètres.

Ainsi, la conjecture de J. West pouvant se ramener à trouver une correspondance entre permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile et cartes planaires pointées non séparables, le résultat de S. Dulucq, S. Gire et J. West constitue une première étape vers une preuve combinatoire de cette conjecture. La seconde étape, que nous allons reprendre partiellement dans ce chapitre, a été proposée par S. Dulucq, S. Gire et O. Guibert [27, 45].

Signalons également qu'I.P. Goulden et J. West [46] ont récemment établi une nouvelle correspondance entre permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile et cartes planaires pointées non séparables.

Cette seconde étape vers une preuve combinatoire de la conjecture de J. West, en partie devinée grâce au logiciel *forbid*, établit une correspondance entre les permutations sur $[n]$ triables par deux passages consécutifs dans une pile $S_n(2341, 3\bar{5}241)$ et les permutations non séparables de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$, en utilisant la méthode des arbres de génération des permutations. Toutefois, la correspondance n'est pas directe et il nous est nécessaire de passer par quatre systèmes de réécriture différents (et donc sept autres ensembles de permutations à motifs exclus). Par contre, les deux paramètres considérés sur les cartes planaires pointées non séparables se transportent sur tous ces ensembles, de sorte que nous obtenons des formules d'énumération raffinant la formule conjecturée par J. West et démontrée par D. Zeilberger.

Comme la plupart des bijections intermédiaires reliant ces deux ensembles de permutations à motifs exclus sont détaillées dans la thèse de S. Gire [45], seule l'une des quatre correspondances est présentée ici.

Ensuite, nous relions, en utilisant toujours la même méthode, un nouvel ensemble de permutations à motifs exclus à ceux issus de notre correspondance.

Finalement, nous énonçons une conjecture dans laquelle nous proposons deux nouveaux ensembles de permutations à motifs exclus pour lesquels nous pensons qu'ils ont la même formule d'énumération que celle des permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile.

5.1 Des permutations 2-triables aux permutations non séparables

Pour des raisons de simplicité, nous employons le terme de permutations 2-triables pour désigner les permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile.

Soient $Piles_n = S_n(2341, 3\bar{5}241)$ l'ensemble des permutations 2-triables sur $[n]$ et $NSép_n = S_n(2413, 41\bar{3}52)$ l'ensemble des permutations sur $[n]$ que nous qualifions de non séparables. Désignons par NS_n l'ensemble des cartes planaires pointées non séparables ayant n arêtes.

Théorème 5.1 *(S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [27, 28]) Le nombre de permutations* *sur $[n]$ triables par deux passages consécutifs dans une pile est*

$$|Piles_n| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

En fait, en mettant en commun les résultats obtenus par S. Dulucq, S. Gire et J. West [28, 45] et S. Dulucq, S. Gire et O. Guibert [27, 45], nous obtenons des résultats beaucoup plus précis comme le laisse deviner le schéma général de notre preuve donné figure 5.1. Ce résultat, dont nous déduisons plusieurs formules pour la distribution des permutations 2-triables, est le suivant.

Théorème 5.2 *(S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [27, 28]) Les ensembles*
$\{\pi \in Piles_n : maxd(\pi) = i, desc(\pi) = j\}$,
$\{\pi \in S_n(3241, \bar{2}4153) : maxg(\pi) = i, montinv(\pi) = j\}$,
$\{\pi \in S_n(2413, \bar{4}2315) : ming(\pi) = i, descinv(\pi) = j\}$,
$\{\pi \in S_n(3412, \bar{2}4531) : maxg(\pi) = i, montinv(\pi) = j\}$,
$\{\pi \in S_n(3142, 45\bar{3}12) : ming(\pi) = i, desc(\pi) = j\}$,
$\{\pi \in NSép_n : maxd(\pi) = i, desc(\pi) = j\}$ *et*
$\{c \in NS_{n+1} :$ *le degré de la face distinguée de c est* $i+1, c$ *a* $j+2$ *sommets*$\}$
sont en correspondance.

Utilisant les résultats de W.G. Brown [11] et de W.G. Brown et W.T. Tutte [12] sur les cartes planaires pointées non séparables, nous en déduisons les formules d'énumération suivantes qui peuvent être étendues aux autres ensembles de permutations à motifs exclus.

Corollaire 5.3 *(S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [27, 28]) Le nombre de permutations sur $[n]$ triables par deux passages consécutifs dans une pile ayant i maxima à droite est*

$$\frac{i+1}{(2n-i+1)!} \sum_{j=i+1}^{\min\{n+1, 2i+2\}} \frac{(3i-2j+2)(2j-i-1)(j-2)!(3n-j-i+1)!}{(n-j+1)!(j-i-1)!(j-i)!(2i-j+2)!}$$

Corollaire 5.4 *(S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [27, 28]) Le nombre de permutations sur $[n]$ triables par deux passages consécutifs dans une pile ayant j descentes est*

$$\frac{(2n-j-1)!(n+j)!}{(2n-2j-1)!(n-j)!(2j+1)!(j+1)!}$$

Corollaire 5.5 *(S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [27, 28]) Le nombre de permutations sur $[n]$ triables par deux passages consécutifs dans une pile ayant $k+1$ maxima à droite et k descentes est*

$$\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$$

Permutations 2-triables sur $[n]$

$\boxed{S_n(2341, 3\bar{5}241) = Piles_n}$ [119]

$maxd, desc$

$\updownarrow \; -1 * $

$\boxed{S_n(3214, \bar{2}4135)}$

$maxg, montinv$

$\updownarrow \; \cong$ [27, 45]

$\boxed{S_n(3241, \bar{2}4153)}$

$maxg, montinv$

$\updownarrow \; c$

$\boxed{S_n(2314, \bar{4}2513)}$ $\boxed{S_n(3412, \bar{2}4531)}$

$ming, descinv$ $maxg, montinv$

$\updownarrow \; \cong$ [27] $\updownarrow \; \cong$

$\boxed{S_n(2413, \bar{4}2315)} \xleftarrow{\quad c \quad} \boxed{S_n(3142, \bar{2}4351)}$

$ming, descinv$ $maxg, montinv$

$\updownarrow \; -1$

$\boxed{S_n(3142, 423\bar{1}5)}$

$ming, desc$

$\updownarrow \; \cong$ [27, 45]

$\boxed{S_n(3142, 45\bar{3}12)}$

$ming, desc$

$\updownarrow \; -1 * c$

$\boxed{S_n(2413, 45\bar{3}12)}$ $\boxed{S_n(1342, \bar{3}1254)}$ conjecture 5.21

$maxd, descinv$

$\updownarrow \; \cong$ [27, 45]

$\boxed{S_n(2413, 41\bar{3}52) = NS\acute{e}p_n}$ $\boxed{S_n(1423, \bar{4}2513)}$ conjecture 5.21

$maxd, desc$

$\updownarrow \; \cong$ [28, 45]

Cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes

$\boxed{NS_{n+1}}$ [105]

degré face distinguée[11], *nombre sommets*[12]

Figure 5.1 Schéma de la preuve de la conjecture de J. West.

Toutes les correspondances par isomorphisme d'arbres de génération mettant en bijection les permutations 2-triables et les cartes planaires pointées non séparables sont détaillées dans la thèse de S. Gire [45], exceptée la bijection entre $S_n(2314,\bar{4}2513)$ et $S_n(2413,\bar{4}2315)$ que nous précisons ici.

Ensuite, nous relions l'ensemble $S_n(3412,\bar{2}4531)$ à l'un des ensembles en bijection avec les permutations 2-triables sur $[n]$, toujours par isomorphisme des arbres de génération.

5.2 La correspondance entre $S_n(2314,\bar{4}2513)$ et $S_n(2413,\bar{4}2315)$

Théorème 5.6 *Les ensembles de permutations à motifs exclus* $S_n(2314,\bar{4}2513)$ *et* $S_n(2413,\bar{4}2315)$ *sont en correspondance.*
De plus, ils vérifient $|\{\pi \in S_n(2314,\bar{4}2513) : ming(\pi) = i, descinv(\pi) = j\}| = |\{\pi \in S_n(2413,\bar{4}2315) : ming(\pi) = i, descinv(\pi) = j\}|$.

Nous allons prouver ce résultat en montrant que les arbres de génération de ces ensembles de permutations sont isomorphes et que la bijection induite conserve les deux paramètres minima à gauche et descentes inverses.

Proposition 5.7

- *Le système de réécriture* $\mathcal{S}_{DeuxPiles1}$ *(voir figure 5.2) caractérisant l'arbre de génération* $T(2314,\bar{4}2513)$ *[resp.* $T(2413,\bar{4}2315)$*] est*
$$\begin{cases} (2|1;1;0;) \\ (x|maxg;ming;dinv;t_1,t_2,\ldots,t_{maxg-1}) \rightsquigarrow \\ \qquad (x+1+\sum_{k=1}^{maxg-1} t_k|1;ming+1;dinv+1;) \\ \qquad (x+1+\sum_{k=i}^{maxg-1} t_k|i;ming;dinv+1;t_1,t_2,\ldots,t_{i-1}) \text{ pour tout } i \in [2,maxg] \\ \qquad (maxg+2|maxg+1;ming;dinv;t_1,t_2,\ldots,t_{maxg-1},j-1) \text{ pour tout } j \in [x-maxg] \end{cases}$$
- *L'étiquette* $(x|maxg;ming;dinv;t_1,t_2,\ldots,t_{maxg-1})$ *du système de réécriture* $\mathcal{S}_{DeuxPiles1}$ *correspondant à une permutation* π *de l'un quelconque des deux arbres de génération vérifie*
  - x *est le nombre de sites actifs de* π,
  - $maxg = maxg(\pi)$,
  - $ming = ming(\pi)$,
  - $dinv = descinv(\pi)$,
  - t_i, *pour tout* i *appartenant à* $[maxg-1]$, *est le nombre d'éléments de* π *situés à droite [resp. gauche] d'un site temporairement inactif relativement à* $\bar{4}2513$ *[resp.* $\bar{4}2315$*] et appartenant à l'intervalle* $]g_{i-1},g_i[$ *(où* g_i *est le* $i^{\grave{e}me}$ *maximum à gauche de* π *et* $g_0 = 0$*).*

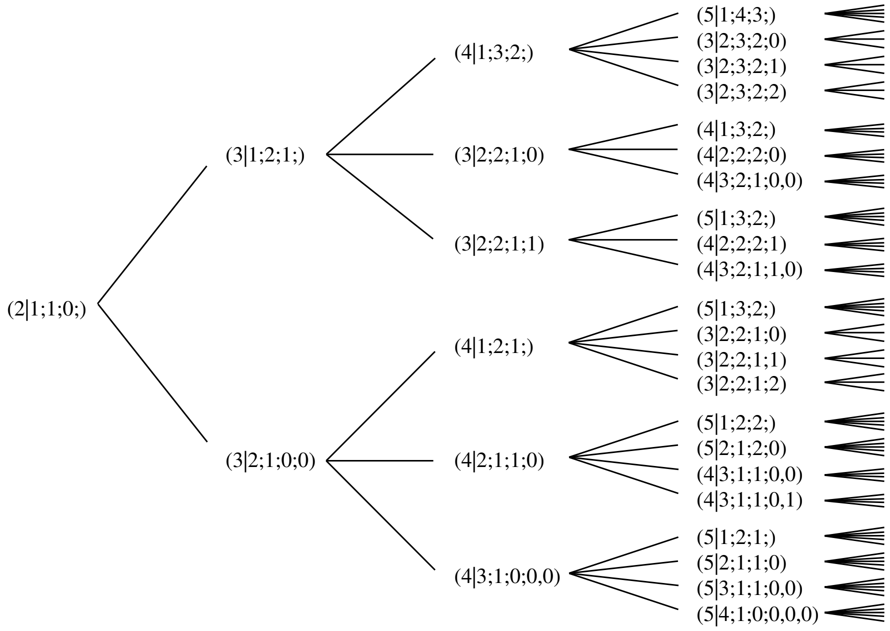


Figure 5.2 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{DeuxPiles1}$.

Exemple 5.8 *La permutation* $\pi = {}_\diamond 2.1_\diamond 5.4_\diamond 6_\diamond 3_\bullet$ *appartenant à* $S_6(2314, \overline{4}2513)$ *a pour étiquette* $(4|3;2;3;1,1)$. *En effet, elle possède* 4 *fils dans* $T(2314, \overline{4}2513)$, 3 *maxima à gauche (éléments* 2,5,6*),* 2 *minima à gauche (éléments* 2,1*),* 3 *descentes inverses (indices* 1,3,4*). De plus, à droite des sites temporairement inactifs, nous trouvons les éléments* 1 *et* 4*, le premier étant inférieur à* $g_1 = 2$ *et le dernier étant compris entre* $g_1 = 2$ *et* $g_2 = 5$.

La permutation $\pi = {}_\diamond 5_\diamond 6_\diamond 4.2_\bullet 1.3.$ *appartenant à* $S_6(2413, \overline{4}2315)$ *a pour étiquette* $(3|2;4;3;3)$. *En effet, elle possède* 3 *fils dans* $T(2413, \overline{4}2315)$, 2 *maxima à gauche (éléments* 5,6*),* 4 *minima à gauche (éléments* 5,4,2,1*),* 3 *descentes inverses (indices* 1,3,4*). De plus, les* 3 *éléments* 4,1 *et* 3 *situés à gauche des sites temporairement inactifs sont inférieurs à* $g_1 = 5$.

Les figures 5.3 et 5.4 présentent respectivement les arbres de génération $T(2314, \overline{4}2513)$ et $T(2413, \overline{4}2315)$.

L'introduction des paramètres nombre de minima à gauche et nombre de descentes inverses dans les étiquettes du système de réécriture $\mathcal{S}_{DeuxPiles1}$ n'est pas nécessaire à la caractérisation des arbres de génération $T(2314, \overline{4}2513)$ et $T(2413, \overline{4}2315)$. Ces paramètres nous permettent seulement d'obtenir un raffinement des formules d'énumération.

Lemme 5.9 *En reprenant les notations de la proposition 5.7, une permutation* π *de* $S_n(2314, \overline{4}2513)$ *[resp.* $S_n(2413, \overline{4}2315)$*] vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Le premier site et ceux entourant n *sont actifs.*

(ii) Tout élément e *situé entre* g_i *et* g_{i+1} *dans* π *vérifie* $g_{i-1} < e < g_i$.

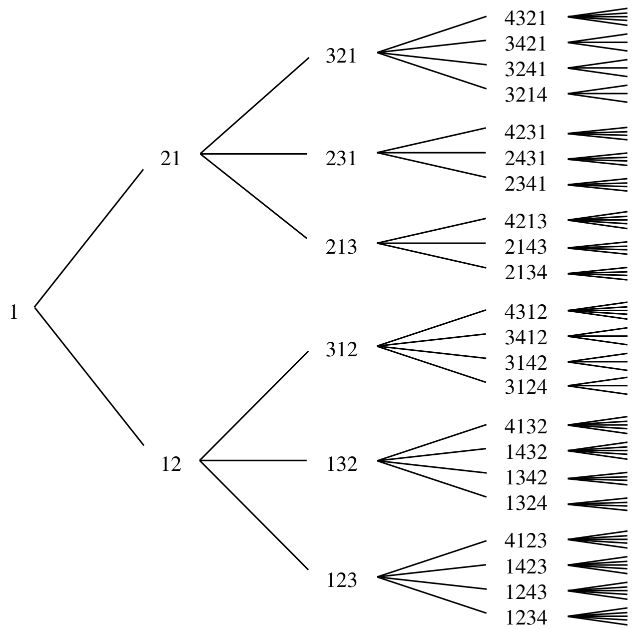


Figure 5.3 Arbre de génération $T(2314, \overline{4}2513)$.

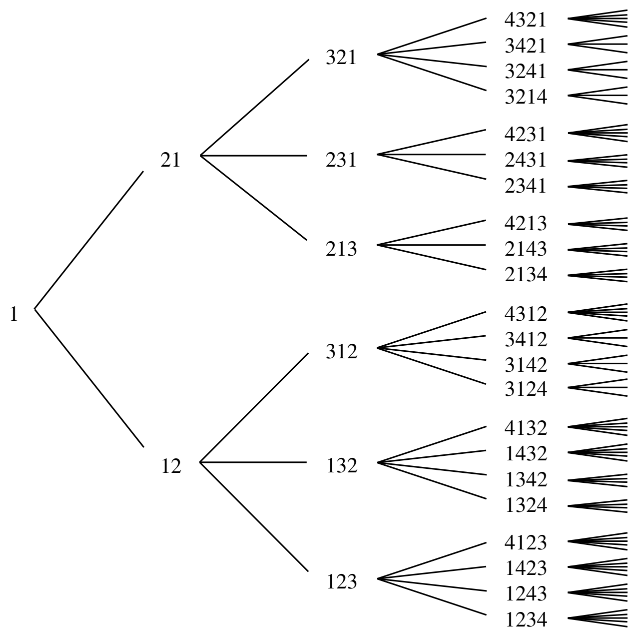


Figure 5.4 Arbre de génération $T(2413, \overline{4}2315)$.

(iii) Tous les éléments à droite de n et situés avant le dernier des sites actifs sont supérieurs à g_{maxg-1}.

(iv) A gauche de n, tout site situé à gauche d'un élément qui n'est pas un maximum à gauche est inactif.

(v) Tout site situé à gauche d'un maximum à gauche est actif.

(vi) Un site actif inactivé par $\overline{4}2513$ [resp. $\overline{4}2315$] ne l'est que temporairement.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Par définition d'un maximum à gauche, nous avons $e < g_i$. Supposons maintenant que $e < g_{i-1}$. Alors, la sous-suite $g_{i-1}g_ieg_{i+1}$ est de type 2314, interdite pour $T(2314, \overline{4}2513)$, et ne fait pas partie d'une sous-suite de type 42315 pour $T(2413, \overline{4}2315)$ car il n'existe pas d'élément à gauche de g_{i-1} qui soit compris entre g_i et g_{i+1}.
- (iii). Si tel n'était pas le cas, pour un élément e situé tel qu'indiqué, la sous-suite $g_{maxg-1}ne(n+1)$ serait de type 2314, interdite pour $T(2314, \overline{4}2513)$, et ne ferait pas partie d'une sous-suite de type 42315 pour $T(2413, \overline{4}2315)$.
- (iv). Soit e un élément situé à gauche de n qui ne soit pas un maximum à gauche. Alors, il existe $e' > e$ tel que $\pi^{-1}(e') < \pi^{-1}(e)$. La sous-suite $e'(n+1)en$ est de type 2413, interdite pour $T(2413, \overline{4}2315)$, et ne fait pas partie d'une sous-suite de type 42513 pour $T(2314, \overline{4}2513)$.
- (v). Supposons que le site situé à gauche de g_i ne soit pas actif.
  Si le site est inactivé par une sous-suite de type 2314 ou $\overline{4}2315$, tous les sites à sa droite seraient également inactifs, ce qui est en contradiction avec le fait que le site à droite de n est toujours actif d'après (i).
  Si le site est inactivé par une sous-suite de type 2413 ou $\overline{4}2513$, l'élément de π jouant le rôle de 2 dans le motif serait inférieur ou égal à g_{i-1} d'après (ii) et l'élément de π jouant le rôle de 1 dans le motif serait situé à droite du dernier site actif d'après (ii) et (iii), ce qui est en contradiction avec le fait que le site à droite de n est toujours actif d'après (i).
- (vi). Par exemple, la permutation $(n+1)\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$ réactive un tel site.

□

Lemme 5.10 *En reprenant les notations de la proposition 5.7, une permutation π de $S_n(2314, \overline{4}2513)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) A droite de n, tous les sites actifs sont consécutifs à partir de n.

(ii) A droite de n, tous les sites inactifs le restent définitivement.

(iii) A gauche de n, tous les sites inactifs ne le sont que temporairement.

(iv) $t_i = |\{\pi(\pi^{-1}(g_i)+1), \pi(\pi^{-1}(g_i)+2), \ldots, \pi(\pi^{-1}(g_{i+1})-1)\}| = \pi^{-1}(g_{i+1}) - \pi^{-1}(g_i) - 1.$

Preuve

- (i) et (ii). Le motif $\bar{4}2513$ ne peut pas rendre inactif un site situé à droite de n et un site inactivé par 2314 impose que tous les sites à sa droite le restent définitivement.
- (iii). Le motif 2314 ne peut pas rendre inactif un site situé à gauche de n.
- (iv). C'est une conséquence des propriétés (ii) et (iv) du lemme 5.9 et des cas (ii) et (iii) précédents.

□

Lemme 5.11 *En reprenant les notations de la proposition 5.7, une permutation π de $S_n(2413,$ $\bar{4}2315)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) A gauche de n, tous les sites inactifs le restent définitivement.

(ii) Tous les sites à droite de n et situés à gauche du dernier des sites actifs sont actifs ou définitivement inactifs.

(iii) Soient $\pi(k)$ et $\pi(l)$ deux éléments situés à la gauche de deux sites temporairement inactifs et appartenant respectivement à $]g_{i-1}, g_i[$ et $]g_{j-1}, g_j[$. Alors, $k < l \Longrightarrow i \geq j$.

Preuve

- (i) et (ii). Tous les sites à la droite d'un site inactivé par $\bar{4}2315$ sont inactifs. Cependant, un site à droite du dernier site actif peut être définitivement inactif.
- (iii). Tous les éléments e situés à droite de $\pi(k)$ sont inférieurs à g_i pour éviter que la sous-suite $g_i n \pi(k) e$ ne soit de type 2413.

□

Preuve de la proposition 5.7. Par définition, l'étiquette de la permutation 1 est $(2|1;1;0;)$.
Soit π une permutation de $S_n(2314,\bar{4}2513)$ [resp. $S_n(2413,\bar{4}2315)$] ayant pour étiquette $(x|maxg;ming;dinv;t_1,t_2,\ldots,t_{maxg-1})$.

- Insertion dans le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le premier site de π.
  Tous les sites temporairement inactifs dans π s'activent dans γ, $n+1$ jouant le rôle du $\bar{4}$ dans $\bar{4}2513$ [resp. $\bar{4}2315$].
  L'étiquette de γ est alors $(x+1+\sum_{k=1}^{maxg-1} t_k|1;ming+1;dinv+1;)$.
- Insertion dans l'un des sites actifs à gauche de n autre que le premier site.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [2, maxg]$.
  Tous les sites temporairement inactifs dans π dont l'élément situé à droite [resp. gauche] est supérieur à g_{i-1} s'activent dans γ, $n+1$ jouant le rôle du $\bar{4}$ dans $\bar{4}2513$ [resp. $\bar{4}2315$]. A l'inverse, tous les sites temporairement inactifs dans π dont l'élément situé à droite [resp. gauche] est inférieur à g_{i-1} sont inchangés dans γ.
  Les autres sites restent inchangés.
  L'étiquette de γ est alors $(x+1+\sum_{k=i}^{maxg-1} t_k|i;ming;dinv+1;t_1,t_2,\ldots,t_{i-1})$.

- Insertion dans l'un des sites actifs à droite de n.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $(maxg+j)^{ème}$ [resp. $(x+1-j)^{ème}$] site actif de π, pour tout $j \in [x - maxg]$.
  Pour $T(2314, \overline{4}2513)$, les sites à droite de $n+1$ dans γ, sauf le premier, sont définitivement inactivés par la sous-suite $n(n+1)\gamma(\gamma^{-1}(n+1)+1)(n+2)$ de type 2314. Pour $T(2413, \overline{4}2315)$, les $j-1$ derniers sites actifs de π deviennent temporairement inactifs dans γ; de plus, les éléments situés à leur gauche sont supérieurs à g_{maxg-1}. Rappelons que pour $T(2314, \overline{4}2513)$ [resp. $T(2413, \overline{4}2315)$], les sites compris entre n et l'élément à gauche de $n+1$ dans γ sont tous temporairement [resp. définitivement] inactifs.
  Les autres sites sont inchangés.
  L'étiquette de γ est alors $(maxg+2|maxg+1; ming; dinv; t_1, t_2, \ldots, t_{maxg-1}, j-1)$.

$\square$

5.3 La correspondance entre $S_n(3142, \overline{2}4351)$ et $S_n(3412, \overline{2}4531)$

Théorème 5.12 *Les ensembles de permutations à motifs exclus $S_n(3142, \overline{2}4351)$ et $S_n(3412, \overline{2}4531)$ sont en correspondance.*
De plus, ils vérifient $|\{\pi \in S_n(3142, \overline{2}4351) : maxg(\pi) = i, montinv(\pi) = j\}| = |\{\pi \in S_n(3412, \overline{2}4531) : maxg(\pi) = i, montinv(\pi) = j\}|$.

Afin d'établir ce résultat, nous introduisons les notations suivantes.

Notation 5.13 *Soit π une permutation de $S_n(3142, \overline{2}4351)$ ou $S_n(3412, \overline{2}4531)$. Nous convenons des notations suivantes.*

- *x est le nombre de sites actifs de π dans l'arbre de génération des permutations correspondant,*
- *xg [resp. xd] est le nombre de sites actifs à gauche [resp. droite] de n,*
- $i = \begin{cases} 1 & si\ \pi^{-1}(n) < \pi^{-1}(n-1)\ et\ n > 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$
- *$c = xd - i - 1$ est le nombre de sites actifs à droite de n exceptés le dernier et éventuellement le premier d'entre eux si i vaut 1.*

Lemme 5.14 *Une permutation de $S_n(3142, \overline{2}4351)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Le dernier site et celui à droite de n sont actifs.

(ii) A droite de n, seuls les sites à droite des maxima à droite peuvent être actifs.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.

- (ii). Soit e un élément situé à droite de n qui ne soit pas un maximum à droite, c'est à dire qu'il existe au moins un élément e' à sa droite qui lui est supérieur. Alors, la sous-suite $ne(n+1)e'$ est de type 3142.

$\square$

Lemme 5.15 *Une permutation de $S_n(3412, \overline{2}4531)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Les deux derniers sites sont actifs.

(ii) Tous les éléments à droite du premier des sites actifs à droite de n décroissent dans π.

(iii) Tous les sites actifs à droite de n sont consécutifs et situés complètement à droite.

(iv) Si $i = 0$, tous les éléments à droite de n décroissent.

(v) Si $i = 0$, tous les sites à droite de n sont actifs.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii). Aucune sous-suite $n(n+1)e_1e_2$ ne doit être de type 3412 où $n+1$ est inséré dans le premier des sites actifs à droite de n.
- (iii). Soit e un élément à droite de n et à droite d'un site actif. Alors, pour tout couple d'éléments e_1 et e_2 vérifiant $\pi^{-1}(n) < \pi^{-1}(e_1) < \pi^{-1}(e_2)$, la sous-suite $n(n+1)e_1e_2$ de type 3421 doit elle-même faire partie d'une sous-suite $e'n(n+1)e_1e_2$ de type 24531. De même, la sous-suite $e(n+1)e_1e_2$ de type 3421 fait partie d'une sous-suite $e'e(n+1)e_1e_2$ de type 24531. Le site à droite de e est donc actif.
- (iv). Autrement, il existerait une sous-suite $(n-1)ne_1e_2$ de type 3412 (où e_2 serait un maximum à droite contrairement à e_1).
- (v). Supposons que la permutation γ obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le site à droite de n n'appartienne pas à $S_{n+1}(3412, \overline{2}4531)$. L'élément $n+1$ de γ doit jouer le rôle du plus grand élément des motifs exclus, ce qui rend impossible d'interdire le motif 3412 d'après (iv). Considérons la sous-suite $e(n+1)e_1e_2$ de type 3421 interdite de sorte qu'aucun élément à gauche de e n'appartienne à $]e_2, e_1[$. e est différent de n car sinon la sous-suite ene_1e_2 de π devrait faire partie d'une sous-suite de type 24531. Enfin, si e vaut n, il existe une sous-suite $a(n-1)ne_1e_2$ de type 24531, du même type que la sous-suite $an(n+1)e_1e_2$. Ainsi, dans chaque cas, nous avons obtenu une contradiction.

$\square$

Notation 5.16 *Conformément aux notations 5.13, nous convenons de celles-ci pour tout $k \in [c]$.*

- *Soit π une permutation de $S_n(3142, \overline{2}4351)$.*
  Notons d_j le $j^{ème}$ maximum à droite de π lue de droite à gauche. d_{j_k} désigne le maximum à droite situé juste à gauche du $(x-k)^{ème}$ site actif de π.
  Alors, a_k est l'élément le plus à gauche des éléments de π appartenant à $]d_{j_k-1}, d_{j_k}[$.

Lorsque $i = 0$ et $k = c$, $d_{j_c} = n$ et alors a_c est soit l'élément $n-1$, soit un élément à sa gauche. Dans tous les autres cas, la sous-suite $nd_{j_k}(n+1)d_{j_k-1}$ de type 3241 doit faire elle-même partie d'une sous-suite de type 24351 et impose l'existence d'un élément de la définition de a_k.
Nous en déduisons également que a_k est toujours situé à gauche de n.

- *Soit π une permutation de $S_n(3412, \overline{2}4531)$.*
  a_k est l'élément le plus à gauche des éléments de π appartenant à $]\pi(n-k+1), \pi(n-k)[$.

  Notons que nous avons toujours $\pi(n-k+1) < \pi(n-k)$ d'après les propriétés (ii) et (iv) du lemme 5.15 pour i valant respectivement 1 et 0.

  Lorsque $i = 0$ et $k = c$, $\pi(n-c) = n$ et alors a_c est soit l'élément $n-1$, soit un élément à sa gauche. Dans tous les autres cas, la sous-suite $n(n+1)\pi(n-k)\pi(n-k+1)$ de type 3421 doit faire elle-même partie d'une sous-suite de type 24531 et impose l'existence d'un élément de la définition de a_k.
  Nous en déduisons également que a_k est toujours situé à gauche de n.

Nous allons maintenant prouver le théorème 5.12 en montrant que les arbres de génération de ces ensembles de permutations sont isomorphes et que la bijection induite conserve les deux paramètres maxima à gauche et nombre de montées inverses.

Proposition 5.17 *En reprenant les notations 5.13 et 5.16, nous obtenons le résultat suivant.*

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{DeuxPiles2}$ (voir figure 5.5) caractérisant les arbres de génération $T(3142, \overline{2}4351)$ et $T(3412, \overline{2}4531)$ est*

$$\left\{\begin{array}{l} (2|1;0;0;) \\ (x|w;minv;i;n_1,n_2,\ldots,n_c) \rightsquigarrow \\ \qquad (l+1+k|w_1w_2\ldots w_{l-1}1;minv;1;n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}) \text{ pour tout } l \in [xg] \\ \qquad\qquad \text{où } k \text{ est tel que } s_{k-1} < l \leq s_k \\ \qquad (x+1|w1;minv+1;0;n_1,n_2,\ldots,n_c,xg-s_c) \text{ si } i=1 \\ \qquad (x+1|w0^{c+i-k}1;minv+1;0;n_1,n_2,\ldots,n_k) \text{ pour tout } k \in [0,c] \end{array}\right.$$

  avec $s_k = \sum_{h=1}^{k} n_h$ et $s_{c+1} = xg = x - c - i - 1$.

- *L'étiquette $(x|w;minv;i;n_1,n_2,\ldots,n_c)$ du système de réécriture $\mathcal{S}_{DeuxPiles2}$ correspondant à une permutation π sur $[n]$ de l'un quelconque des deux arbres de génération vérifie*

  - *$w = w_1w_2\ldots w_{xg}$ vérifie, pour tout $l \in [xg]$,*
    $$w_l = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si l'élément à droite du } l^{\text{ème}} \text{ site actif est un maximum à gauche} \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$
    Ainsi, $maxg(\pi) = \sum_{l=1}^{xg} w_l$,
  - *$minv = montinv(\pi)$,*

– *n_k est le nombre de sites actifs situés entre a_{k-1} et a_k, pour tout $k \in [c]$ (situés à gauche de a_1 pour $k = 1$).*

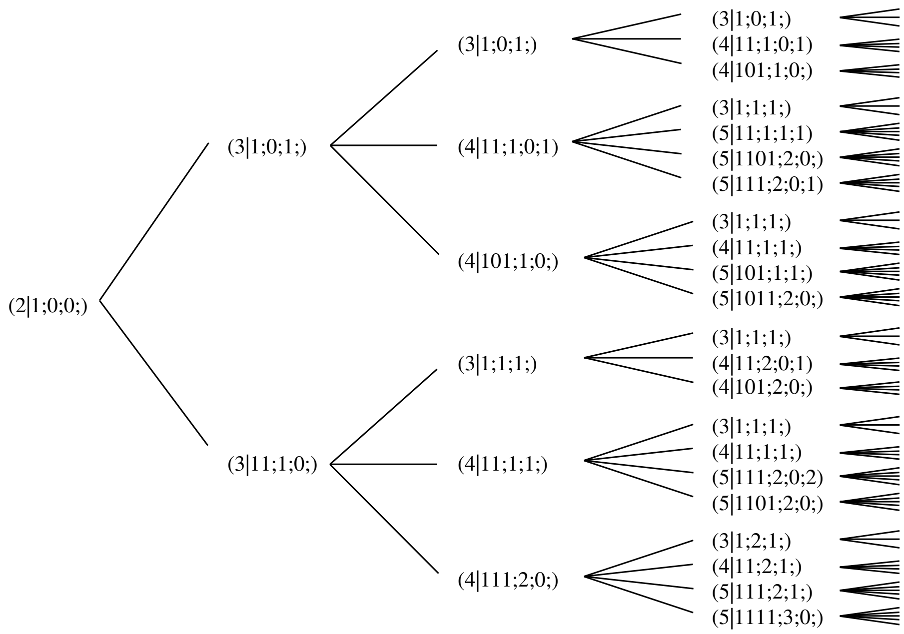


Figure 5.5 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{DeuxPiles2}$.

Exemple 5.18 *La permutation $\pi = {}_\diamond 3_\diamond 7_\diamond 9_\diamond 8_\diamond 4_\bullet 6_\bullet 5_\diamond 1_\bullet 2_\diamond$ appartenant à $S_9(3142, \bar{2}4351)$ a pour étiquette $(7|111; 4; 1; 1, 1)$. En effet, elle possède 7 fils dans $T(3142, \bar{2}4351)$, 3 maxima à gauche (éléments 3,7,9) qui correspondent aux 3 sites actifs à gauche de 9, 4 montées inverses (indices 1,3,4,7), $i = 1$, $xg = 3$, $xd = 4$ et $c = 2$. Les maxima à droite sont $d_1 = 2$, $d_2 = 5 = d_{j_1}$, $d_3 = 6$, $d_4 = 8 = d_{j_2}$ et $d_5 = 9$. Nous avons $a_1 = 3$ (3 est l'élément le plus à gauche des éléments de π appartenant à $]d_1, d_2[$), $a_2 = 7$ (7 est l'élément le plus à gauche des éléments de π appartenant à $]d_3, d_4[$) et $n_1 = 1$ (un seul site est actif à gauche de a_1), $n_2 = 1$ (un seul site est actif entre a_1 et a_2).*

La permutation $\pi = {}_\diamond 2_\diamond 5_\bullet 3_\diamond 4_\diamond 1_\diamond$ appartenant à $S_5(3412, \bar{2}4531)$ a pour étiquette $(5|11; 2; 1; 1)$. En effet, elle possède 5 fils dans $T(3412, \bar{2}4531)$, 2 maxima à gauche (éléments 2,5) qui correspondent aux 2 sites actifs à gauche de 5, 2 montées inverses (indices 2,3), $i = 1$, $xg = 2$, $xd = 3$ et $c = 1$. Nous avons $a_1 = 2$ (2 est l'élément le plus à gauche des éléments de π appartenant à $]\pi(5), \pi(4)[$) et $n_1 = 1$ (un seul site est actif à gauche de a_1).

Les paramètres w et $minv$ ont été ajoutés à l'étiquette du système de réécriture $\mathcal{S}_{DeuxPiles2}$ afin d'obtenir les formules d'énumération de $S_n(3142, \bar{2}4351)$ et de $S_n(3412, \bar{2}4531)$ suivant le nombre de maxima à gauche et le nombre de montées inverses.

Lemme 5.19 *Pour une permutation π de $S_n(3142, \bar{2}4351)$, nous avons les propriétés suivantes compte-tenu des notations 5.13 et 5.16.*

(i) *Les deux premiers sites et celui à gauche de n sont actifs.*

(ii) *Un site inactif le reste définitivement.*

(iii) *L'insertion de l'élément $n+1$ dans l'un des sites actifs laisse dans le même état tous les sites situés à gauche de $n+1$ dans la permutation obtenue.*

(iv) *Les sites entourant un maximum à gauche sont actifs.*

(v) $\pi^{-1}(a_k) < \pi^{-1}(a_{k'})$, *pour tout* $1 \leq k < k' \leq c$.

(vi) *Tout élément situé à gauche de* a_k *est inférieur à* d_{j_k-1}, *pour tout* $k \in [c]$.

(vii) *Tout élément situé entre* a_k *et* d_{j_k} *est supérieur à* a_k, *pour tout* $k \in [c]$.

Preuve

- (i), (ii) et (iii) résultent de la forme des motifs exclus.
- (iv). Les motifs 3142 et $\overline{2}4351$ ne peuvent pas rendre inactif le site à gauche d'un maximum à gauche g car les sous-suites $e_1e_2(n+1)e_3$ et $e_1e_2ge_3$ sont du même type respectivement 3142 et 3241.
  Similairement, le site à droite d'un maximum à gauche g ne peut pas être inactivé par 3142 ou $\overline{2}4351$ car les sous-suites $e_1e_2(n+1)e_3$ et $e_1e_2ge_3$ sont du même type respectivement 3142 ou 3241.
- (v). Autrement, la sous-suite $a_{k'}a_kd_{j_{k'}}d_{j_{k'}}$ serait de type 3142.
- (vi). Soit e un élément situé à gauche de a_k. $e < d_{j_k}$ car sinon la sous-suite $ea_knd_{j_k}$ serait de type 3142.
- (vii). Soit e un élément situé entre a_k et d_{j_k}. $e > d_{j_k-1}$ car sinon la sous-suite $a_ked_{j_k}d_{j_k-1}$ serait de type 3142, et $e \notin]d_{j_k-1}, a_k[$ car sinon la sous-suite $a_ked_{j_k}d_{j_k-1}$ serait de type 3241 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 24351, par définition de a_k.

□

Lemme 5.20 *Pour une permutation* π *de* $S_n(3412, \overline{2}4531)$, *nous avons les propriétés suivantes compte-tenu des notations 5.13 et 5.16.*

(i) *Le premier site et celui à gauche de n sont actifs.*

(ii) *Un site inactif le reste définitivement.*

(iii) *L'insertion de l'élément $n+1$ dans l'un des sites actifs laisse dans le même état tous les sites situés à gauche de $n+1$ dans la permutation obtenue.*

(iv) *Le site à gauche de tout maximum à gauche est actif.*

(v) $\pi^{-1}(a_k) < \pi^{-1}(a_{k'})$, *pour tout* $1 \leq k < k' \leq c$.

(vi) *Tout élément situé à gauche de* a_k *est inférieur à* $\pi(n-k+1)$, *pour tout* $k \in [c-1]$.

(vii) Tout élément situé entre a_{k+1} et $\pi(n-k-1)$ est supérieur à $\pi(n-k+1)$, pour tout $k \in [c-1]$.

Preuve

- (i), (ii) et (iii) résultent de la forme des motifs exclus.
- (iv). Les motifs 3412 et $\bar{2}4351$ ne peuvent pas rendre inactif le site à gauche d'un maximum à gauche g car les sous-suites $e_1(n+1)e_2e_3$ et $e_1ge_2e_3$ sont du même type respectivement 3412 et 3421.
- (v). Autrement, la sous-suite $a_{k'}\pi(n-k')\pi(n-k)\pi(n-k+1)$ serait de type 3421 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 24531, par définition de a_k.
- (vi). Soit e un élément situé à gauche de a_k. $e < \pi(n-k)$ car sinon la sous-suite $en\pi(n-k)\pi(n-k+1)$ serait de type 3421 ne ferait pas partie d'une sous-suite de type 24531, par définition de a_k.
- (vii). Soit e un élément situé entre a_{k+1} et $\pi(n-k-1)$. $e > \pi(n-k+1)$ car sinon la sous-suite $a_ka_{k+1}e\pi(n-k+1)$ serait de type 3412.

□

Preuve de la proposition 5.17. L'étiquette de la permutation 1 est $(2|1;0;0;)$.
Soit π une permutation de $S_n(3142, \bar{2}4351)$ [resp. $S_n(3412, \bar{2}4531)$] ayant pour étiquette $(x|w; minv; i; n_1, n_2, \ldots, n_c)$.

- Insertion dans l'un des sites actifs à gauche de n.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $l^{ème}$ site actif de π, pour tout $l \in [xg]$.
  Alors, il existe $k \in [c+1]$ tel que l'élément $n+1$ a été inséré entre a_{k-1} et a_k, avec $a_{c+1} = n$ et $d_{c+i} = n$.
  - Pour $T(3142, \bar{2}4351)$.
    Les sites situés entre a_k et d_{j_k} sont inactifs dans γ car la sous-suite $(n+1)a_k(n+2)d_{j_k}$ est de type 3142. Le site à droite de d_{j_k} est inactif dans γ car la sous-suite $(n+1)d_{j_k}(n+2)d_{j_k-1}$ est de type 3241 et tous les éléments à gauche de $n+1$ sont inférieurs à d_{j_k-1}. Les k derniers sites actifs le restent dans γ. Ceci est également vrai pour $k = c+1$ et $i = 0$.
  - Pour $T(3412, \bar{2}4531)$.
    Le site situé entre $\pi(n-k-1)$ et $\pi(n-k)$ est inactif dans γ étant donné que la sous-suite $(n+1)(n+2)\pi(n-k)\pi(n-k+1)$ est de type 3421 et que tous les éléments à gauche de $n+1$ sont inférieurs à $\pi(n-k+1)$. Les $k+1$ derniers sites actifs le restent dans γ.

  L'étiquette de γ est alors $(l+1+k|w_1w_2\ldots w_{l-1}1; minv; 1; n_1, n_2, \ldots, n_{k-1})$.
- Si i vaut 1, insertion dans le premier site actif à droite de n.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $(xg+1)^{ème}$ site actif de π, c'est à dire dans le site situé à droite de n [resp. $\pi(n-c-1)$].
  Tous les sites actifs le restent dans γ.
  - Pour $T(3142, \bar{2}4351)$, $d_{c+1} = n+1$ et $d_c = n-1$.
  - Pour $T(3412, \bar{2}4531)$, deux cas sont à envisager.
    * $\pi(n-c-1) < \pi(n-c)$. Alors, aucun élément e à gauche de n ne peut être supérieur à $\pi(n-c)$ pour éviter que la sous-suite $en\pi(n-c-1)\pi(n-c)$ ne soit de type 3412.

  * $\pi(n-c-1) > \pi(n-c)$. Montrons que tous les éléments à gauche de n sont inférieurs à $\pi(n-c)$. Le site inactif à gauche de $\pi(n-c-1)$ impose l'existence d'un élément e vérifiant $\pi^{-1}(n) \leq \pi^{-1}(e) < n-c-1$ tel que la sous-suite $\sigma = e\pi(n-c-1)\pi(n-c)$ de type 321 ne fait pas partie d'une sous-suite de type 2431 : e n'est pas situé à gauche de n à cause du site actif à gauche de n, $\pi(n-c-1)$ fait partie de σ car le site entre $\pi(n-c-1)$ et $\pi(n-c)$ est actif, et $\pi(n-c)$ fait partie de σ car tous les sites à droite de $\pi(n-c)$ sont actifs. Tous les éléments à gauche de e sont donc supérieurs à $\pi(n-c-1)$ ou inférieurs à $\pi(n-c)$. Or, aucun élément e' à gauche de n n'est supérieur à $\pi(n-c-1)$ pour éviter que la sous-suite $e'n\pi(n-c-1)\pi(n-c)$ de type 3421 ne fasse partie d'une sous-suite de type 24531.

Alors, $a_{c+1} = n$ et n_{c+1} est le nombre de sites actifs compris entre a_c et n.
L'étiquette de γ est alors $(x+1|w1; minv+1; 0; n_1, n_2, \ldots, n_c, x-c-2-\sum_{h=1}^{c} n_h)$.

- Insertion dans l'un des sites actifs à droite de n autre que le premier si i vaut 1.
Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $(x-k)^{ème}$ site actif de π, pour tout $k \in [0, c]$.
Tous les sites actifs le restent dans γ.
L'étiquette de γ est alors $(x+1|w0^{c+i-k}1; minv+1; 0; n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

□

5.4 A propos des permutations de $S_n(1342, \overline{3}1254)$ et de $S_n(1423, \overline{4}2513)$

Nous proposons la conjecture suivante, vérifiée à l'aide du logiciel *forbid* jusqu'à l'ordre 14.

Conjecture 5.21

$$|S_n(1342, \overline{3}1254)| = |S_n(1423, \overline{4}2513)| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

Nous avons constaté que les arbres de génération $T(1342, \overline{3}1254)$ et $T(1423, \overline{4}2513)$, ainsi que tous ceux correspondant aux permutations obtenues en considérant les opérations miroir, complément et inverse, ne satisfont à l'un des systèmes de réécriture des ensembles de permutations à motifs exclus que nous avons déjà mis en correspondance avec les permutations 2-triables.

De plus, aucune des distributions précédemment obtenues n'apparait pour ces deux ensembles de permutations à motifs exclus en termes de minima/maxima à gauche/droite et montées.

Chapitre 6

Permutations de Baxter

Faisant suite à une conjecture d'E. Dyer, G. Baxter [4] a mis en évidence une classe particulière de permutations en étudiant les points fixes de fonctions continues commutant par composition. Ces permutations, dites depuis permutations de Baxter, peuvent être définies en termes de motifs exclus. Plus précisément, elles vérifient les deux conditions suivantes : pour tout $1 \le i < j < k < l \le n$,

$$\text{si} \quad \pi(i)+1 = \pi(l) \text{ et } \pi(j) > \pi(l) \quad \text{alors} \quad \pi(k) > \pi(l),$$
$$\text{si} \quad \pi(l)+1 = \pi(i) \text{ et } \pi(k) > \pi(i) \quad \text{alors} \quad \pi(j) > \pi(i).$$

Ainsi, sur quatre éléments, seules les permutations 2413 et 3142 ne sont pas des permutations de Baxter.

F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15] ont montré, de manière analytique, que le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ est donné par la formule $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$ dont les premières valeurs sont $1, 2, 6, 22, 92, 422, \ldots$, après avoir deviné cette formule avec le concours du logiciel de calcul formel *MACSYMA*.

Plus tard, C.L. Mallows [74] a donné une interprétation plus fine de ce résultat en montrant que cette sommation correspondait à la distribution des permutations de Baxter suivant leur nombre de montées. De plus, il donne une nouvelle formule pour ces permutations où seul le paramètre m possède une interprétation (nombre de montées) : $\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{m+1} \frac{s.i}{n.(n+1)} \left[\binom{n-s-1}{n-m-2}\binom{n-i-1}{m-1} - \binom{n-s-1}{n-m-1}\binom{n-i-1}{m}\right]$.

X. Viennot [108] a donné une preuve combinatoire de la formule obtenue par F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman en établissant une correspondance entre les permutations de Baxter et certains tableaux semi-standard pour lesquels une formule d'énumération est connue, correspondance qui repose sur un certain nombre de bijections classiques [39, 21, 43].

D'autre part, R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18, 26] lors de la résolution d'un problème posé par R.C. Mullin [76] à propos de l'énumération de certaines familles de cartes planaires, ont établi une correspondance entre le langage produit de mélange (ou shuffle) de deux mots de parenthèses et les couples d'arbres binaires complets. Parmi les divers objets mis en œuvre dans cette correspondance, apparaissent naturellement les permutations de Baxter alternantes. Ils en déduisent que le nombre de telles permutations est $c_n.c_n$ et $c_{n+1}.c_n$.

L'un des objectifs de ce chapitre est de fournir une preuve combinatoire unifiant les résultats de X. Viennot sur les permutations de Baxter [108] et ceux de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot sur les permutations de Baxter alternantes [18], tout en donnant une interprétation combinatoire de la formule de C.L. Mallows [74].

Avant cela, nous restons dans le contexte des permutations à motifs exclus. En effet, S. Gire [45] a montré que l'ensemble des permutations de Baxter sur $[n]$ est exactement $S_n(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)$. Elle a également donné un système de réécriture caractérisant l'arbre de génération de ces permutations.

Nous montrons que les arbres de génération de divers objets considérés par la suite, tels que les permutations excluant simultanément les motifs $21\bar{3}54$ et $41\bar{3}52$ et triplets de chemins deux à deux disjoints, sont caractérisés par le système de réécriture donné par S. Gire pour les permutations de Baxter.

Ensuite, nous considérons une nouvelle famille d'arbres, les arbres binaires jumeaux. Ceux-ci sont obtenus en prenant les deux arbres binaires croissant et décroissant associés à une permutation et en oubliant leurs étiquetages. Cette application surjective est bijective lorsque les permutations considérées sont les permutations de Baxter. Par exemple, les permutations 2413 et 3412 donnent le même couple d'arbres binaires, mais seule la permutation 3412 est une permutation de Baxter.
Partant de cette caractérisation des permutations de Baxter en termes d'arbres binaires jumeaux [29], nous mettons en correspondance permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints dans un huitième de plan (ces triplets de chemins correspondent à des polyominos parallélogrammes jumeaux) et retrouvons ainsi les chemins obtenus par X. Viennot [108], ce qui nous permet de conclure. De plus, dans ces différentes bijections, un certain nombre de paramètres sont transportés.

Ainsi, nous déduisons des travaux d'I.M. Gessel et X. Viennot [43, 44] un déterminant 3×3 donnant le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ distribuées suivant cinq paramètres. Des cas particuliers nous permettent de retrouver les formules de F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15] et de C.L. Mallows [74] pour laquelle nous montrons que les paramètres m, i et s correspondent aux nombres de montées, de minima et maxima à gauche des permutations de Baxter.

De plus, dans la bijection que nous donnons entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints, le caractère alternant des permutations correspond au fait que le second chemin est en escalier. Ainsi apparait naturellement un couple de chemins de Dyck. Nous en déduisons que le nombre de permutations de Baxter alternantes sur $[2n + e]$ ($e = 0$ ou 1) est $c_{n+e}.c_n$, et affinons ensuite ce résultat.

6.1 Permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints

Définition 6.1 *Une permutation π de S_n est une* permutation de Baxter *si et seulement si, pour tout entier $p \in [n-1]$, π se factorise de manière unique sous la forme*

$$\pi = \pi' p \overset{<}{\pi}\overset{>}{\pi}\ (p+1)\pi'' \quad ou \quad \pi = \pi'(p+1)\ \overset{>}{\pi}\overset{<}{\pi}\ p\pi''$$

où tous les éléments de $\overset{<}{\pi}$ [resp. $\overset{>}{\pi}$] sont inférieurs à p [resp. supérieurs à $p+1$].
Nous notons $Baxter_n$ l'ensemble des permutations de Baxter sur $[n]$.

Exemple 6.2 *La permutation* 4236571 *appartient à $Baxter_7$. Par exemple, pour $p = 4$ nous avons $\overset{<}{\pi} = 23$ et $\overset{>}{\pi} = 6$, et pour $p = 1$ nous avons $\overset{>}{\pi} = 3657$ et $\overset{<}{\pi} = \emptyset$.*

Proposition 6.3 *(S. Gire [45]) $Baxter_n = S_n(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)$.*

Remarquons que, d'après la forme des motifs exclus, si π appartient à $Baxter_n$, alors π^*, π^c et π^{-1} appartiennent également à $Baxter_n$.

Définition 6.4 *Nous désignons par $\widehat{Baxter}_{2n+e}$ l'ensemble des permutations de Baxter alternantes sur $[2n+e]$ où $e \in \{0, 1\}$.*

Exemple 6.5 *La permutation* 2834176(11)9(10)5 *appartient à $\widehat{Baxter}_{11}$.*

Définition 6.6 *Soit $T_{n,m}$ l'ensemble des* triplets de chemins deux à deux disjoints *(voir figure 6.1) allant respectivement des 3 points de coordonnées $(0, n-1), (1, n), (2, n+1)$ aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$ en empruntant seulement des pas Est et Nord.*
Nous posons $T_n = \cup_{m=0}^{n-1} T_{n,m}$.

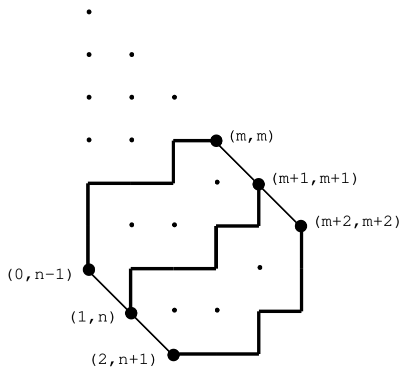


Figure 6.1 Un triplet de chemins deux à deux disjoints appartenant à $T_{7,3}$.

Ces triplets de chemins deux à deux disjoints sont un cas particulier de chemins considérés par I.M. Gessel et X. Viennot [43]. En effet, ils ont montré que les k-uplets de chemins deux à deux disjoints empruntant des pas Est et Nord dans un huitième de plan sont énumérés par le déterminant d'une matrice carrée $k \times k$ à coefficients binômiaux. D'autre part, ils exhibent une correspondance entre ces chemins et les tableaux de Young semi-standard, tableaux dans lesquels les entiers sont non décroissant en colonne et strictement croissant en ligne. De plus, une formule d'énumération pour ces tableaux est connue depuis les travaux de J.B. Remmel et R. Whitney [81].

Ces résultats ont conduit X. Viennot [108] à donner une preuve combinatoire pour l'énumération des permutations de Baxter, en établissant une correspondance entre ces permutations et les triplets de chemins deux à deux disjoints. Cette correspondance se décompose en une bijection entre permutations et histoires de Laguerre [39], une bijection entre mots de Motzkin 2-colorés et polyominos parallélogrammes [21], et finalement une bijection entre chemins deux à deux disjoints et tableaux de Young semi-standard [43]. Il en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.7 *(X. Viennot [108]) Le nombre de permutations de Baxter sur* $[n]$ *ayant* m *montées est égal au nombre de triplets de chemins deux à deux disjoints de* $T_{n,m}$ *et est donné par le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1}{m} & \binom{n}{m} & \binom{n+1}{m} \\ \binom{n-1}{m+1} & \binom{n}{m+1} & \binom{n+1}{m+1} \\ \binom{n-1}{m+2} & \binom{n}{m+2} & \binom{n+1}{m+2} \end{vmatrix} = \frac{\binom{n+1}{m}\cdot\binom{n+1}{m+1}\cdot\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}}$$

6.2 Un système de réécriture unique pour engendrer ces objets

Nous montrons que les permutations de Baxter, les permutations excluant simultanément les motifs $21\bar{3}54$ et $41\bar{3}52$ et les triplets de chemins deux à deux disjoints sont tous en correspondance. En effet, il est possible de caractériser leurs arbres de génération par le même système de réécriture que celui établi par S. Gire pour les permutations de Baxter. De plus, ces ensembles présentent une même triple distribution suivant certains paramètres que nous préciserons.

Proposition 6.8 *(S. Gire [45])*

- *Le système de réécriture* $\mathcal{S}_{Baxter}$ *(voir figure 6.2) caractérisant l'arbre de génération des permutations de Baxter* $T(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)$ *est*
$$\begin{cases} (0,1,1) & \\ (m,g,d) \rightsquigarrow & (m,1,d+1),(m,2,d+1),\ldots,(m,g,d+1), \\ & (m+1,g+1,d),(m+1,g+1,d-1),\ldots,(m+1,g+1,1) \end{cases}$$
- *L'étiquette* (m,g,d) *du système de réécriture* $\mathcal{S}_{Baxter}$ *correspondant à une permutation* π *de l'arbre de génération vérifie* $m = mont(\pi)$*,* $g = maxg(\pi)$ *et* $d = maxd(\pi)$*.*

Pour démontrer cette proposition, S. Gire utilise le résultat suivant.

Lemme 6.9 *(S. Gire [45]) Un site situé à gauche [resp. droite] de l'élément* n *d'une permutation de Baxter sur* $[n]$ *est actif si et seulement si l'élément à sa droite [resp. gauche] est un maximum à gauche [resp. droite].*

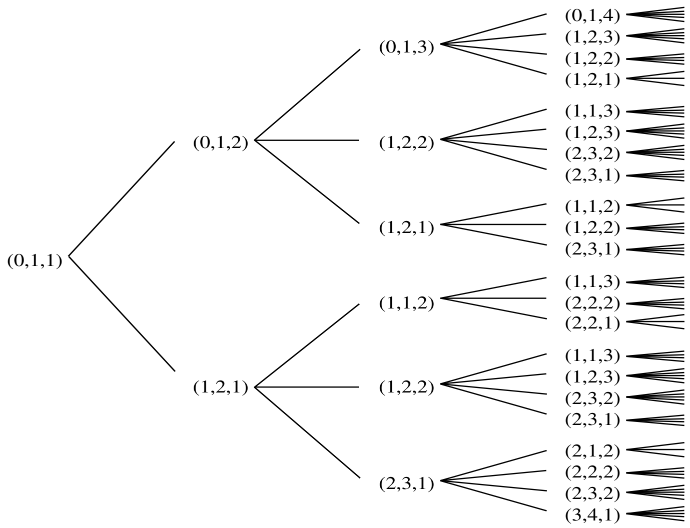


Figure 6.2 Arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$.

Le paramètre m de l'étiquette du système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$ n'est pas nécessaire à la caractérisation de l'arbre de génération mais a été ajouté afin d'obtenir des raffinements dans nos formules d'énumération.

Propriété 6.10 *Une permutation π de $Baxter_n$ vérifie $mont(\pi) = montinv(\pi)$.*

Preuve En effet, d'après le lemme 6.9, le paramètre m peut aussi bien être le nombre de montées que de montées inverses dans l'arbre de génération des permutations de Baxter. □

Proposition 6.11

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$ caractérise l'arbre de génération $T(21\bar{3}54, 41\bar{3}52)$.*
- *L'étiquette (m, g, d) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$ correspondant à une permutation π de l'arbre de génération vérifie $m = montinv(\pi)$, $g = maxg(\pi)$ et $d = maxd(\pi)$.*

Lemme 6.12 *Une permutation de $S_n(21\bar{3}54, 41\bar{3}52)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Les deux premiers sites, le dernier et celui situé à droite de n sont actifs.

(ii) Un site est actif si et seulement si il est situé à droite d'un maximum à gauche ou à droite.

Preuve

- (i) résulte de la forme des motifs exclus.
- (ii).
  Soit e un maximum à gauche [resp. droite] autre que n, le motif $41\bar{3}52$ [resp. $21\bar{3}54$] ne pouvant pas interdire un site à gauche [resp. droite] de n. Supposons que le motif $21\bar{3}54$ [resp. $41\bar{3}52$] interdise le site à droite de e, c'est à dire qu'existent e_1 et e_2 à gauche de e [resp. e_1 entre n et e et e_2 à

droite de e] tels que la sous-suite $e_1e_2(n+1)n$ [resp. $ne_1(n+1)e_2$] soit de type 2143 [resp. 3142]. Alors, $e_1e_2e(n+1)n$ [resp. $ne_1e(n+1)e_2$] est de type 21354 [resp. 41352].
Réciproquement, soit e un élément qui ne soit ni un maximum à gauche, ni un maximum à droite. Alors, existent e_1 et e_2 respectivement à gauche et à droite de e, tous deux supérieurs à e. La sous-suite $e_1e(n+1)e_2$ est de type 2143 ou 3142 sans qu'aucun élément ne soit situé entre e et $n+1$.

□

Preuve de la proposition 6.11. L'étiquette de la permutation 1 est bien $(0,1,1)$.
Soit π une permutation de l'arbre de génération des permutations ayant pour étiquette (m,g,d).

- Insertion dans l'un des sites actifs à gauche de n.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $i^{ème}$ site actif de π, pour tout $i \in [g]$.
  L'étiquette de γ est alors $(m,i,d+1)$.
- Insertion dans l'un des sites actifs à droite de n.
  Soit γ la permutation obtenue en insérant l'élément $n+1$ dans le $(g+d+1-j)^{ème}$ site actif de π, pour tout $j \in [d]$.
  L'étiquette de γ est alors $(m+1,g+1,j)$.

□

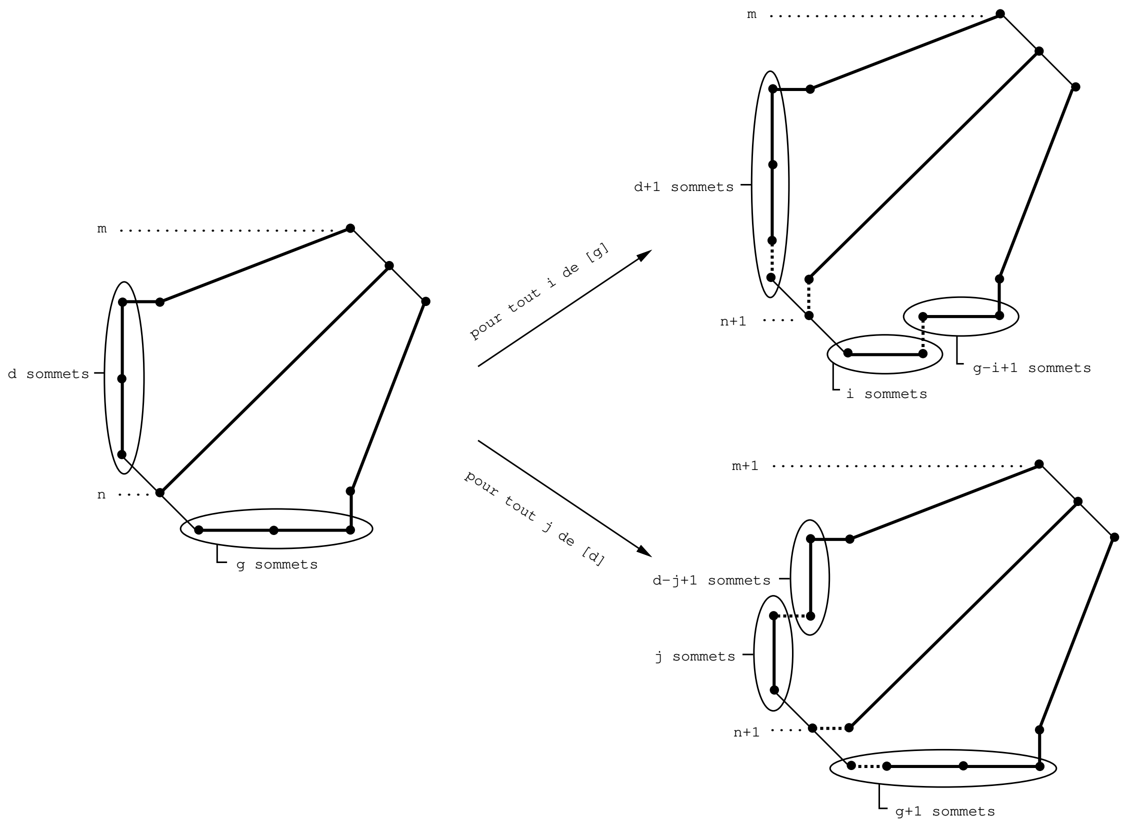


Figure 6.3 Règles de construction des triplets de chemins deux à deux disjoints.

Proposition 6.13

- *Le système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$ caractérise un arbre de génération des triplets de chemins deux à deux disjoints (voir figure 6.4) obtenu en appliquant les règles de construction décrites par la figure 6.3.*
- *L'étiquette (m, g, d) du système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$ associée à un triplet de chemins deux à deux disjoints de $T_{n,m}$ est telle que $d - 1$ [resp. $g - 1$] soit exactement le nombre de pas Nord [resp. Est] initiaux du premier [resp. dernier] chemin.*

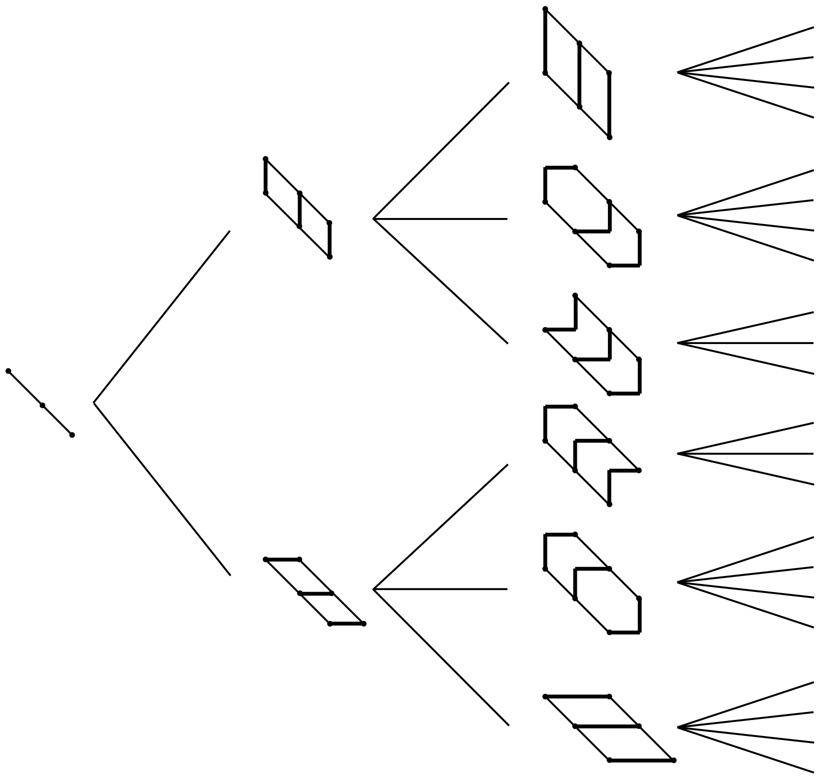


Figure 6.4 Arbre de génération des triplets de chemins deux à deux disjoints.

Preuve Un raisonnement par induction permet de montrer que tout triplet de chemins deux à deux disjoints peut être obtenu en appliquant ces règles de construction. En effet, soit $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ un triplet de chemins deux à deux disjoints de $T_{n,m}$. Considérons le premier pas de ω_2. S'il s'agit d'un pas Nord [resp. Est], sa suppression ainsi que la suppression du premier pas Nord [resp. Est] de ω_1 [resp. ω_3] et la suppression du premier pas de ω_3 [resp. ω_1] donne un triplet de chemins deux à deux disjoints appartenant à $T_{n-1,m}$ [resp. $T_{n-1,m-1}$].

De plus, d'après les règles de construction, chaque triplet de chemins deux à deux disjoints n'est obtenu qu'une seule fois.

Il est immédiat de constater, compte-tenu des règles de construction, que cet arbre de génération est caractérisé par le système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$. □

6.3 Une correspondance entre permutations de Baxter et triplets de chemins

Nous donnons ici une nouvelle correspondance entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints permettant d'unifier les preuves combinatoires de X. Viennot [108] sur l'énumération des permutations de Baxter et celle de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18] pour les permutations de Baxter alternantes.

Cette correspondance se compose de deux bijections, la première reliant les permutations de Baxter et les arbres binaires jumeaux, la seconde reliant les arbres binaires jumeaux et les triplets de chemins deux à deux disjoints.

Définition 6.14 *L'ensemble des* arbres binaires jumeaux J_n *(voir figure 6.5) est l'ensemble*

$$J_n = \{(a_1, a_2) : complété(a_1), complété(a_2) \in A_n \text{ et } \Theta(code(complété(a_1))) = \Theta^c(code(complété(a_2)))\}$$

où Θ *consiste en l'étiquetage des feuilles gauches [resp. droites] d'un arbre binaire (une fois complété) par la lettre* 0 *[resp.* 1*] excepté les deux feuilles extrêmes et* Θ^c *est identique à* Θ *modulo l'échange des lettres* 0 *et* 1.
Plus formellement, Θ *est l'application surjective de* $P_{z,\overline{z}}$ *dans* $\{0,1\}^*$ *définie par* $\Theta(z^l\overline{z}w_{l+2}w_{l+3}\dots w_{2n}) = \Theta(\overline{z}w_{l+2})\Theta(w_{l+2}w_{l+3})\dots\Theta(w_{2n-1}w_{2n})$ *avec* $\Theta(zz) = \Theta(\overline{z}z) = \varepsilon$, $\Theta(z\overline{z}) = 0$, $\Theta(\overline{z}\overline{z}) = 1$.

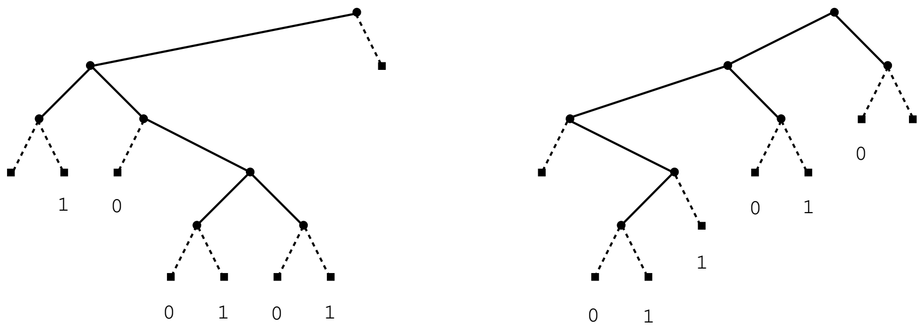


Figure 6.5 Deux arbres binaires jumeaux.

Exemple 6.15 *La figure 6.5 représente deux arbres binaires jumeaux de* J_7 *avec leurs étiquetages sur* $\{0,1\}$*, et dont les codes des arbres binaires complétés sont respectivement* $zzz\overline{zz}z\overline{z}zz\overline{zz}z\overline{zz}$ *et* $zzz\overline{z}zz\overline{zzz}z\overline{zz}z\overline{z}$.

6.3.1 La bijection entre permutations de Baxter et arbres binaires jumeaux

Théorème 6.16 *(S. Dulucq et O. Guibert [29]) Il existe une bijection* Ψ *(voir figure 6.6) entre permutations de Baxter et arbres binaires jumeaux.*

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & Baxter_n & \longrightarrow & J_n \\ & & \pi & \longmapsto & (a_1, a_2) \end{array}$$

De plus, à une permutation de Baxter ayant m montées, i minima à gauche et s maxima à gauche correspond par Ψ deux arbres binaires jumeaux dont le premier arbre binaire possède m arêtes droites et i sommets sur sa branche gauche et dont le second arbre binaire possède s sommets sur sa branche gauche.

L'application Ψ et son inverse sont définies de la façon suivante.

- Ψ consiste, pour une permutation π appartenant à $Baxter_n$, à construire ses arbres binaires croissant et décroissant. Les deux arbres binaires a_1 et a_2 sont ces deux arbres dépouillés de l'étiquetage de leurs sommets.
- L'application inverse Ψ^{-1} peut être décrite par l'algorithme suivant opérant sur un couple d'arbres binaires jumeaux (a_1, a_2) ayant n sommets.

pour k variant de n à 1, répèter le processus suivant :
  considérant l'ordre infixe sur les sommets de a_1 et a_2, soit i l'ordre de la racine de a_2
  étiqueter k le $i^{ème}$ sommet (une feuille) f de a_1
  si f est une feuille gauche
  alors soit s le dernier sommet de la branche gauche du sous-arbre droit de a_2
    greffer le sous-arbre gauche de a_2 sur le sommet s
  sinon soit s le dernier sommet de la branche droite du sous-arbre gauche de a_2
    greffer le sous-arbre droit de a_2 sur le sommet s
  supprimer la racine de a_2
  supprimer la feuille f de a_1

Au cours de cet algorithme, l'étiquetage croissant des sommets de a_1 est réalisé et la permutation π est alors obtenue en projetant en ordre infixe cet étiquetage.

Exemple 6.17 *La figure 6.6 illustre l'application Ψ en présentant une permutation de Baxter, ses arbres binaires croissant et décroissant, et les arbres binaires jumeaux correspondants.*
La figure 6.7 présente l'application Ψ^{-1} en déroulant chaque étape de l'algorithme précédent (où les $i^{èmes}$ sommets de a_1 et a_2 sont visualisés entre crochets, la feuille f de a_1 étiquetée k est mise en évidence, le sommet s est encadré et les arêtes de a_1 et a_2 à supprimer sont représentées en gras), l'arbre binaire croissant ainsi obtenu, et la permutation de Baxter correspondante.

Preuve du théorème 6.16.

- Considérons une permutation π et ses arbres binaires croissant et décroissant dépouillés de leurs étiquetages. Supposons que ces deux arbres binaires ne soient pas jumeaux. Alors, il existe pour chacun des deux arbres binaires complétés une feuille (autre que la première ou la dernière) ayant

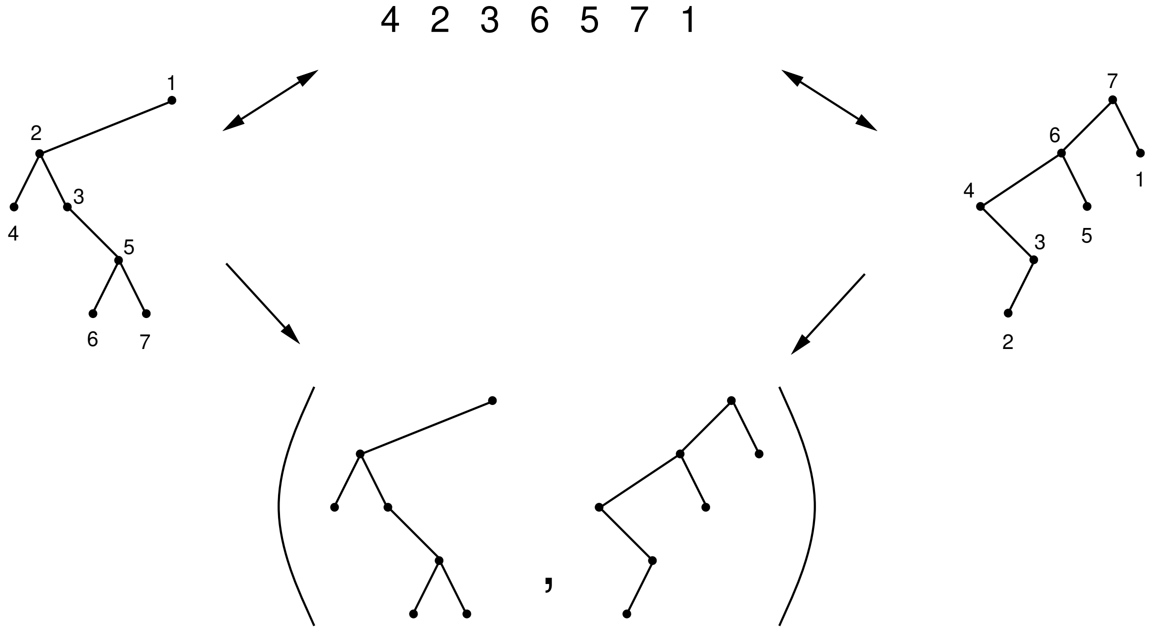


Figure 6.6 L'application Ψ, d'une permutation de Baxter aux arbres binaires jumeaux.

même rang impair relativement à l'ordre infixe sur tous les sommets et même orientation gauche ou droite dans les deux arbres. Supposons que cette même orientation soit par exemple la gauche. Le sommet père de cette feuille correspond dans les deux arbres binaires croissant et décroissant à un même élément de la permutation π. Ce même élément serait donc soit une feuille, soit un point simple à droite des arbres binaires croissant et décroissant associés à π. Ainsi, il correspondrait dans le cas de l'arbre binaire croissant à un pic (montée suivie d'une descente) ou une double-montée de π, et il correspondrait dans le cas de l'arbre binaire décroissant à un creux (descente suivie d'une montée) ou une double-descente de π. Ceci est bien évidemment impossible.

- L'application inverse Ψ^{-1} associe une et une seule permutation de Baxter π à un couple d'arbres binaires jumeaux (a_1, a_2).
  - L'application Ψ^{-1} est bien définie.
    * f est une feuille. Sinon, pour que les deux arbres soient jumeaux, il serait nécessaire d'avoir la relation $i = k = 1$, vraie seulement si les arbres sont réduits à un sommet.
    * f ayant un père dans a_1, la racine de a_2 a une arête d'orientation contraire.
    * A chaque étape, les nouveaux arbres binaires obtenus sont jumeaux.
  - Ψ^{-1} reconstitue un à un l'étiquetage croissant d'un arbre binaire, ce qui code une et une seule permutation.
  - La permutation obtenue est bien une permutation de Baxter.

    A l'étape k, pour tout $k \in [2, n]$, l'application Ψ^{-1} supprime une feuille gauche [resp. droite] f correspondant à l'élément k situé à gauche [resp. droite] d'un maximum à gauche [resp. droit] d'une permutation de S_{k-1}. Compte-tenu de la proposition 6.8 et du lemme 6.9, nous en déduisons par induction que la permutation obtenue est une permutation de Baxter.

□

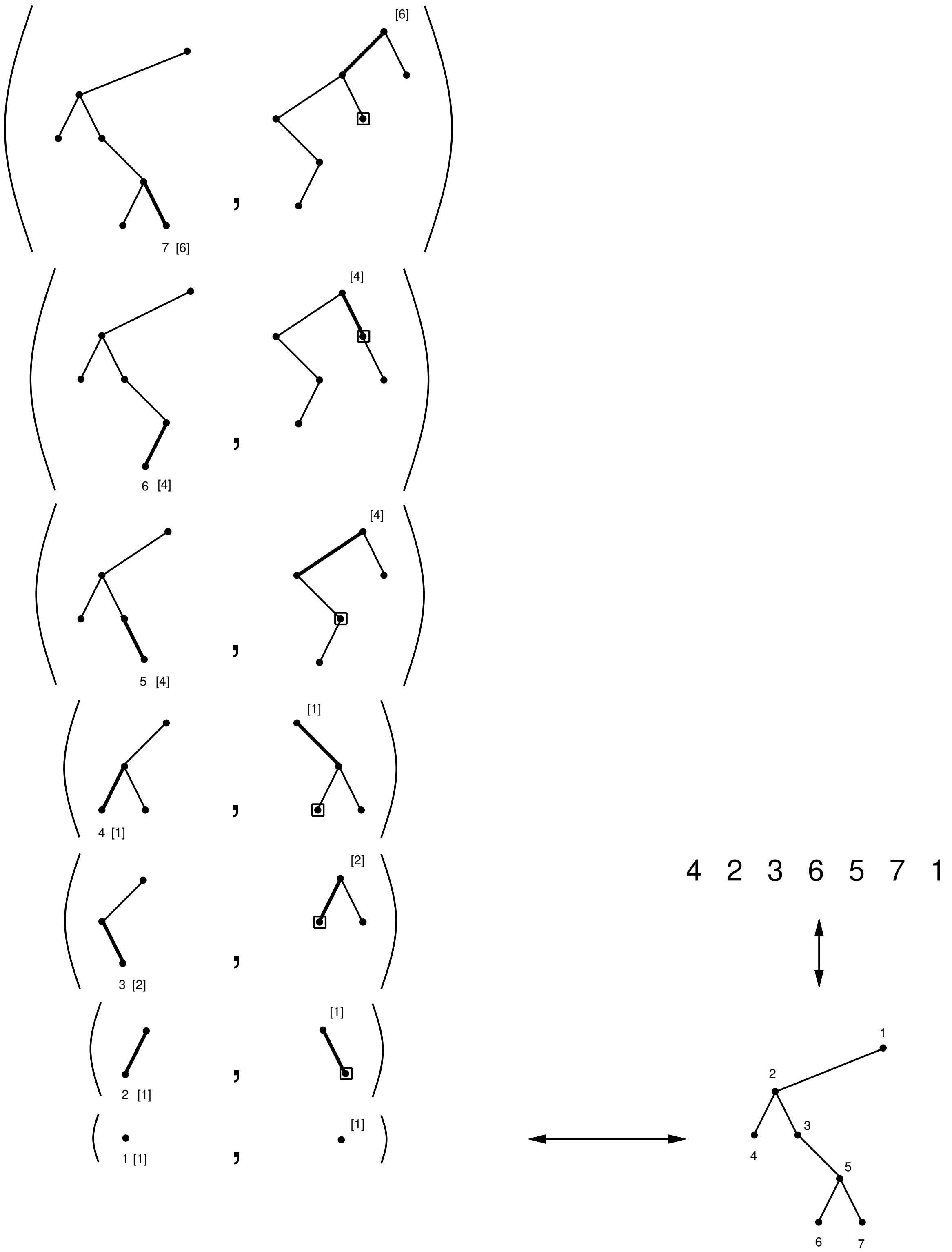


Figure 6.7 L'application inverse Ψ^{-1}, de deux arbres binaires jumeaux à une permutation de Baxter.

Propriété 6.18 *Soit π une permutation de Baxter telle que $\Psi(\pi) = (a_1, a_2)$.
Alors, $\Psi(\pi^*) = (a_1^\star, a_2^\star)$ et $\Psi(\pi^c) = (a_2, a_1)$.*

Preuve D'une part, l'arbre binaire croissant [resp. décroissant] d'une permutation σ quelconque est exactement le miroir de l'arbre binaire croissant [resp. décroissant] de σ^*. D'autre part, les arbres binaires croissant et décroissant d'une permutation σ quelconque sont échangés (et leurs étiquetages complémentés) lorsque nous considérons la permutation σ^c. □

6.3.2 La bijection entre arbres binaires jumeaux et triplets de chemins

Théorème 6.19 *Il existe une bijection Γ (voir figure 6.9) entre arbres binaires jumeaux et triplets de chemins deux à deux disjoints.*

$$\begin{array}{cccc} \Gamma & : & J_n & \longrightarrow & T_n \\ & & (a_1, a_2) & \longmapsto & t \end{array}$$

De plus, à deux arbres binaires jumeaux dont le premier arbre binaire possède m arêtes droites et i sommets sur sa branche gauche et dont le second arbre binaire possède s sommets sur sa branche gauche correspond par Γ un triplet de chemins deux à deux disjoints allant des 3 points de coordonnées $(1, n-i), (1, n), (s+1, n)$ respectivement aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$ en empruntant des pas Est et Nord.

Lemme 6.20 *(M. Delest et X. Viennot [21]) Il existe une bijection (voir figure 6.8) entre arbres binaires ayant n sommets, m arêtes droites et dont la branche gauche contient k sommets et couples de chemins disjoints allant des points de coordonnées $(1, n-k)$ et $(1, n)$ respectivement aux points de coordonnées (m, m) et $(m+1, m+1)$ en empruntant des pas Est et Nord.*

Preuve La bijection originale [21] entre arbres binaires et polyominos parallélogrammes, détaillée dans la sous-section 1.3.1, peut être vue sous une autre forme. En effet, elle revient à coder un arbre binaire complété en le parcourant suivant l'ordre préfixe par deux chemins deux à deux disjoints. Le premier chemin est obtenu en codant les arêtes internes (qui ne supportent pas les feuilles) gauche [resp. droite] par un pas Nord [resp. Est]; le second chemin est obtenu en codant les feuilles (exceptées les deux extrêmes) gauche [resp. droite] par un pas Est [resp. Nord]. □

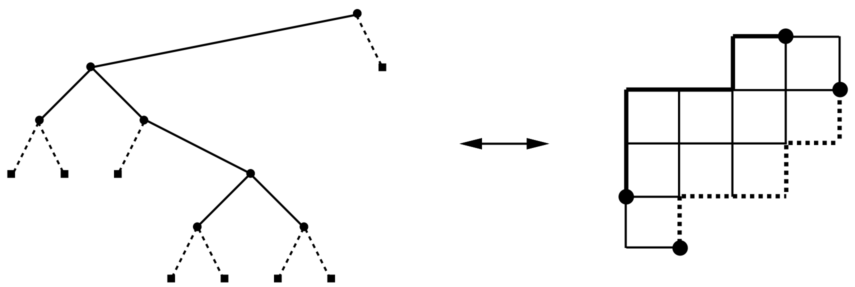


Figure 6.8 Arbre binaire complété et polyomino parallélogramme en bijection.

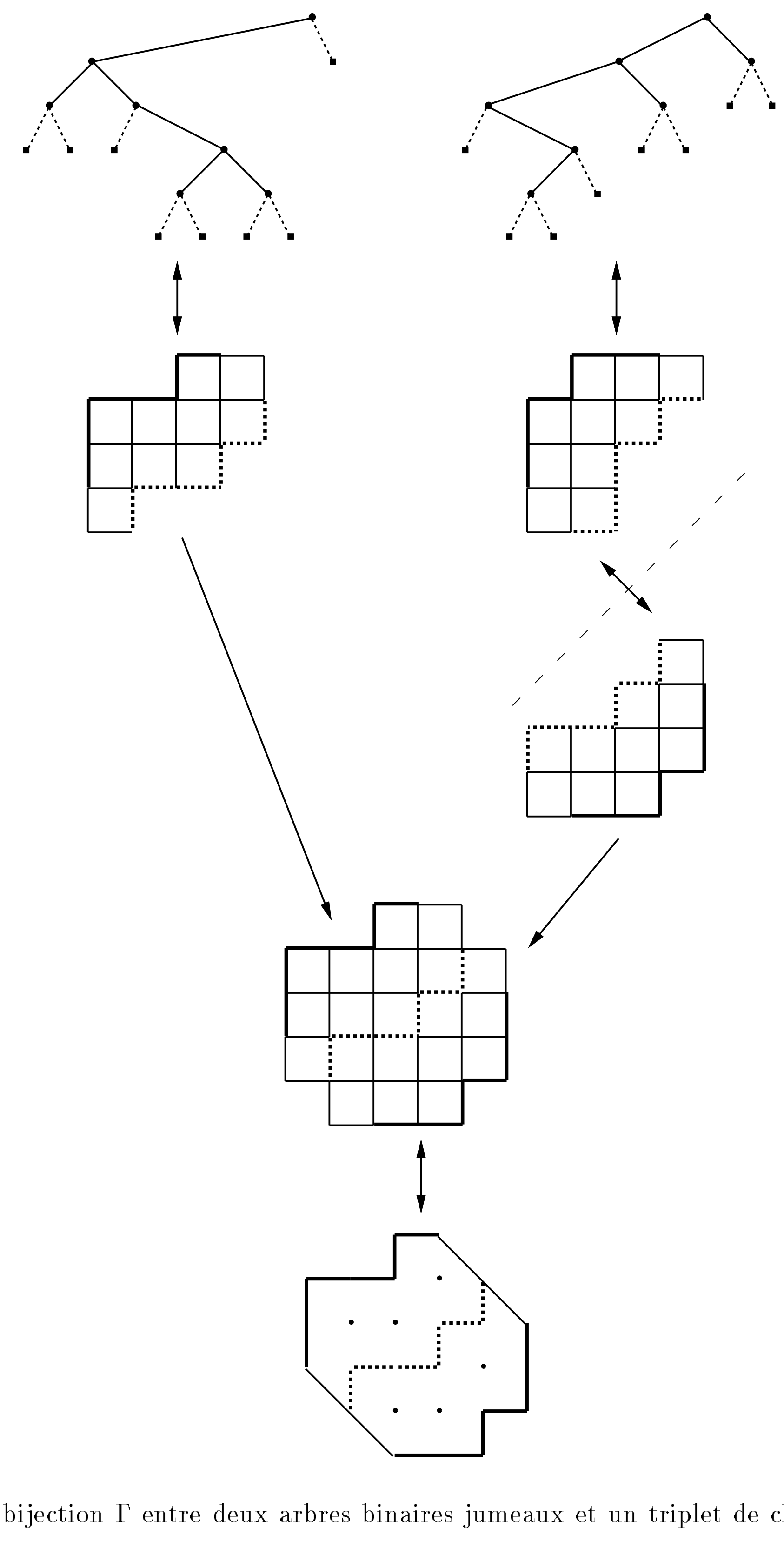


Figure 6.9 La bijection Γ entre deux arbres binaires jumeaux et un triplet de chemins deux à deux disjoints.

Preuve du théorème 6.19. Tout d'abord, d'après le lemme 6.20, à deux arbres binaires jumeaux correspondent deux couples de chemins disjoints (ou deux polyominos parallélogrammes). D'après la définition du caractère jumeau de deux arbres et la correspondance entre arbres binaires et couples de chemins disjoints (preuve du lemme 6.20), ces deux couples de chemins ont leurs seconds chemins complémentaires. Une symétrie par rapport à la diagonale du second couple permet de coller ces deux couples de chemins, donnant ainsi un triplet de chemins deux à deux disjoints.
Cette construction est clairement réversible. □

6.4 Enumération des permutations de Baxter

En composant les deux bijections Ψ et Γ des théorèmes 6.16 et 6.19, nous avons obtenu une correspondance entre permutations de Baxter et triplets de chemins deux à deux disjoints qui transporte plusieurs paramètres, nous permettant de raffiner les formules d'énumération connues sur ces objets.

6.4.1 Permutations de Baxter

En utilisant les résultats d'I.M. Gessel et X. Viennot [43, 44] sur l'énumération de chemins deux à deux disjoints, nous obtenons des formules d'énumération pour les permutations de Baxter qui précisent celles déjà connues, nous permettant en particulier d'avoir une interprétation naturelle de la formule de C.L. Mallows [74].

Théorème 6.21 *Le nombre de permutations de Baxter sur* $[n]$ *ayant* m *montées,* i *minima à gauche et* s *maxima à gauche est*

$$\binom{n+1}{m+1}\frac{s.i}{n.(n+1)}\left[\binom{n-s-1}{n-m-2}\binom{n-i-1}{m-1}-\binom{n-s-1}{n-m-1}\binom{n-i-1}{m}\right]$$

Preuve Le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ ayant m montées, i minima à gauche et s maxima à gauche est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1-i}{m-1} & \binom{n-1}{m-1} & \binom{n-1-s}{m-s-1} \\ \binom{n-1-i}{m} & \binom{n-1}{m} & \binom{n-1-s}{m-s} \\ \binom{n-1-i}{m+1} & \binom{n-1}{m+1} & \binom{n-1-s}{m-s+1} \end{vmatrix}$$

En effet, ces permutations de Baxter correspondent aux triplets de chemins deux à deux disjoints allant des 3 points de coordonnées $(1, n-i), (1, n), (s+1, n)$ respectivement aux 3 points de coordonnées $(m, m), (m+1, m+1), (m+2, m+2)$. Or, par une preuve en tout point identique à celle décrite dans l'article d'I.M. Gessel et X. Viennot [43] (la même involution permet d'obtenir le même résultat bien qu'ici nous n'ayons pas un mineur de déterminant binômial) ou plus simplement en spécialisant le résultat général exposé dans leur autre article [44], nous obtenons que le nombre de tels chemins est donné par ce déterminant, dont le calcul fournit la formule annoncée et due à C.L. Mallows [74]. □

Remarque 6.22 *La formule du théorème 6.21 dénombre les sommets au niveau n ayant pour étiquette (m, s, i) dans l'arbre de dérivation du système de réécriture $\mathcal{S}_{Baxter}$. En particulier, elle s'applique aux permutations excluant simultanément les motifs $21\bar{3}54$ et $41\bar{3}52$ et donne leur distribution suivant les nombres m de montées inverses, s de maxima à gauche et i de maxima à droite.*

Preuve Soit π une permutation de $Baxter_n$ ayant m montées, i minima à gauche et s maxima à gauche. Alors, la permutation π^{-1c*}, elle-même une permutation de Baxter sur $[n]$, possède m montées, i maxima à droite, s maxima à gauche d'après les propriétés 1.4 et 6.10. Les propositions 6.8 et 6.13 nous permettent de conclure. □

Notre correspondance nous permet de retrouver le résultat dû à F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15], démontré ensuite combinatoirement par X. Viennot [108].

Corollaire 6.23 *Le nombre de permutations de Baxter sur $[n]$ ayant m montées est*

$$\frac{\binom{n+1}{m} \cdot \binom{n+1}{m+1} \cdot \binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1} \cdot \binom{n+1}{2}}$$

Preuve Ces permutations correspondent à des triplets de chemins deux à deux disjoints allant des 3 points de coordonnées $(0, n-1), (1, n), (2, n+1)$ respectivement aux 3 points de coordonnées (m, m), $(m+1, m+1), (m+2, m+2)$. Or, le nombre de tels chemins est donné par le déterminant [43, 108]

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1}{m} & \binom{n-1}{m-1} & \binom{n-1}{m-2} \\ \binom{n-1}{m+1} & \binom{n-1}{m} & \binom{n-1}{m-1} \\ \binom{n-1}{m+2} & \binom{n-1}{m+1} & \binom{n-1}{m} \end{vmatrix}$$

□

En fait, nous obtenons une énumération plus fine des permutations de Baxter en considérant deux paramètres supplémentaires.

Définition 6.24 *Etant donnée une permutation π de S_n, considérons les paramètres suivants.*

- $md(\pi) = mont(\pi(i)\pi(i+1)\ldots\pi(n)) \in [n]$
  avec $i = \max\{j : \exists k \geq 2, \pi(j) < \pi(j+k) < \pi(j+1) < \pi(j+2) < \cdots < \pi(j+k-1)\}$
  en considérant que $\pi(0) = -1$ *et* $\pi(n+1) = 0$.

- $dd(\pi) = desc(\pi(i)\pi(i+1)\ldots\pi(n)) \in [n]$
  avec $i = \max\{j : \exists k \geq 2, \pi(j) > \pi(j+k) > \pi(j+1) > \pi(j+2) > \cdots > \pi(j+k-1)\}$
  en considérant que $\pi(0) = n+2$ *et* $\pi(n+1) = n+1$.

Remarquons que $md(\pi)$ [resp. $dd(\pi)$] vaut un de plus que le nombre d'arêtes droites situées à droite de la dernière arête gauche de l'arbre binaire croissant [resp. décroissant] de π parcouru dans l'ordre infixe.

Théorème 6.25 *Le nombre de permutations de Baxter π sur $[n]$ ayant m montées, i minima à gauche, s maxima à gauche et telles que $p = md(\pi)$ et $q = dd(\pi)$ (voir figure 6.10) est donné par le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \binom{n-1-i-p}{m-p} & \binom{n-1-p}{m-p} & \binom{n-1-s-p}{m-s-p} \\ \binom{n-1-i}{m} & \binom{n-1}{m} & \binom{n-1-s}{m-s} \\ \binom{n-1-i-q}{m} & \binom{n-1-q}{m} & \binom{n-1-s-q}{m-s} \end{vmatrix}$$

Preuve Une lecture plus fine des bijections Ψ et Γ permet de constater que ces deux paramètres supplémentaires sur les permutations de Baxter sont effectivement transportés sur les triplets de chemins deux à deux disjoints. □

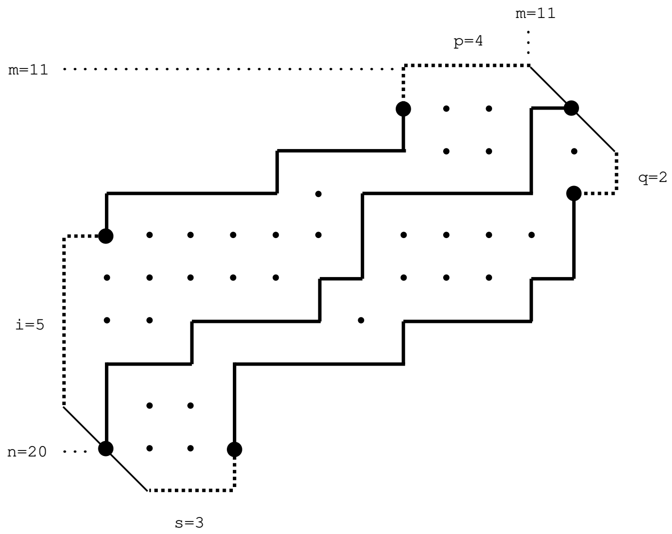


Figure 6.10 Les cinq paramètres considérés sur les triplets de chemins deux à deux disjoints.

6.4.2 Permutations de Baxter alternantes

Nous retrouvons et précisons ici un résultat dû à R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18].

Théorème 6.26 *Le nombre de permutations de Baxter alternantes sur $[2n+e]$ où $e \in \{0,1\}$ ayant i minima à gauche et s maxima à gauche est*

$$\frac{i}{n+e-i}\binom{2(n+e)-i-1}{n+e}.\frac{s-1}{n-s+1}\binom{2n-s}{n}$$

Corollaire 6.27 *Le nombre de permutations de Baxter alternantes sur $[2n+e]$ où $e \in \{0,1\}$ est*

$$c_{n+e}.c_n$$

Preuve Rappelons tout d'abord qu'à une permutation alternante correspond un arbre binaire croissant (ou décroissant) quasi-complet. En particulier, à une permutation de Baxter alternante sur $[2n]$

correspond un arbre binaire croissant [resp. décroissant] complet auquel il manque la feuille gauche [resp. droite] extrême tandis qu'à une permutation de Baxter alternante sur $[2n+1]$ correspond un arbre binaire croissant complet auquel il manque les deux feuilles (gauche et droite) extrêmes et un arbre binaire décroissant qui lui est complet. De plus, un tel couple d'arbres binaires quasi-complets, du fait de cette quasi-complétude, constitue un couple d'arbres binaires jumeaux. Ainsi, les permutations de Baxter alternantes sont en bijection avec les couples d'arbres binaires complets, et nous obtenons le résultat annoncé. □

Exemple 6.28 *La figure 6.11 illustre la correspondance entre permutations de Baxter alternantes et triplets de chemins deux à deux disjoints, et permet de constater que le deuxième chemin a une forme fixée (en escalier). Nous retrouvons naturellement par ce passage les chemins de Dyck.*

Preuve du théorème 6.26. Ce résultat est analogue à celui du théorème 6.21. En effet, aux permutations de Baxter alternantes sur $[2n+e]$ ayant i minima à gauche et s maxima à gauche correspondent deux chemins de Dyck débutant exactement par i et $s-1$ pas montants (ou deux arbres binaires jumeaux dont les branches gauches ont respectivement i et $s-1$ sommets). Ces objets sont énumérés par les nombres de Delannoy ce qui nous donne le résultat. □

En fait, nous affinons encore ces résultats en considérant les paramètres de la définition 6.24.

Théorème 6.29 *Le nombre de permutations de Baxter alternantes π sur $[2n+e]$ où $e \in \{0,1\}$ ayant i minima à gauche, s maxima à gauche et telles que $p = md(\pi)$ et $q = dd(\pi)$ est*

$$\left[\binom{2n+e-i-p-1}{n-p} - \binom{2n+e-i-p-1}{n-i-p}\right] \cdot \left[\binom{2n+e-s-q-1}{n-s} - \binom{2n+e-s-q-1}{n-1}\right]$$

Preuve C'est une conséquence directe du théorème 6.25 pour les permutations de Baxter alternantes. La formule se déduit de l'énumération des chemins de Dyck selon les hauteurs initiale et finale. □

La série génératrice des permutations de Baxter alternantes n'est pas algébrique, comme l'a montré D. Gouyou-Beauchamps [48, 49]. Toutefois, signalons que le système de réécriture

$$\begin{cases} (1,1) & \\ (x,y) & \rightsquigarrow \quad (1,x+1),(2,x+1),\ldots,(y,x+1) \end{cases}$$

caractérise l'arbre de génération des permutations de Baxter alternantes. L'étiquette (x,y) correspondant à une permutation π sur $[2n+e]$ avec $e \in \{0,1\}$ de l'arbre de génération vérifie $x = maxd(\pi)$ et $y = mind(\pi)$ dans le cas $e = 0$, $x = mind(\pi)$ et $y = maxd(\pi)$ lorsque $e = 1$.

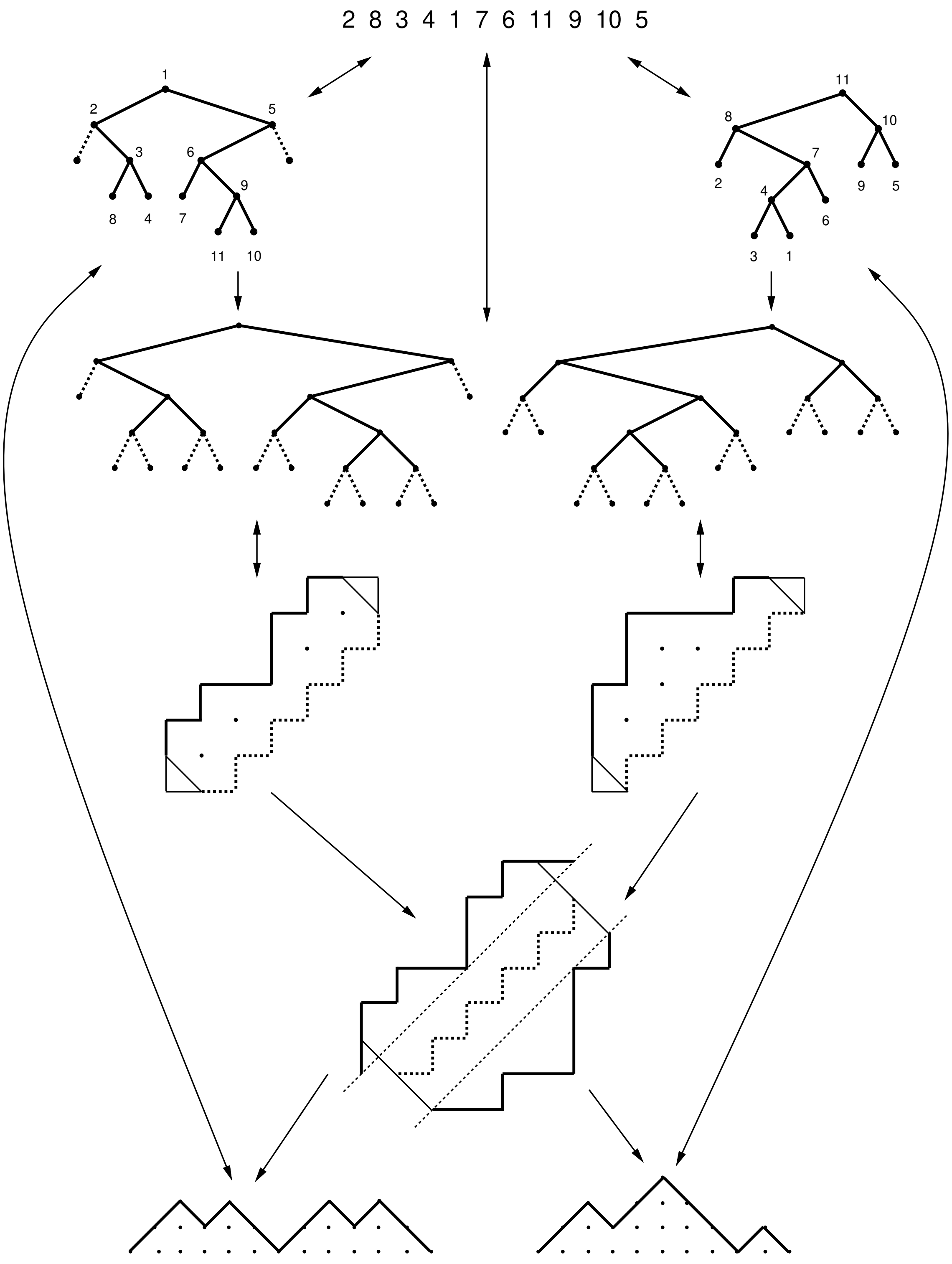


Figure 6.11 D'une permutation de Baxter alternante au triplet de chemins deux à deux disjoints : deux chemins de Dyck.

Chapitre 7

Mots de piles et tableaux de Young standard rectangulaires

Parmi les généralisations naturelles de l'algorithme de tri au moyen d'une pile considéré par D.E. Knuth [62], J. West [110, 113] s'est intéressé aux permutations triables par plusieurs passages consécutifs dans une pile, celle-ci devant satisfaire à une condition dite de type "tour de Hanoï", c'est à dire vérifier qu'à tout instant les entiers croissent à partir du sommet de la pile.

S. Gire [45] a étudié un problème voisin. Elle considère un ensemble de k piles placées en série et s'intéresse à leurs mouvements lorsque la permutation identité les traverse.
Les mots du langage $Y_n^{(k)} = \{f \in \{1, 2, \ldots, k+1\}^* : \forall i \in [k+1], |f|_i = n; \forall i \in [k], \forall f = f'f'', |f'|_i \geq |f'|_{i+1}\}$ codent exactement les mouvements des k piles lorsque la permutation $12\ldots n$ les traverse (voir figure 7.1). Ce langage $Y_n^{(k)}$ code également les tableaux de Young standard [116] rectangulaires de hauteur $k+1$ et de longueur n, c'est à dire de forme $\lambda = (n, n, \ldots, n)$ partition de l'entier $(k+1).n$. Nous déduisons de la formule des équerres [38] que $|Y_n^{(k)}| = ((k+1).n)! \prod_{i=0}^{k} \frac{i!}{(n+i)!}$.

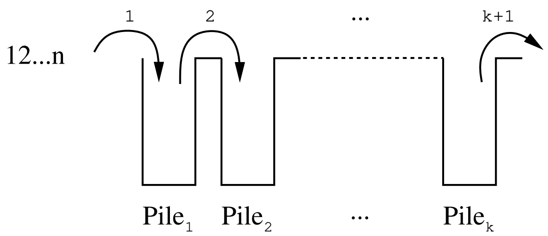


Figure 7.1 Mots de piles.

Dans le cas d'une seule pile ($k = 1$), les mots de $Y_n^{(1)}$ sont les mots de parenthèses et il y a une correspondance immédiate entre ces mots et les permutations 1-triables.

Ici, nous nous intéressons aux cas de deux piles ($k = 2$) et aux objets correspondant aux mouvements de ces deux piles que sont les tableaux de Young standard rectangulaires $3 \times n$, au nombre de $\frac{2(3n)!}{(n+2)!(n+1)!n!}$.

Définition 7.1 *Notons $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ l'alphabet des mots associés aux mouvements de deux piles, et $Y = \{f \in \mathcal{A}^* : |f|_1 = |f|_2 = |f|_3; \forall f = f'f'', |f'|_1 \geq |f'|_2 \geq |f'|_3\}$ le langage des mots codant les mouvements des piles (ensemble des mots de piles) correspondant aux tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3. Posons $Y_n = Y_n^{(2)} = \{f \in Y : |f| = 3n\}$.*

Le fait d'imposer certaines restrictions sur les piles (par exemple qu'elles vérifient une condition de type “tour de Hanoï”) se traduit simplement par certaines restrictions sur ces tableaux de Young standard.

Nous montrons en particulier que le nombre de tableaux de Young standard rectangulaires $3 \times n$ n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne est donné par le carré du $n^{ème}$ nombre de Catalan, résultat à rapprocher de ceux obtenus par D. Gouyou-Beauchamps [48, 49] à propos de l'énumération de tableaux de Young standard de hauteur au plus 4 et par L. Favreau [37] sur les tableaux oscillants de hauteur au plus 2.

Nous obtenons les résultats suivants, les trois premiers ayant été conjecturés par S. Gire [45].

Théorème 7.2 *Le nombre de mots du langage $C_n = Y_n \setminus \{\mathcal{A}^*22\mathcal{A}^*\}$ (ensemble des mots de piles sans facteur 22) codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne est*

$$c_n.c_n$$

Théorème 7.3 *Le nombre de mots du langage $B_n = Y_n \setminus \{\mathcal{A}^*22\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*11\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*33\mathcal{A}^*\}$ (ensemble des mots de piles sans facteur 22, 11, 33) codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne est égal au nombre de permutations de Baxter de $S_n(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)$ donné par*

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$$

Théorème 7.4 *Le nombre de mots du langage $H_n = Y_n \setminus \{f = f'2g2f'' : g \in Y\}$ (ensemble des mots de piles vérifiant la condition “tour de Hanoï”) codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n est égal au nombre de cartes planaires cubiques pointées non séparables ayant $2n$ sommets de CNS_{2n} donné par [103]*

$$\frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

Théorème 7.5 *Le nombre de mots du langage $P_n = Y_n \setminus \{f = f'2g2f'' : g \in Y\} \setminus \{\mathcal{A}^*11\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*33\mathcal{A}^*\}$ (ensemble des mots de piles vérifiant la condition “tour de Hanoï” et sans* *facteur* $11, 33$*) codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur* 3 *et de longueur* n *n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne est égal au nombre de cartes planaires pointées non séparables ayant* $n+1$ *arêtes de* NS_{n+1} *donné par [105]*

$$\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

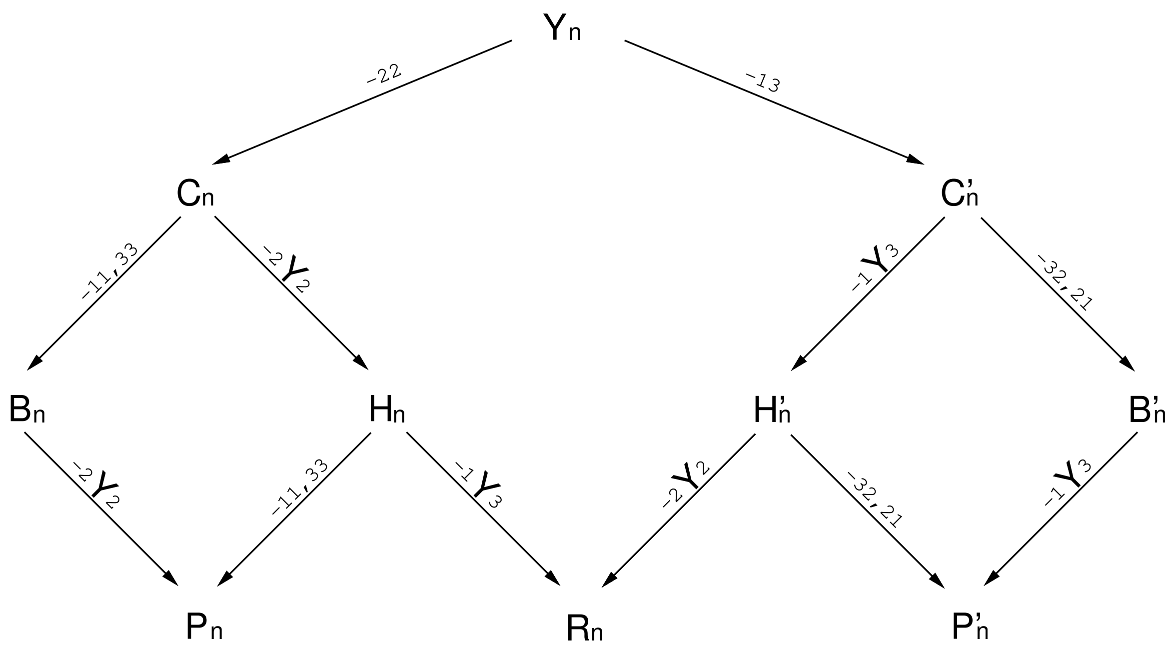


Figure 7.2 Schéma des restrictions sur le langage Y_n.

Le schéma de la figure 7.2 présente les différentes restrictions apportées au langage Y_n codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n (ensemble des mots de piles) auxquelles nous nous sommes intéressés.
La notation -22 signifie que nous considérons les mots de piles ne comportant pas le facteur 22 et la notation -2Y2 indique que nous interdisons tout facteur de la forme $2g2$ où $g \in Y$.

Nous pouvons remarquer, à partir de la définition du langage C_n [resp. C'_n], que pour tout mot f de C_n [resp. C'_n], le nombre de facteurs $11, 33, 13$ [resp. $32, 21, 22$] de f détermine exactement le nombre de chacun des autres facteurs de longueur deux de f.

Tandis que les langages C_n, B_n, H_n et P_n apparaissant dans la partie gauche de la figure 7.2 correspondent à des restrictions naturelles sur les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n, les langages C'_n, B'_n, H'_n et P'_n traduisent des restrictions sur une famille particulière d'arbres 1-2 que nous définissons maintenant et pour laquelle nous énonçons quelques propriétés.

Définition 7.6 *Un* arbre 1-2 filiforme *[resp.* arbre 1-2 filiforme non séparable*] (voir figure 7.3) est un arbre 1-2*

- *ayant autant de points simples que de points doubles (condition* **C1***),*
- *vérifiant qu'à tout instant du parcours préfixe, il y a au moins autant de points simples que de points doubles (condition* **C2***),*
- *tel qu'un sommet fils unique ne peut être une feuille (condition* **C3***) [resp. ne possédant aucun sommet fils unique racine d'un arbre 1-2 filiforme (condition* **C3'***)].*

Notons F_n [resp. $\overline{F}_n$] l'ensemble des arbres 1-2 filiformes [resp. arbres 1-2 filiformes non séparables] ayant n points simples.

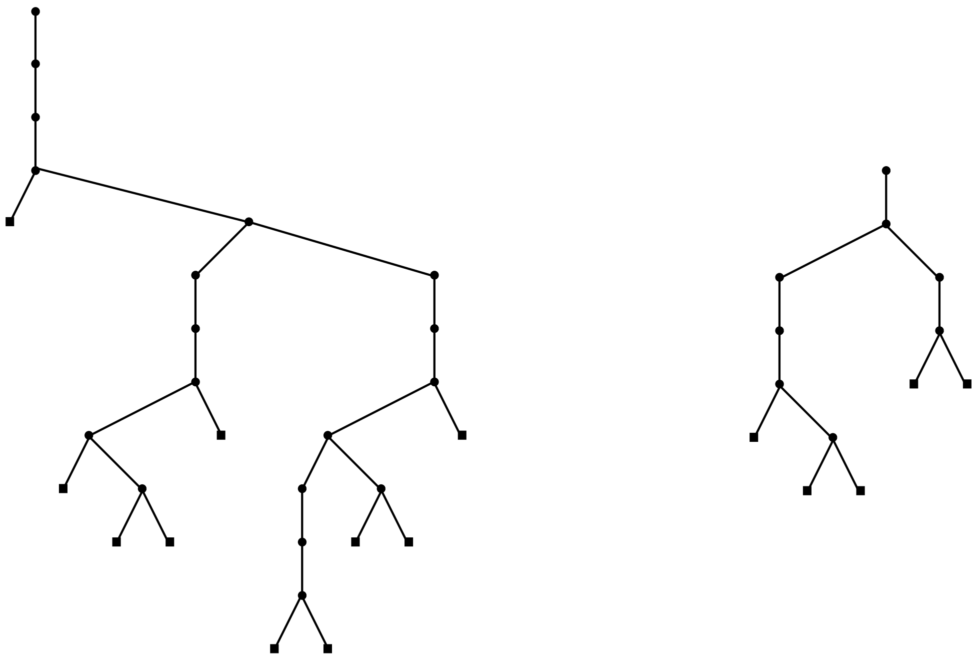


Figure 7.3 Un arbre 1-2 filiforme appartenant à F_9 et un arbre 1-2 filiforme non séparable appartenant à $\overline{F}_4$.

Les mots du langage C'_n [resp. H'_n] (ensemble des mots de piles sans facteur 13 [resp. sans facteur $1g3$ où $g \in Y$]) sont les codages préfixes sur $P_{2,3} \sqcup\!\sqcup \{1\}^*$ des arbres 1-2 filiformes de F_n [resp. $\overline{F}_n$].
Par exemple, les mots 111232112232333112211233233 de C'_9 et 121123233123 de H'_4 codent les arbres 1-2 filiformes respectivement de F_9 et de $\overline{F}_4$ illustrés par la figure 7.3.

Propriété 7.7 *Les conditions* **C1** *et* **C3'** *pour un arbre 1-2 suffisent à définir les arbres 1-2 filiformes non séparables.*

Preuve Soit a un arbre 1-2 filiforme non séparable de $\overline{F}_n$ codé par le mot f de H'_n et supposons que a ne respecte pas la condition **C2**. Alors, f admet un facteur droit $f' \in P_{1,2} \sqcup\!\sqcup \{3\}^*$ précédé d'une lettre 1. Si $f' \notin Y$, alors f' admet un facteur gauche $f'' \in P_{2,3} \sqcup\!\sqcup \{1\}^*$ suivi d'une lettre 3. Si $f'' \notin Y$, alors f''

admet un facteur droit $f''' \in P_{1,2} \sqcup \{3\}^*$ précédé d'une lettre 1, ce qui nous ramène à l'étape initiale de notre raisonnement. Par induction, nous obtenons alors un facteur f' de f appartenant à Y et précédé de la lettre 1, ou un facteur $1f'$ de f contenant un facteur de la forme $1g3$ où $g \in Y$. Dans les deux cas, ceci est en contradiction avec la condition **C3'**. □

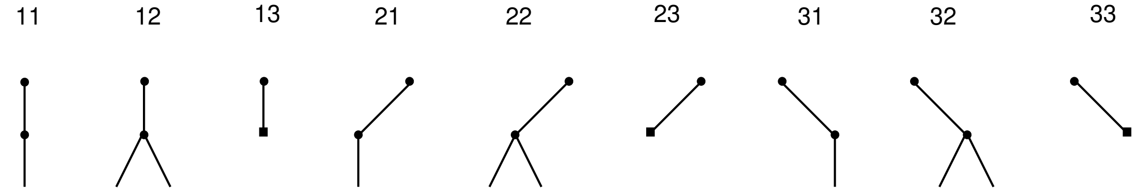
Propriété 7.8 *Le miroir d'un arbre 1-2 filiforme non séparable est également un arbre 1-2 filiforme non séparable.*

Preuve En effet, l'opération miroir sur un arbre 1-2 filiforme ne peut violer que la condition **C2**, et non les conditions **C1** et **C3'**. □

Remarquons que l'ensemble des arbres 1-2 filiformes n'est pas clos par l'opération miroir.

Corollaire 7.9 *Soit a un arbre 1-2 filiforme non séparable de $\overline{F}_n$ et $a^\star$ son miroir codés respectivement par les mots f et $f^\star$ de H'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3$ où $g \in Y$). Alors, nous avons en particulier $|f|_{32} = |f^\star|_{22}$, $|f|_{21} = |f^\star|_{31}$ et $|f|_{22} = |f^\star|_{32}$.*

Preuve



Une fois considéré le tableau ci-dessus représentant tous les facteurs de longueur deux sur un arbre 1-2 filiforme, il suffit de constater comment l'opération miroir agissant sur un arbre transforme ces facteurs. □

Nous rappelons maintenant la définition d'une famille de cartes planaires considérée par W.T. Tutte [103] qui interviendra dans la preuve du théorème 7.4.

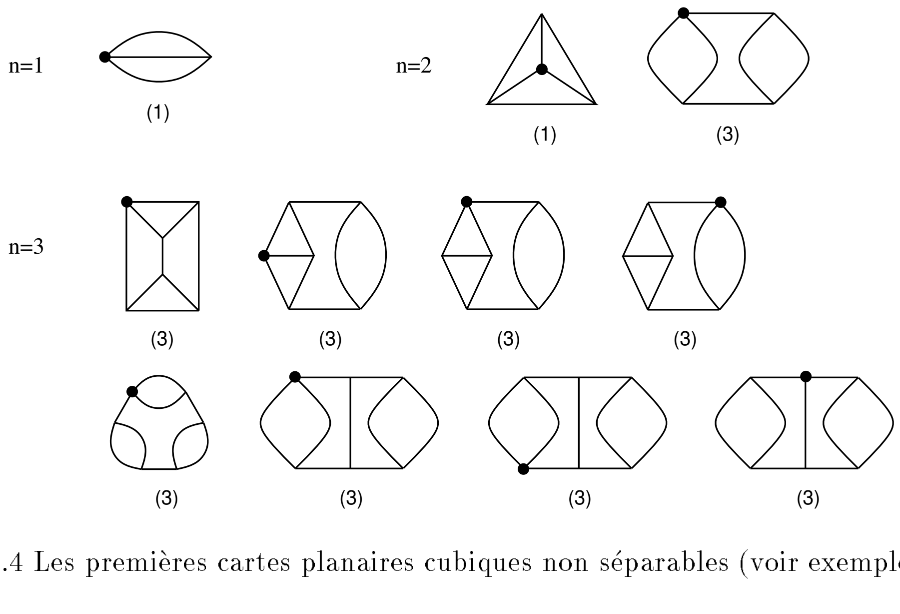


Figure 7.4 Les premières cartes planaires cubiques non séparables (voir exemple 7.11).

Définition 7.10 *Une* carte planaire cubique pointée non séparable *(voir figure 7.4) est une carte planaire sans point d'articulation dont tous les sommets sont de degré trois et pour laquelle un brin est pointé.*
Nous notons CNS_{2n} l'ensemble des cartes planaires cubiques pointées non séparables ayant $2n$ sommets.

Exemple 7.11 *La figure 7.4 présente les cartes planaires cubiques pointées non séparables ayant 2, 4 et 6 sommets, les nombres entre parenthèses indiquant le nombre de cartes différentes obtenues en pointant l'un des brins du sommet distingué repéré par $\bullet$.*

$$
\begin{array}{cccc}
c_n.c_n & \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}} & \frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!} & \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!} \\
\boxed{C_n} & \boxed{B_n} & \boxed{H_n} & \boxed{P_n} \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\Phi & \Phi & \Phi & \Phi \\
\Upsilon_1 & \Upsilon_1 & \Upsilon_1 & \Upsilon_1 \\
\Upsilon_2 & \Upsilon_2 & \Upsilon_2 & \Upsilon_2 \\
\Omega & \Omega & \Omega & \Omega \\
\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\boxed{C'_n} & \boxed{B'_n} & \boxed{H'_n} & \boxed{P'_n} \\
\uparrow & & \uparrow & \\
préfixe() & & préfixe() & \\
\downarrow & & \downarrow & \\
\boxed{F_n} & & \boxed{\overline{F}_n} & \\
 & & \uparrow & \\
 & & \Xi & \\
 & & \downarrow & \\
 & & \boxed{CNS_{2n}} &
\end{array}
$$

Figure 7.5 Schéma général des correspondances reliant les ensembles des mots de piles.

La figure 7.5 présente brièvement les quatre correspondances reliant C_n, B_n, H_n, P_n respectivement à C'_n, B'_n, H'_n, P'_n que nous allons mettre en évidence par la suite.
Parmi les objets intermédiaires qui seront mis en jeu, nous retrouverons des ensembles de permutations à motifs exclus déjà rencontrés dans les chapitres 5 et 6. Il s'agira des permutations non séparables (excluant simultanément les motifs 2413 et $41\bar{3}52$) et des permutations de Baxter (excluant simultanément les motifs $25\bar{3}14$ et $41\bar{3}52$), alternantes ou non. Signalons également que plusieurs familles de cartes, comme les cartes planaires pointées non séparables, sont reliées aux objets que nous considérons.

Enfin, nous étudierons plusieurs autres restrictions apportées au langage Y_n des mots de piles. Par exemple, nous montrerons que le langage R_n (voir figure 7.2) est directement en correspondance avec l'ensemble des arbres ternaires complets ayant n sommets internes.

7.1 Tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne

Nous établissons maintenant les résultats suivants qui précisent le théorème 7.2.

Théorème 7.12 *Les mots du langage C_n (ensemble des mots de piles sans facteur 22) codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne sont en correspondance avec les mots du langage C'_n (ensemble des mots de piles sans facteur 13) codant les arbres 1-2 filiformes ayant n points simples. Ils sont dénombrés par*

$$|C_n| = |C'_n| = c_n.c_n$$

Proposition 7.13 *Les mots de $\{f \in C_n : |f|_{11} = n_1, |f|_{33} = n_2, |f|_{13} = n_3\}$ codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne et possédant n_1 couples d'entiers consécutifs sur la première ligne, n_2 couples d'entiers consécutifs sur la troisième ligne, n_3 couples d'entiers consécutifs situés sur les première et troisième lignes sont en correspondance avec les mots de $\{f' \in C'_n : |f'|_{32} = n_1, |f'|_{21} = n_2, |f'|_{22} = n_3\}$ codant les arbres 1-2 filiformes ayant n points simples et possédant n_1 points doubles fils droits, n_2 points simples fils gauches, n_3 points doubles fils gauches.*

Corollaire 7.14 *Le nombre de tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne et possédant i couples d'entiers consécutifs situés sur les première et deuxième lignes et j couples d'entiers consécutifs situés sur les deuxième et troisième lignes est égal au nombre d'arbres 1-2 filiformes ayant n points simples et possédant i fils uniques et j feuilles gauches donné par*

$$|\{f \in C_n : |f|_{12} = i, |f|_{23} = j\}| = |\{f' \in C'_n : |f'|_{12} = i, |f'|_{23} = j\}| =$$

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{i}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j}\binom{n}{j-1}$$

Nous présentons successivement les bijections Φ, Υ, Ω et Λ qui conduisent à ces résultats.

7.1.1 Tableaux $3 \times n$ n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la deuxième ligne et mélanges de deux mots de parenthèses

Définition 7.15 *Soit $M = \{\alpha \in P_{a,\overline{a}} \sqcup\!\sqcup\ P_{b,\overline{b}} : \forall \alpha = \alpha' b \alpha'', |\alpha'|_a > |\alpha'|_{\overline{a}}\}$ le langage produit de mélange (ou shuffle) de deux langages de parenthèses, et notons $M_{2n} = \{\alpha \in M : |\alpha| = 2n\}$.*

Lemme 7.16 *Il existe une bijection Φ entre mots du produit de mélange de deux mots de parenthèses et mots de piles sans facteur 22. Celle-ci est donnée par le morphisme*

$$\begin{array}{cccccc} \Phi & : & M_{2n} & \longrightarrow & C_n \\ & & \alpha & \longmapsto & f \end{array} \quad \textit{défini par} \begin{cases} \Phi(a) = 1 \\ \Phi(b) = 21 \\ \Phi(\overline{a}) = 23 \\ \Phi(\overline{b}) = 3 \end{cases}$$

Preuve Soient $\alpha \in M_{2n}$ et $f = \Phi(\alpha)$; nous avons alors

- $|\alpha| = 2n, |\alpha|_a = |\alpha|_{\overline{a}}, |\alpha|_b = |\alpha|_{\overline{b}} \Longrightarrow |f|_1 = |f|_2 = |f|_3 = n$,
- $\forall \alpha = \alpha'\alpha'', |\alpha'|_a \geq |\alpha'|_{\overline{a}}, |\alpha'|_b \geq |\alpha'|_{\overline{b}}$ et $\forall \alpha = \alpha' b \alpha'', |\alpha'|_a > |\alpha'|_{\overline{a}} \Longrightarrow \forall f = f'f'', |f'|_1 \geq |f'|_2 \geq |f'|_3$.

De plus, l'ensemble $\{1, 21, 23, 3\}$ constituant un code préfixe, l'application réciproque de Φ est clairement définie. $\square$

Exemple 7.17 *Le mot $a\overline{a}aab\overline{a}\overline{b}b\overline{a}\overline{b}$ de M_{10} est en correspondance par Φ avec le mot 123112123321233 de C_5.*

7.1.2 Mélanges de deux mots de parenthèses, permutations de Baxter alternantes et couples d'arbres binaires complets

Afin de résoudre un problème posé par R.C. Mullin [76], R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18, 26] ont établi le résultat suivant.

Lemme 7.18 *(R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18]) Il existe une bijection Υ (voir figure 7.7) entre mots du produit de mélange de mots de parenthèses, permutations de Baxter alternantes et couples d'arbres binaires complets.*

$$\begin{array}{ccccccc} \Upsilon & : & M_{2n} & \longrightarrow & \widehat{Baxter}_{2n} & \longrightarrow & A_n \times A_n \\ & & \alpha & \longmapsto & \pi & \longmapsto & (a_1, a_2) \end{array}$$

Ainsi, ces trois familles d'objets sont énumérées par le carré du $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan.

La première bijection, notée Υ_1, met en correspondance un mot du produit de mélange de mots de parenthèses α de M_{2n} et une permutation de Baxter alternante π de $\widehat{Baxter}_{2n}$. Partant de l'arbre binaire complet réduit à trois sommets, c'est à dire deux feuilles libres et un sommet interne étiqueté 1, elle consiste en l'application séquentielle des opérateurs correspondant aux lettres $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$ du mot α. Ces opérateurs (voir figure 7.6) agissent sur un arbre binaire complet croissant de la manière suivante :

- opérateur a : étiqueter la feuille gauche libre la plus à droite et lui greffer deux arêtes,
- opérateur b : étiqueter la feuille droite libre la plus à gauche et lui greffer deux arêtes,
- opérateur $\overline{b}$: étiqueter la feuille gauche libre la plus à droite,
- opérateur $\overline{a}$: étiqueter la feuille droite libre la plus à gauche.

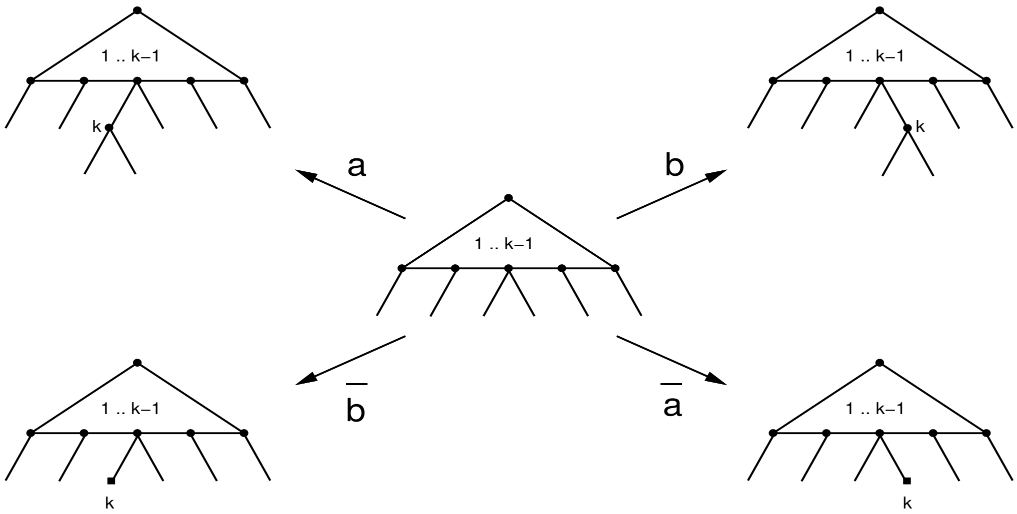


Figure 7.6 Les quatre opérateurs de la bijection Υ_1.

A l'issue de l'application des opérateurs, nous obtenons un arbre binaire complet croissant dont la projection infixe est la permutation π de $\widehat{Baxter}_{2n}$.

La deuxième bijection, notée Υ_2, consiste à prendre respectivement les arbres binaires complets croissant et décroissant de π en oubliant leurs étiquetages. Notons que R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18] présentent différemment la construction du second arbre.

Exemple 7.19 *La figure 7.7 présente la bijection Υ appliquée au mot de l'exemple 7.17.*

Un examen attentif des bijections Φ et Υ nous conduit à la propriété suivante.

Propriété 7.20 *Soit f un mot de C_n (ensemble des mots de piles sans facteur 22) et une factorisation quelconque $f = f'f''f'''$ telle que $f'' = x2y$ ou $f'' = xy$ avec x et y appartenant à $\{1, 3\}$. Soient α le mot du produit de mélange de deux mots de parenthèses tel que $\Phi(\alpha) = f$, π la permutation de Baxter alternante en bijection avec α par Υ_1 et les arbres binaires complets croissant et décroissant associés à π. Soit $p = |f'x|_1 + |f'x|_3$.*
Alors, le tableau de la figure 7.8 indique quels sont les liens entre le facteur f'' de f, le facteur $\alpha_p\alpha_{p+1}$ de α, les positions de p et $p+1$ dans π ainsi que dans les arbres binaires complets croissant $abc(\pi)$ et décroissant $abd(\pi)$ associés.

Voici quelques commentaires supplémentaires pour une lecture plus aisée du tableau de la figure 7.8. La première colonne correspond aux huit possibilités pour le facteur f'', la deuxième colonne donne les seize facteurs possibles $\alpha_p\alpha_{p+1}$ sur l'alphabet $\{a, \overline{a}, b, \overline{b}\}$, la troisième colonne regroupe pour la permutation π les positions de p et $p+1$ et les facteurs se trouvant dans l'intervalle correspondant (définition 6.1 des permutations de Baxter), les quatrième et cinquième colonnes précisent les positions respectives de p et $p+1$ dans les arbres binaires complets croissant et décroissant associés à π en indiquant le rang (ordre infixe) des sommets supportant ces étiquettes.

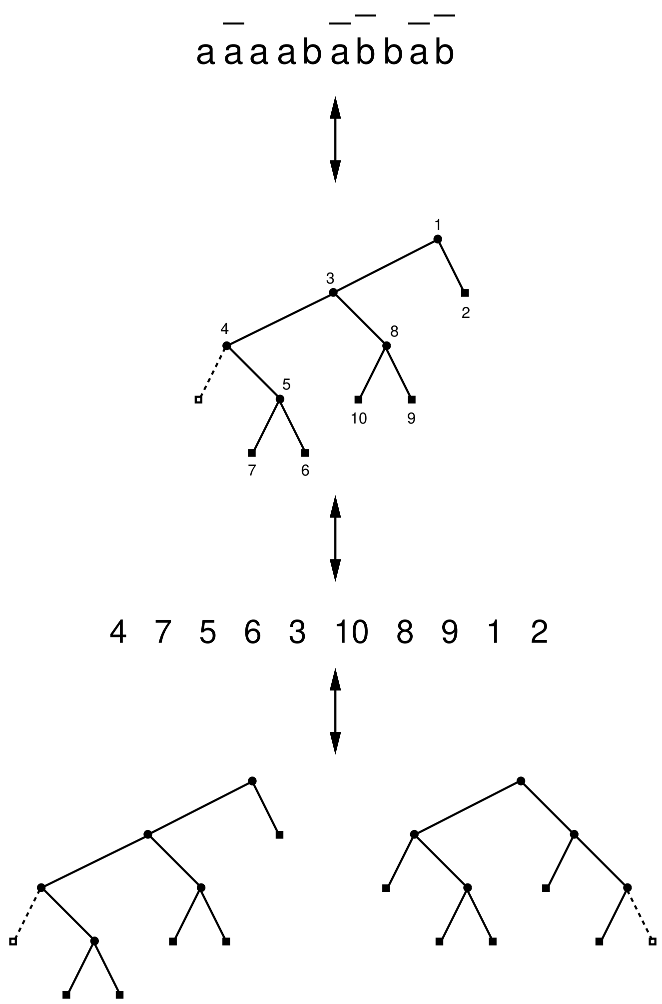


Figure 7.7 La bijection ϒ entre un mot du produit de mélange de deux mots de parenthèses, une permutation de Baxter alternante et son arbre binaire croissant, et un couple d'arbres binaires complets.

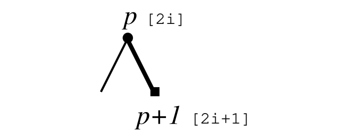
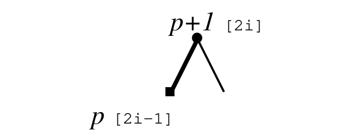
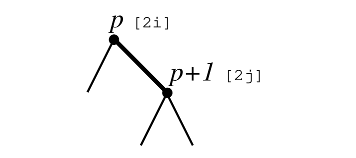
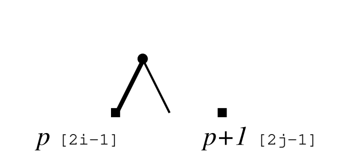
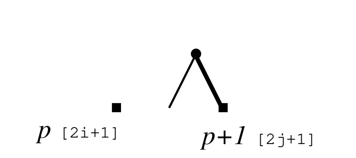
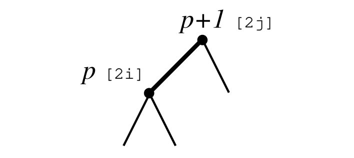
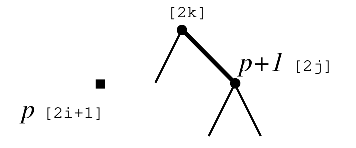
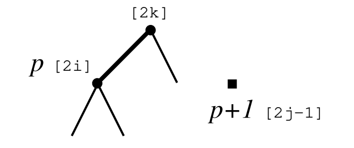
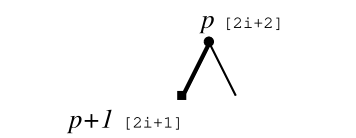
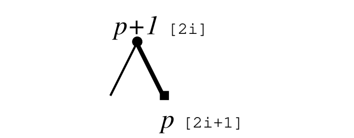
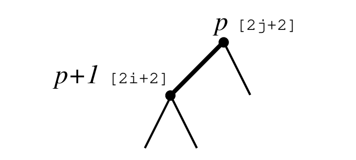
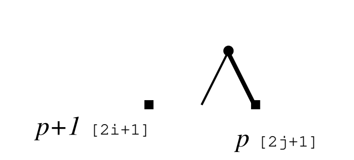
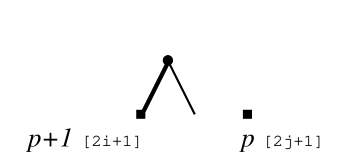
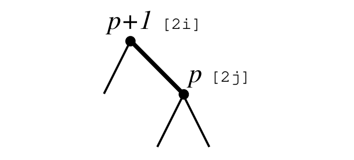
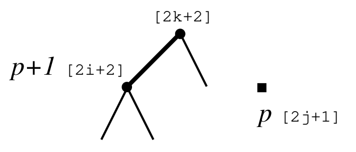
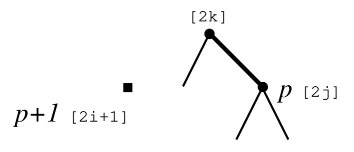
f''	$\alpha_p\alpha_{p+1}$	π	$abc(\pi)$	$abd(\pi)$
123	$a\overline{a}$ ou $b\overline{a}$	$\pi' p(p+1)\pi''$		
121	ab ou bb	$\pi' p \overset{>}{\pi} (p+1)\pi''$		
323	$\overline{aa}$ ou $\overline{b}\overline{a}$	$\pi' p \overset{<}{\pi} (p+1)\pi''$		
321	$\overline{a}b$ ou $\overline{b}b$	$\pi' p \overset{<\,>}{\pi\,\pi} (p+1)\pi''$		
13	$a\overline{b}$ ou $b\overline{b}$	$\pi'(p+1)p\pi''$		
11	aa ou ba	$\pi'(p+1) \overset{>}{\pi} p\pi''$		
33	$\overline{ab}$ ou $\overline{bb}$	$\pi'(p+1) \overset{<}{\pi} p\pi''$		
31	$\overline{a}a$ ou $\overline{b}a$	$\pi'(p+1) \overset{>\,<}{\pi\,\pi} p\pi''$		

Figure 7.8 Relations liant le mot f de C_n, le mot α de M_{2n}, la permutation π de $\widehat{Baxter}_{2n}$ se correspondant par Φ et Υ.

Preuve Toutes ces relations se déduisent directement du morphisme Φ et des opérateurs de la bijection Υ_1. Les seuls points qui demandent une attention particulière sont, pour l'arbre binaire décroissant $abd(\pi)$, le cas où $\alpha_{p+1} = b$ [resp. a] qui imposent à p d'être l'extrémité d'une arête gauche [resp. droite] ce qui correspond à l'interdiction du motif $41\overline{3}52$ [resp. $25\overline{3}14$], motifs absents dans les permutations de Baxter. □

Remarque 7.21 *La composition des bijections Φ et Υ est équivalente à la construction décrite par la figure 7.9 qui permet de mettre directement en correspondance les mots de C_n (ensemble des mots de piles sans facteur 22) et les arbres binaires complets croissant et décroissant d'une permutation de Baxter alternante sur $[2n]$, et donc avec les couples d'arbres binaires complets de $A_n \times A_n$.*

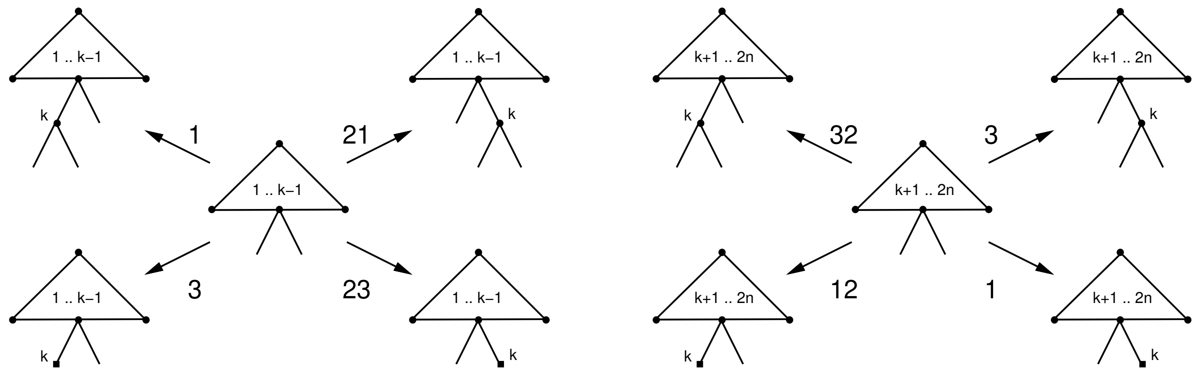


Figure 7.9 Les opérateurs permettant de construire directement les arbres binaires complets croissant et décroissant d'une permutation de Baxter alternante depuis un mot de piles sans facteur 22.

Cette construction est directement inspirée de celle de R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18]; en particulier, la construction de l'arbre binaire croissant est identique. L'arbre binaire complet croissant [resp. décroissant] de la permutation de Baxter alternante π s'obtient en lisant les facteurs $1, 21, 3, 23$ [resp. $32, 3, 12, 1$] du mot f de C_n parcouru de gauche à droite [resp. de droite à gauche] et en appliquant l'opérateur correspondant; la figure 7.9 illustre l'opération à effectuer pour le $k^{ème}$ facteur rencontré, avec k allant de 1 à $2n$ [resp. de $2n$ à 1].

7.1.3 Couples d'arbres binaires complets et arbres 1-2 filiformes

Définition 7.22 *Nous désignons par Ω le codage des couples d'arbres binaires complets défini par*

$$\begin{array}{rcccc} \Omega & : & A_n \times A_n & \longrightarrow & P_{2,3} \times P_{1,2} \\ & & (a_1, a_2) & \longmapsto & (suffixe(a_1), préfixe(a_2)) \end{array}$$

où $préfixe$ et $suffixe$ sont les codages des arbres binaires complets définis dans la sous-section 1.3.3.

Exemple 7.23 *Au couple d'arbres binaires complets de l'exemple 7.19 (voir figure 7.7) correspond par Ω le couple de mots de parenthèses* $(2233223323, 1121221212)$.

Lemme 7.24 *Il existe une bijection Λ entre mots de piles sans facteur 13 et couples d'arbres binaires complets de même taille. Celle-ci est donnée par le morphisme*

$$\begin{array}{cccc} \Lambda \; : & C'_n & \longrightarrow & P_{2,3} \times P_{1,2} \\ & f' & \longmapsto & (a,b) \end{array} \quad \textit{défini par} \begin{cases} \Lambda(1) = (\varepsilon, 1) \\ \Lambda(2) = (2,2) \\ \Lambda(3) = (3, \varepsilon) \end{cases}$$

Preuve Λ est clairement une application de C'_n vers $P_{2,3} \times P_{1,2}$ (codant $A_n \times A_n$).
Réciproquement, soit $(a,b) \in P_{2,3} \times P_{1,2}$ avec $|a| = |b| = 2n$. Alors, a et b se factorisent de manière unique en $a = 23^{k_1}23^{k_2}\ldots 23^{k_n}$ et $b = 1^{l_1}21^{l_2}2\ldots 1^{l_n}2$. Le mot $f' = 1^{l_1}23^{k_1}1^{l_2}23^{k_2}\ldots 1^{l_n}23^{k_n}$ appartient à C'_n et vérifie $\Lambda(f') = (a,b)$. □

Exemple 7.25 *Le couple de mots de parenthèses* $(2233223323, 1121221212)$ *de* $P_{2,3} \times P_{1,2}$ *de l'exemple 7.23 est en bijection par Λ avec le mot* 112123321233123 *de* C'_5.

Remarque 7.26 *Notons que le même morphisme Λ mettrait en bijection les mots de piles sans facteur* 31 *et les couples d'arbres binaires complets de même taille. Dans ce cas, son application réciproque consisterait à placer, entre deux lettres* 2 *successives, le bloc de lettres* 3 *à la droite du bloc de lettres* 1.

Preuve du théorème 7.12. Clairement, la composition des bijections Φ, Υ_1, Υ_2, Ω et Λ met en correspondance les langages C_n et C'_n, avec les couples d'arbres binaires complets de $A_n \times A_n$ ce qui nous permet d'en déduire la formule d'énumération. □

Preuve de la proposition 7.13. Soit f un mot de C_n tel que $|f|_{11} = n_1$, $|f|_{33} = n_2$, $|f|_{13} = n_3$.
Soient α, π, (u,v) , (a,b) et f' appartenant respectivement à M_{2n}, $\widehat{Baxter}_{2n}$, $P_{x,\overline{x}} \times P_{y,\overline{y}}$ (codant $A_n \times A_n$), $P_{2,3} \times P_{1,2}$ et C'_n en correspondance avec f successivement par les bijections Φ, Υ_1, Υ_2, Ω et Λ.
Nous déduisons de ces bijections et de la propriété 7.20 les relations suivantes.

- $|\alpha|_{aa} + |\alpha|_{ba} = n_1$, $|\alpha|_{\overline{a}\overline{b}} + |\alpha|_{\overline{b}\overline{b}} = n_2$, $|\alpha|_{a\overline{b}} + |\alpha|_{b\overline{b}} = n_3$.
- $|\{p \in [2n-1] : \pi = \pi'(p+1) \overset{>}{\pi} p\pi''\}| = n_1$,
  $|\{p \in [2n-1] : \pi = \pi'(p+1) \overset{<}{\pi} p\pi''\}| = n_2$,
  $|\{p \in [2n-1] : \pi = \pi'(p+1)p\pi''\}| = n_3$.
- $|\{i \in [n-1] : u = u'\overline{x}\overline{x}u'', v = v'\overline{y}\overline{y}v''; |u'\overline{x}|_{\overline{x}} = |v'\overline{y}|_{\overline{y}} = i\}| = n_1$,
  $|\{i \in [n-1] : u = u'x\overline{x}u'', v = v'\overline{y}yv''; |u'x|_{\overline{x}} = |v'\overline{y}|_{\overline{y}} = i\}| = n_2$,
  $|\{i \in [n-1] : u = u'x\overline{x}u'', v = v'\overline{y}\overline{y}v''; |u'x|_{\overline{x}} = |v'\overline{y}|_{\overline{y}} = i\}| = n_3$.
- $|\{i \in [n-1] : a = a'32a'', b = b'22b''; |a'3|_2 = |b'2|_2 = i\}| = n_1$,
  $|\{i \in [n-1] : a = a'22a'', b = b'21b''; |a'2|_2 = |b'2|_2 = i\}| = n_2$,
  $|\{i \in [n-1] : a = a'22a'', b = b'22b''; |a'2|_2 = |b'2|_2 = i\}| = n_3$.
- $|f'|_{32} = n_1$, $|f'|_{21} = n_2$, $|f'|_{22} = n_3$.

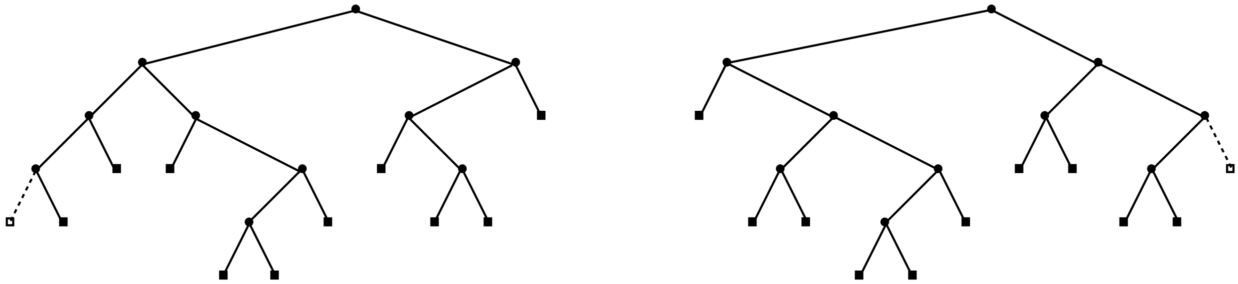
Ceci nous assure donc le résultat. □

Preuve du corollaire 7.14. Nous déduisons de la propriété 7.20 et de la distribution des arbres binaires complets selon le nombre de sommets et de feuilles gauches (ou droites), donnée par les nombres

121132123233112321211323312323

$$a\,b\,a\,\bar{b}\,b\,\bar{a}\,\bar{a}\,\bar{b}\,a\,a\,\bar{a}\,b\,b\,a\,\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{b}\,a\,\bar{a}\,\bar{a}$$

18 19 10 11 9 17 12 15 14 16 13 20 1 4 3 8 5 6 2 7



suffixe() = 23232223233322233233

préfixe() = 11211221122211221122

112311232112232333112211233233

Figure 7.10 La correspondance entre un mot de piles sans facteur 22 et un mot de piles sans facteur 13.

de Narayana, la formule pour le langage C_n. La même distribution pour C'_n est une conséquence de la proposition 7.13. □

Exemple 7.27 *La figure 7.10 illustre la correspondance composant les bijections Φ, Υ_1, Υ_2, Ω et Λ, permettant ainsi de relier les langages C_n (ensemble des mots de piles sans facteur 22) et C'_n (ensemble des mots de piles sans facteur 13).*

7.2 Tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne

Nous établissons maintenant les résultats suivants qui précisent le théorème 7.3.

Théorème 7.28 *Les mots du langage B_n (ensemble des mots de piles sans facteur $22, 11, 33$) codant les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne sont en correspondance avec les mots du langage B'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $13, 32, 21$) codant les arbres 1-2 filiformes ayant n points simples et ne possédant aucun point double fils droit ni aucun point simple fils gauche. Ils sont dénombrés par*

$$|B_n| = |B'_n| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$$

Proposition 7.29 *Les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne et possédant m couples d'entiers consécutifs situés sur les première et troisième lignes sont en correspondance avec les arbres 1-2 filiformes ayant n points simples et ne possédant aucun point double fils droit ni aucun point simple fils gauche et possédant m points doubles fils gauches. Ils sont dénombrés par*

$$|\{f \in B_n : |f|_{13} = m\}| = |\{f' \in B'_n : |f'|_{22} = m\}| = \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$$

Pour établir ces résultats, nous caractérisons sur la correspondance entre mots de C_n et de C'_n, la restriction apportée à C_n pour obtenir B_n (interdiction des facteurs 11 et 33).

Lemme 7.30 *Le morphisme Φ (voir lemme 7.16) est une bijection entre B_n (ensemble des mots de piles sans facteur $22, 11, 33$) et $\widetilde{M}_{2n} = \{\alpha \in M_{2n} : |\alpha|_{aa} = |\alpha|_{ba} = |\alpha|_{\overline{a}\overline{b}} = |\alpha|_{\overline{b}\overline{b}} = 0\}$ (langage du produit de mélange de deux mots de parenthèses sans facteur aa, ba, $\overline{a}\overline{b}$, $\overline{b}\overline{b}$).*

Preuve C'est une conséquence directe de la définition du morphisme Φ. □

Définition 7.31 *Soit $\widetilde{Baxter}_{2n}$ l'ensemble des permutations de Baxter alternantes π telles que, pour tout $p \in [2n-1]$, si $\pi = \pi'(p+1) \overset{>}{\pi}\overset{<}{\pi}\, p\pi''$ alors $\overset{>}{\pi} = \varepsilon \iff \overset{<}{\pi} = \varepsilon$ ($\overset{>}{\pi}$ et $\overset{<}{\pi}$ sont soit tous deux vides, soit tous deux non vides).*

Lemme 7.32 *La bijection Υ (voir lemme 7.18) met en correspondance le langage $\widetilde{M}_{2n}$, l'ensemble des permutations $\widetilde{Baxter}_{2n}$ et l'ensemble des arbres binaires jumeaux J_n (voir définition 6.14) complétés.*

Preuve C'est une conséquence de la propriété 7.20 en appliquant les restrictions aux objets considérés. Clairement, $\widetilde{Baxter}_{2n}$ est bien l'ensemble recherché compte-tenu de sa définition.
La restriction sur le couple d'arbres binaires complets se traduit par la caractérisation des arbres binaires jumeaux de J_n complétés. En effet, pour tout $p \in [2n-1]$, une feuille gauche de l'arbre binaire complet croissant étiquetée $p+1$ est indicée $2i+1$ dans l'ordre infixe si et seulement si une feuille droite de l'arbre binaire complet décroissant étiquetée p a le même indice (exception faite des deux feuilles extrêmes, c'est à dire pour tout $i \in [n-1]$). Réciproquement, montrons que si une permutation π appartient à $\widehat{Baxter}_{2n} \backslash \widetilde{Baxter}_{2n}$, alors les arbres $abc(\pi)$ et $abd(\pi)$ effeuillés ne sont pas jumeaux. En effet, d'après la sixième [resp. septième] ligne du tableau (figure 7.8) de la propriété 7.20, les $(2j+1)^{ème}$ [resp. $(2i+1)^{ème}$] sommets de $abc(\pi)$ et $abd(\pi)$ sont tous deux des feuilles droites [resp. gauches]. □

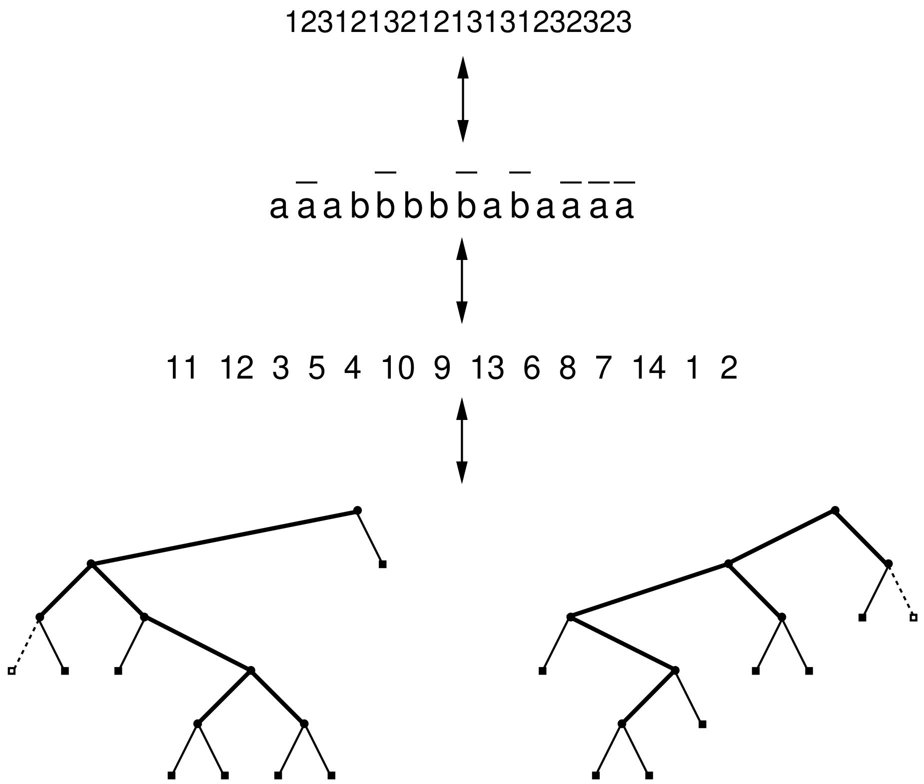


Figure 7.11 La correspondance entre mot de piles sans facteur 22, 11, 33 et arbres binaires jumeaux complétés.

Preuve du théorème 7.28 et de la proposition 7.29. Les bijections Φ, Υ et Ψ (voir théorème 6.16) mettant en correspondance les mot de piles sans facteur 22, 11, 33 et les permutations de Baxter, nous déduisons du corollaire 6.23 (et de la propriété 7.20) la formule dénombrant les mots du langage B_n selon le nombre de facteurs 13. La proposition 7.13 nous permet de conclure pour les mots du langage B'_n selon le nombre de facteurs 22. □

Exemple 7.33 *La figure 7.11 présente les bijections Φ et Υ appliquées à un mot de piles sans facteur* $22, 11, 33$.

7.3 Tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3

Nous établissons maintenant les résultats suivants qui précisent le théorème 7.4.

Théorème 7.34 *Les mots du langage H_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2$ où $g \in Y$, c'est à dire vérifiant la condition "tour de Hanoï") codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n sont en correspondance avec les mots du langage H'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3$ où $g \in Y$) codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples, eux-mêmes en bijection avec les cartes planaires cubiques pointées non séparables ayant $2n$ sommets de CNS_{2n}. Ils sont dénombrés par*

$$|H_n| = |H'_n| = |CNS_{2n}| = \frac{2^n.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

De plus, cette correspondance met en bijection les mots f de H_n tels que $|f|_{11} = n_1, |f|_{33} = n_2, |f|_{13} = n_3$ et les mots f' de H'_n tels que $|f'|_{32} = n_1, |f'|_{21} = n_2, |f'|_{22} = n_3$.

Afin de prouver ce résultat, nous étudions la restriction apportée à C_n pour obtenir H_n (interdiction du facteur $2g2$ pour tout $g \in Y$) sur la composition des bijections Φ, Υ_1, Υ_2, Ω et Λ entre mots de C_n et de C'_n. Ensuite, nous montrons que les mots de H'_n sont les mots du langage de Lehman-Lenormand [70] codant les cartes planaires cubiques pointées non séparables ayant $2n$ sommets de CNS_{2n}.

Nous présentons au préablable deux conjectures.

Conjecture 7.35 *Les mots de $H_{n,m} = \{f \in H_n : |f|_{11} + |f|_{33} = m\}$ codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n et possédant m couples d'entiers consécutifs sur les première et troisième lignes et les mots de $H'_{n,m} = \{f' \in H'_n : |f'|_{32} + |f'|_{21} = m\}$ codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples et possédant m points doubles fils droits et points simples fils gauches sont au nombre de*

$$|H_{n,m}| = |H'_{n,m}| = \binom{n-1}{m} \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

Notons une conséquence du théorème 7.34 et du corollaire 7.9 permettant d'affirmer que, pour tout $m \in [0, n-1]$, les langages $H_{n,m}$, $H'_{n,m}$, $H'_{n,n-1-m}$ et $H_{n,n-1-m}$ sont en bijection.

Conjecture 7.36 *Les mots de $H_n \setminus \{\mathcal{A}^*33\mathcal{A}^*\}$ codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la troisième ligne et les mots de $H'_n \setminus \{\mathcal{A}^*21\mathcal{A}^*\}$ codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples et ne possédant aucun point simple fils gauche sont au nombre de*

$$\frac{2.(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$$

Rappelons que cette formule dénombre certaines cartes planaires considérées par W.T. Tutte, à savoir les cartes planaires cubiques pointées non séparables 3-connexes [103] ou encore les triangulations planaires [102].

7.3.1 Tableaux $3 \times n$ non séparables et arbres 1-2 filiformes non séparables

Lemme 7.37 *Le morphisme Φ (voir lemme 7.16) met en correspondance les mots du langage H_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2$ où $g \in Y$) et les mots du langage $\overline{M}_{2n} = \{\alpha \in M_{2n} : \forall \alpha = \alpha' b\beta x\alpha''$ où $x \in \{\overline{a}, b\}, a\beta \notin M\}$ (langage des mots non séparables du produit de mélange de deux mots de parenthèses).*

Preuve Ce résultat est une conséquence directe de la définition du morphisme Φ. □

Lemme 7.38 *La bijection Υ_1 (voir lemme 7.18) met en correspondance les mots du langage $\overline{M}_{2n}$ et les permutations de $\widehat{NS\acute{e}p}_{2n} = \widehat{S}_{2n}(2413, 41\overline{3}52)$ (ensemble des permutations non séparables alternantes).*

Preuve Remarquons tout d'abord qu'exclure le motif 2413 revient à exclure simultanément les motifs $25\overline{3}14$ et 25314. Ainsi, l'ensemble des permutations non séparables alternantes est égal à l'ensemble des permutations de Baxter alternantes n'admettant pas de surcroit le motif 25314.
Soient π une permutation de $\widehat{Baxter}_{2n}$ et α un mot de M_{2n} en bijection par Υ_1. Il nous faut donc montrer que α contient un facteur $b\beta\overline{a}$ ou $b\beta b$ avec $a\beta$ appartenant à M si et seulement si π contient une sous-suite de type 25314.
Plus précisément, nous allons prouver que si α admet une telle factorisation ($\alpha \in M_{2n} \setminus \overline{M}_{2n}$), alors l'arbre binaire complet croissant obtenu par application des opérateurs du mot α (voir figure 7.6) est exactement de la forme présentée figure 7.12, ce qui conduit à l'obtention d'une sous-suite $rtpsq$ de type 25314 pour la permutation π.
Réciproquement, nous montrons que si une permutation de Baxter alternante π admet une telle sous-suite ($\pi \in \widehat{Baxter}_{2n} \setminus \widehat{NS\acute{e}p}_{2n}$), alors son arbre binaire complet croissant ne peut être que de la forme indiquée par la figure 7.12. De ce fait, la suite des opérateurs appliquée ne peut correspondre qu'à un mot α se factorisant en $\alpha = \alpha' b\beta x\alpha''$ avec $x = \overline{a}$ ou $x = b$ et $a\beta$ appartenant à M.

- Considérons la factorisation $\alpha = \alpha' b\beta x\alpha''$ avec $a\beta$ appartenant à M et $x \in \{\overline{a}, b\}$. Notons $p = |\alpha' b|$ et $q = |\alpha' b\beta x|$.
  Après avoir appliqué successivement tous les opérateurs du facteur α', nous sommes dans la situation où la feuille située à l'extrémité de la branche gauche est libre (c'est le cas pour tout facteur gauche de α) et au moins deux feuilles droites sont libres (les opérateurs suivants sont ceux de

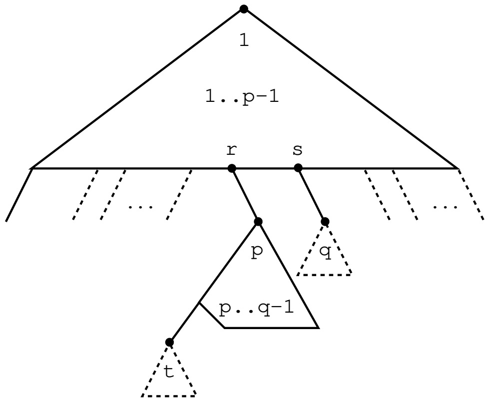


Figure 7.12 Arbre binaire complet croissant correspondant aux mots séparables du produit de mélange de deux mots de parenthèses et aux permutations de Baxter alternantes admettant une sous-suite de type $rtpsq$.

$b\beta$). Soient r et s les étiquettes des pères respectivement des première et deuxième feuilles libres à droite. Par construction, r est supérieur à s puisque Υ_1 étiquette la feuille libre à droite la plus à gauche.

Appliquons maintenant les opérateurs du facteur $b\beta$. Alors, le sous-arbre droit du sommet étiqueté r est un arbre dont tous les sommets, excepté la dernière feuille de la branche gauche qui est libre, sont étiquetés par les entiers de p à $q-1$.

Ensuite, l'opérateur $x \in \{\overline{a}, b\}$ étiquette q le fils droit du sommet d'étiquette s.

Enfin, α'' contient au moins une lettre a ou $\overline{b}$ ayant pour effet d'étiqueter t la feuille libre de la branche gauche du sous-arbre issu du sommet d'étiquette p obtenu après l'application des opérateurs du facteur $\alpha' b\beta$.

Ainsi, l'arbre binaire complet croissant obtenu est du type de celui présenté figure 7.12.

- Choisissons tout d'abord les éléments r et s de la sous-suite $rtpsq$ de type 25314.

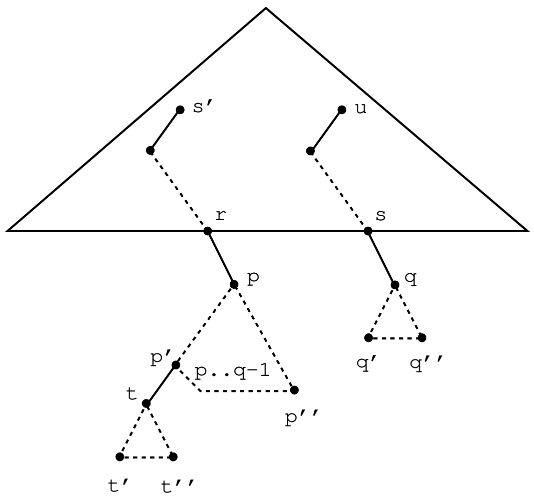
  Soit $e_1e_2e_3e_4$ une sous-suite quelconque de π de type 2413.

  Il est possible de choisir r et t', en remplacement respectivement de e_1 et e_2, de sorte que r soit juste à gauche de t' et que la sous-suite $rt'e_3e_4$ soit également de type 2413. Pour cela, prenons r l'élément appartenant à $]e_3, e_4[$ situé entre e_1 (inclus) et e_2 (exclu) et le plus à droite. De même, prenons t' l'élément supérieur à e_4 situé entre r (exclu) et e_2 (inclus) et le plus à gauche. Ainsi, il ne peut pas y avoir d'élément e situé entre r (exclu) et t' (exclu) car comme cet élément devrait être inférieur à e_3, la sous-suite $ret'e_3$ serait de type 3142 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 41352.

  Il est également possible de choisir s et q', en remplacement respectivement de e_3 et e_4, de sorte que s soit juste à gauche de q' et que la sous-suite $rt'sq'$ soit également de type 2413. Pour cela, prenons s l'élément inférieur à r situé entre e_3 (inclus) et e_4 (exclu) et le plus à droite. De même, prenons q' l'élément appartenant à $]r, t'[$ situé entre s (exclu) et e_4 (inclus) et le plus à gauche. Ainsi, il ne peut pas y avoir d'élément e situé entre s (exclu) et q' (exclu) car comme cet élément devrait être supérieur à t', la sous-suite $t'seq'$ serait de type 3142 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 41352.

  Alors, parmi l'ensemble de telles sous-suites $rt'sq'$ de π, prenons-en une avec $\pi^{-1}(s) - \pi^{-1}(r)$

minimal.
Nous allons reconstituer l'arbre binaire complet croissant de π (partiellement étiqueté) illustré ci-dessous.



Recherchons maintenant les éléments q et p de la sous-suite $rtpsq$ de type 25314.
Dans l'arbre binaire complet croissant, r [resp. s] étiquette un sommet interne car il est inférieur à t' [resp. q'] situé à sa droite dans π.
Soit q l'étiquette du fils droit du sommet étiqueté s dans l'arbre binaire complet croissant. Alors, q appartient à $]r, q']$. En effet, l'étiquetage de l'arbre binaire complet étant croissant, q doit appartenir à $]s, q']$. De plus, q est supérieur à r car sinon la sous-suite $rsq'q$ serait de type 3142 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 41352.
Soit p le plus petit des éléments supérieurs à r situé entre t' (exclu) et s (exclu). Tout d'abord, p existe et est inférieur à q car la sous-suite $rt'sq$ de type 2413 doit faire elle-même partie d'une sous-suite de type 25314. Ensuite, tous les éléments e situés entre t' (exclu) et p (exclu) sont supérieurs à p car sinon la sous-suite $rt'ep$ serait de type 2413 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 25314. Enfin, t' n'est pas le fils droit de r dans l'arbre binaire complet croissant car sinon la sous-suite $rt's'q$ (où s' serait le successeur de t' dans π) serait de type 2413 (s' est un ancêtre de r) mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 25314. Nous en déduisons que p est l'étiquette du fils droit de r dans l'arbre binaire complet croissant.
Montrons maintenant que tous les éléments appartenant à $[p, q[$ sont consécutifs et constituent à eux tous le sous-arbre de racine étiquetée p dans l'arbre binaire complet croissant.
Aucun élément e situé à gauche de r ne peut appartenir à $]p, q[$ car sinon la sous-suite $ert'p$ serait de type 3142 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 41352. De plus, tous les éléments e situés entre p et s sont inférieurs à q car sinon la sous-suite $pesq$ serait de type 2413 et donc plus minimale que la sous-suite $rt'sq$.
Soit t'' l'élément supérieur à q situé entre t' (inclus) et p (exclu) et le plus à droite. Alors, tous les éléments e situés entre r et t'' sont supérieurs à q car sinon la sous-suite $et''sq$ serait de type 2413 et donc plus minimale que la sous-suite $rt'sq$.
p étant inférieur à son successeur dans π, le sommet d'étiquette p est un sommet interne. Soit p'' l'étiquette du dernier sommet de la branche droite de racine le sommet d'étiquette p et soit s' (éventuellement s) le successeur de p'' dans π. s' est inférieur à r car c'est l'un de ses ancêtres dans

l'arbre binaire complet croissant. Alors, tous les éléments e situés entre s' et s sont inférieurs à r car sinon la sous-suite $rt's'e$ serait de type 2413 et donc plus minimale que la sous-suite $rt'sq$.
Soit q'' l'étiquette du dernier sommet de la branche droite de racine le sommet d'étiquette q ; tous les éléments situés entre q' (inclus) et q'' (inclus) valent au moins q. Soit u l'élément situé à droite de q'' dans π, u étant inférieur à s car c'est l'un de ses ancêtres ; alors, aucun élément e situé à droite de u ne peut appartenir à $]p, q[$ car sinon la sous-suite $sq''ue$ serait de type 2413 mais ne ferait pas elle-même partie d'une sous-suite de type 25314.
Recherchons finalement l'élément t de la sous-suite $rtpsq$ de type 25314.
Soit t la plus petite des étiquettes supérieures à q appartenant à la branche gauche de racine le sommet d'étiquette p. Le père du sommet d'étiquette t est un sommet d'étiquette p' inférieure à q et p' est le successeur de t'' dans π puisque toutes les étiquettes des sommets appartenant au sous-arbre du sommet d'étiquette t doivent être au moins égales à t. En particulier, t'' est l'étiquette du dernier sommet de la branche droite du sommet d'étiquette t.
L'arbre binaire complet croissant de la permutation π ainsi reconstitué correspond effectivement à celui présenté figure 7.12.

$\square$

Définition 7.39 *L'ensemble des* arbres binaires complets séparables D_n *(voir figure 7.13) est l'ensemble*

$$D_n = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A_n \text{ et } \Delta_d(a_1) \cap \Delta_g(a_2) \neq \emptyset\}$$

où

- *Δ_d est l'ensemble des couples d'entiers $(x-1, y-1)$ tels que x et y sont les numéros d'ordre infixe respectivement d'un sommet interne s et d'une feuille t appartenant à la branche respectivement gauche et droite d'un même sommet interne droit de a_1,*

- *Δ_g est l'ensemble des couples d'entiers (x, y) tels que x et y sont les numéros d'ordre infixe respectivement d'une feuille s et d'un sommet interne t appartenant à la branche respectivement gauche et droite d'un même sommet interne gauche de a_2.*

Ainsi, deux arbres binaires complets séparables (a_1, a_2) possèdent chacun un sous-arbre tronqué (la branche principale est rompue) qui coïncident relativement à la numérotation en ordre infixe des sommets (à une unité près). Plus précisément, le sous-arbre de a_1 [resp. a_2] est tronqué à gauche [resp. droite] et est issu d'une arête droite [resp. gauche].

Exemple 7.40 *La figure 7.13 représente deux arbres binaires complets séparables (a_1, a_2) de D_{10}. En effet, l'intersection des ensembles $\Delta_d(a_1) = \{(7,8), (3,12), (5,12), (9,12), (11,12), (17,18), (15,20), (19,20)\}$ et $\Delta_g(a_2) = \{(1,2), (5,6), (5,8), (5,12), (5,14), (9,10), (17,18)\}$ est égale à $\{(5,12), (17,18)\}$.*

Remarque 7.41 *Soit (a_1, a_2) un couple d'arbres binaires complets séparables de D_n. Alors, les mots de parenthèses $u = code(a_1)$ de $P_{x,\overline{x}}$ et $v = code(a_2)$ de $P_{y,\overline{y}}$ sont tels qu'il existe au*

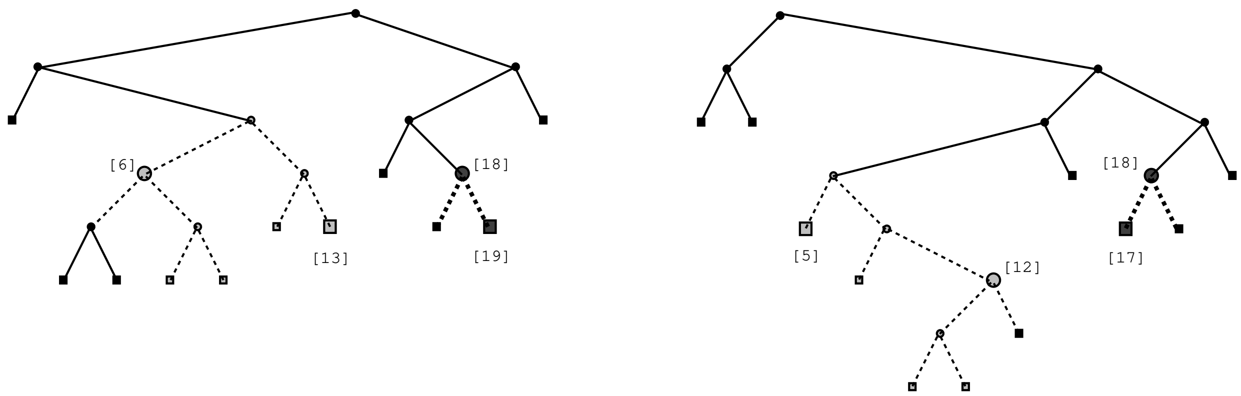


Figure 7.13 Deux arbres binaires complets séparables.

moins une factorisation $u = u_1\overline{x}x^ku_2\overline{x}u_3\overline{x}u_4$, $v = v_1yv_2v_3\overline{y}v_4$ *avec* $u_2 \in P_{x,\overline{x}}$, $x^k\overline{x}u_3 \in P_{x,\overline{x}}$, $v_2 \in P_{y,\overline{y}}\backslash\{\varepsilon\}$, $v_3 \in P_{y,\overline{y}}$, $|u_1\overline{x}x^ku_2|_{\overline{x}} = |v_1y|_{\overline{y}}$ *et* $|\overline{x}u_4|_{\overline{x}} = |v_3\overline{y}v_4|_{\overline{y}}$.

Lemme 7.42 *La bijection* Υ_2 *(voir lemme 7.18) met en correspondance les permutations de* $\widehat{NS\acute{e}p}_{2n}$ *et les arbres binaires complets non séparables ayant* n *sommets internes.*

Preuve Soient π une permutation de Baxter alternante et (a_1, a_2) un couple d'arbres binaires complets en bijection par Υ_2.
Nous allons prouver que π appartient à $\widehat{Baxter}_{2n}\backslash\widehat{NS\acute{e}p}_{2n}$ (c'est à dire que π possède une sous-suite de type 2413) si et seulement si (a_1, a_2) appartient à D_n. En fait, nous montrons plus précisément que $(\pi(2i+1)-p+1)(\pi(2i+2)-p+1)\ldots(\pi(2j)-p+1) \in \widehat{Baxter}_{q-p}$ avec $q-p = 2j-2i$ si et seulement si $(2i+1, 2j) \in \Delta_d(a_1) \cap \Delta_g(a_2)$.
La figure 7.14 présente deux arbres binaires complets partiellement étiquetés et indicés de façon à mettre en évidence les relations liant π et (a_1, a_2).

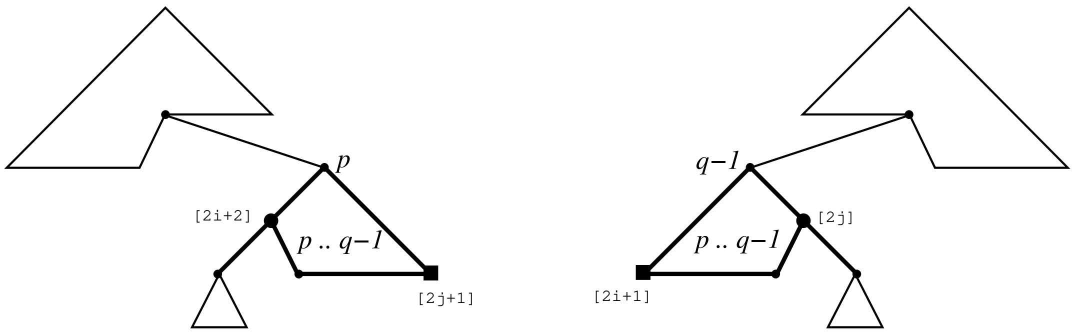


Figure 7.14 Arbres binaires complets séparables partiellement étiquetés représentant les arbres binaires complets croissant et décroissant d'une permutation de Baxter alternante admettant une sous-suite de type 2413.

- Soit f le mot en bijection avec π par Φ et Υ_1. Compte-tenu des lemmes 7.38 et 7.37, f appartient à $C_n\backslash H_n$ et se factorise en $f'x21f''32yf'''$ avec $x, y \in \{1, 3\}$, $1f''3 \in Y$, $|f'x|_1 + |f'x|_3 = p-1$ et $|f'''|_1 + |f'''|_3 = 2n-q$; en particulier, le facteur 21 [resp. $2y$] de la factorisation de f code la $p^{\grave{e}me}$

[resp. $q^{ème}$] lettre de $\Phi(f)$. Alors, il suffit d'appliquer les opérateurs de la figure 7.9 (voir remarque 7.21) permettant de construire les deux arbres binaires complets séparables a_1 et a_2 à partir du mot f.

- Soit p [resp. $q-1$] l'étiquette de la racine du sous-arbre contenant $\pi(2i+1)$ et $\pi(2j)$ dans l'arbre binaire complet croissant [resp. décroissant] de π. Nous avons $\pi(2j+1) < p-1$ [resp. $\pi(2i) > q$] car c'est un ancêtre de p [resp. $q-1$] autre que son père dans l'arbre binaire complet croissant [resp. décroissant]. Soit $\pi(2k+1)$ [resp. $\pi(2l)$] l'étiquette du père de p [resp. $q-1$] dans l'arbre binaire complet croissant [resp. décroissant] vérifiant $\pi(2j+1) < \pi(2k+1) < p$ [resp. $q-1 < \pi(2l) < \pi(2i)$] car c'est un descendant de $\pi(2j+1)$ [resp. $\pi(2i)$] et c'est le père de p dans l'arbre binaire complet croissant [resp. décroissant]. Finalement, comme $p < q-1$, nous avons que la sous-suite $\pi(2k+1)\pi(2i)\pi(2j+1)\pi(2l)$ est de type 2413.

□

Lemme 7.43 *La composition des bijections Λ (voir lemme 7.24) et Ω (voir définition 7.22) permet de mettre en correspondance les mots f de H'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3$ où $g \in Y$ codant les arbres 1-2 filiformes non séparables) et les couples (a_1, a_2) d'arbres binaires complets non séparables.*

Preuve

- Compte-tenu de la remarque 7.41 et des définitions des codages préfixe et suffixe d'un arbre binaire complet, la bijection Ω met en correspondance les couples (a_1, a_2) d'arbres binaires complets non séparables et les couples (a, b) de mots de parenthèses de $P_{2,3} \times P_{1,2}$ tels qu'il existe pas de factorisation $a = a'a''3a'''$, $b = b'1b''b'''$ avec $a'' \in P_{2,3}\backslash\{\varepsilon\}$, $b'' \in P_{1,2}\backslash\{\varepsilon\}$, $|a'|_2 = |b'|_2$ et $|a'''|_2 = |b'''|_2$.
- Soient $f = f'1f''3f''' \in C'_n\backslash H'_n$ et (a, b) le couple de mots de parenthèses de $P_{2,3} \times P_{1,2}$ mis en correspondance par Λ. La suppression des lettres 1 dans les mots f', f'', f''' conduit respectivement aux mots a', a'', a''' pour $a = a'a''3a'''$ et la suppression des lettres 3 dans les mots f', f'', f''' conduit respectivement aux mots b', b'', b''' pour $b = b'1b''b'''$, et qui vérifient $(a'', b'') \in P_{1,2}\backslash\{\varepsilon\} \times P_{2,3}\backslash\{\varepsilon\}$, $|a'|_2 = |b'|_2 = |f'|_2$ et $|a'''|_2 = |b'''|_2 = |f'''|_2$.
  Il est clair que réciproquement, pour un couple de mots de parenthèses $(a, b) = (a'a''3a''', b'1b''b''')$ avec $(a'', b'') \in P_{1,2}\backslash\{\varepsilon\} \times P_{2,3}\backslash\{\varepsilon\}$, $|a'|_2 = |b'|_2 = |f'|_2$ et $|a'''|_2 = |b'''|_2 = |f'''|_2$, le facteur f'' tel que $\Lambda(f'') = (a'', b'')$ appartient à $Y\backslash\{\varepsilon\}$ et est encadré par les lettres 1 et 3.

□

7.3.2 Arbres 1-2 filiformes non séparables et cartes planaires cubiques pointées non séparables

Rappelons tout d'abord que le parcours de l'arbre recouvrant d'une carte planaire pointée ayant n arêtes permet de la coder par un mot de longueur $2n$ d'un langage non algébrique L appelé langage de Lehman-Lenormand [70] sur l'alphabet $\{x, \overline{x}, y, \overline{y}\}$.
R. Cori [16] a montré que ce langage L est l'unique solution de l'équation $L = \varepsilon + yL\overline{y}L + xD(L)$ où l'opérateur D est défini de la manière suivante. Si $w = w_1w_2\dots w_m$ avec $w_i \in P_{x,\overline{x}} \sqcup\!\sqcup \{y, \overline{y}\}^*$ pour tout $i \in [m]$ et m maximal, alors $D(w) = \sum_{i=0}^{m} d_i(w)$ où

$d_i(w) = w_1 w_2 \dots w_i \overline{x} w_{i+1} w_{i+2} \dots w_m$ pour tout $i \in [0, m]$.
Notons de plus qu'une carte planaire pointée non séparable est codée par un mot du langage $L \backslash \{w = w'w''w''' \in L : w'' \in L$ et $w'w''' \neq \varepsilon\}$.

Lemme 7.44 *Il existe une bijection Ξ (voir figure 7.15) entre arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples de $\overline{F}_n$ et cartes planaires cubiques pointées non séparables ayant $2n$ sommets de CNS_{2n}.*

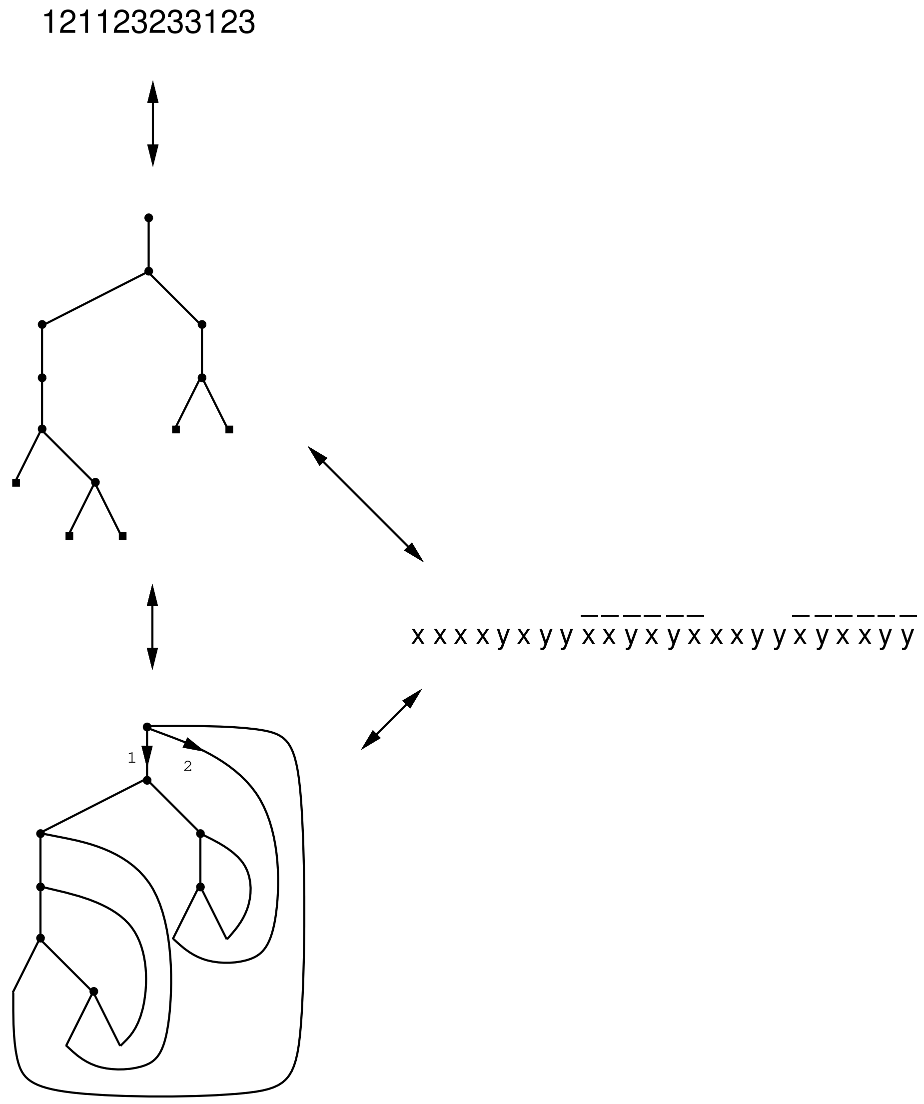


Figure 7.15 La bijection Ξ entre un arbre 1-2 filiforme non séparable et une carte planaire cubique pointée non séparable.

L'application Ξ et son inverse sont définies de la façon suivante.

- Ξ consiste, pour un arbre 1-2 filiforme non séparable, à prolonger à droite chacune des arêtes menant à la dernière, puis à l'avant-dernière, ..., et enfin à la première des feuilles jusqu'au prochain point simple (ou la racine) non saturé relativement à un parcours en profondeur. Le brin pointé de la carte planaire cubique pointée non séparable ainsi obtenue correspond à l'ancien arc partant de la racine de l'arbre.

- L'application inverse Ξ^{-1} consiste à ajouter à l'arbre recouvrant de la carte planaire cubique pointée non séparable une feuille pour toute arête de la carte n'appartenant pas à l'arbre recouvrant et rencontrée pour la première fois lors du parcours en profondeur.

Preuve Clairement, l'application Ξ est bien définie. En effet, l'opération de prolongement des feuilles est valide en raison des conditions **C1** et **C2** que vérifient les arbres 1-2 filiformes non séparables et la carte ainsi construite est planaire et cubique. De plus, le fait qu'elle soit non séparable résulte de la condition **C3'**.
L'application Ξ^{-1} est également bien définie et est clairement, par construction, l'application réciproque de Ξ. □

Notons que, partant d'un arbre 1-2 filiforme non séparable, le mot du langage de Lehman-Lenormand s'obtient en effectuant un parcours en profondeur de l'arbre et en codant une arête externe (dont l'extrémité est une feuille) par la lettre y, une arête interne gauche ou droite par la lettre x à l'aller et la lettre $\overline{x}$ au retour, une arête interne centrale par la lettre x à l'aller et le facteur $\overline{xy}$ au retour, et en ajoutant une lettre $\overline{y}$ à la fin du mot.
Preuve du théorème 7.34. La composition des bijections Φ, Υ, Ω, Λ et Ξ met en correspondance H_n, H'_n et CNS_{2n}. Or, W.T. Tutte [103] a établi la formule d'énumération de ces cartes. L'équidistribution des mots H_n et H'_n suivant le nombre de facteurs de longueur deux se déduit directement de la proposition 7.13. □

7.4 Tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne

Nous établissons maintenant les résultats suivants qui précisent le théorème 7.5.

Théorème 7.45 *Les mots du langage P_n (ensemble des mots de piles sans facteur $2g2, 11, 33$ où $g \in Y$) codant les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne sont en correspondance avec les mots du langage P'_n (ensemble des mots de piles sans facteur $1g3, 32, 21$ où $g \in Y$) codant les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples et ne possédant aucun point double fils droit ni aucun point simple fils gauche, et sont en bijection avec les cartes planaires pointées* *non séparables ayant* $n+1$ *arêtes de* NS_{n+1}. *Ils sont dénombrés par*

$$|P_n| = |P'_n| = |NS_{n+1}| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$$

Proposition 7.46 *Les tableaux de Young standard rectangulaires non séparables de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur une même ligne et possédant s couples d'entiers consécutifs situés sur les troisième et première lignes sont en correspondance avec les arbres 1-2 filiformes non séparables ayant n points simples ne possédant aucun point double fils droit ni aucun point simple fils gauche et ayant s points simples fils droits et sont en bijection avec les cartes planaires pointées non séparables ayant* $n+1$ *arêtes et s sommets. Ils sont dénombrés par*

$$|\{f \in P_n : |f|_{31} = s\}| = |\{f' \in P'_n : |f'|_{31} = s\}| = |\{c \in NS_{n+1} : c \text{ possède } s \text{ sommets}\}| =$$

$$\frac{(2n-s-1)!(n+s)!}{(2n-2s-1)!(n-s)!(2s+1)!(s+1)!}$$

Lemme 7.47 *La correspondance composant les bijections* Φ *(voir lemme 7.16),* Υ *(voir lemme 7.18) et* Ψ *(voir théorème 6.16) relie les mots de* P_n *(ensemble des mots de piles sans facteur* $2g2, 11, 33$ *où* $g \in Y$*) et les permutations non séparables de* $S_n(2413, 41\bar{3}52)$.
De plus, cette correspondance met en bijection les mots f de P_n *tels que* $|f|_{31} = s$ *et les permutations* π *de* $S_n(2413, 41\bar{3}52)$ *telles que* $desc(\pi) = s$.

Preuve Rappelons que les bijections Φ et Υ_1 mettent en correspondance, d'une part les mots de C_n et les permutations de Baxter alternantes de $\widehat{S}_{2n}(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)$, et d'autre part les mots de H_n et les permutations non séparables alternantes de $\widehat{S}_{2n}(2413, 41\bar{3}52)$. De plus, les bijections Φ, Υ et Ψ mettent en correspondance les mots de B_n et les permutations de Baxter de $S_n(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)$. Or, l'interdiction d'un facteur $2g2$ pour tout $g \in Y$ dans les mots de C_n pour n'autoriser que les mots de H_n équivaut à l'exclusion du motif 25314 dans les permutations de Baxter alternantes pour n'autoriser que les permutations non séparables alternantes. Nous appliquons ici cette même interdiction aux mots de B_n pour n'autoriser que les mots de P_n, ce qui revient à exclure le motif 25314 dans les permutations de Baxter pour n'autoriser que les permutations non séparables de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$.
De plus, d'après la propriété 7.20, le nombre de facteurs 31 d'un mot de P_n correspond au nombre de descentes d'une permutation de $S_n(2413, 41\bar{3}52)$. □

Preuve du théorème 7.45. Les bijections Φ, Υ et Ψ (voir théorème 6.16) mettent en correspondance les mots de P_n et les permutations non séparables sur $[n]$. S. Dulucq, S. Gire et J. West [28, 45] relient ces permutations aux cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes, cartes dénombrées par W.T. Tutte [105]. Le théorème 7.34 nous permet de conclure pour les mots de P'_n. □

Preuve de la proposition 7.46. Ce résultat se déduit du théorème 7.45 et de la formule dénombrant les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes et s sommets, formule due à W.G. Brown et W.T. Tutte [12]. □

Remarquons qu'une des façons de prouver la conjecture 7.35 consisterait à montrer que $(n-m).|H_{n,m-1}| = m.|H_{n,m}|$ ou bien que $(n-m).|H'_{n,m-1}| = m.|H'_{n,m}|$, et ce pour tout $n \geq 1$ et pour tout $m \in [\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]$. En effet, d'après le théorème 7.45, $H_{n,0} = P_n$ et $H'_{n,0} = P'_n$ satisfont la conjecture.

7.5 D'autres restrictions sur les mots de piles

En considérant plusieurs autres restrictions sur les mots de piles, nous mettons en évidence différents langages en bijection avec l'ensemble des couples de chemins de Dyck ne se coupant pas, avec les arbres binaires, ou encore avec les arbres ternaires complets.

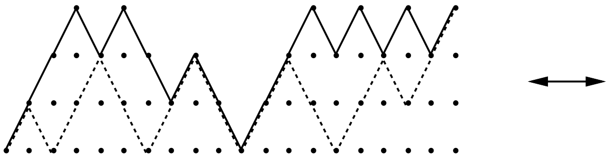
7.5.1 Mots de piles et couples de chemins de Dyck ne se coupant pas

Nous considérons maintenant certains chemins à rapprocher de ceux étudiés par M. Desainte Catherine et X. Viennot [22] et par S. Hee Choi et D. Gouyou-Beauchamps [56].

Le langage des facteurs gauches de mots de parenthèses sur $\{z, \overline{z}\}$, de longueur l et de hauteur finale p, est le langage $FGD_{l,p} = \{w \in \{z, \overline{z}\}^* : |w| = l; |w|_z - |w|_{\overline{z}} = p; \forall w = w'w'', |w'|_z \geq |w'|_{\overline{z}}\}$.

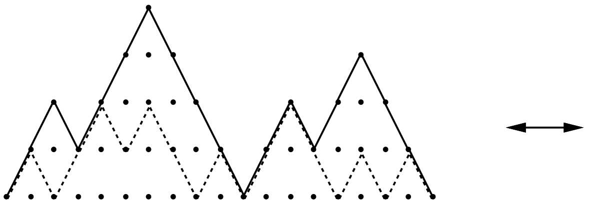
Nous notons $V_{l,p}$ (voir figure 7.16) l'ensemble des couples de facteurs gauches de mots de parenthèses, de même longueur l et de même hauteur finale p, dont les chemins correspondants ne se coupent pas : $V_{l,p} = \{(u,v) \in FGD_{l,p} \times FGD_{l,p}$ sur $\{x, \overline{x}\}^* \times \{y, \overline{y}\}^* : \forall u = u'u'', v = v'v'', |u'| = |v'| \Longrightarrow |u'|_x - |u'|_{\overline{x}} \geq |v'|_y - |v'|_{\overline{y}}\}$.

Ainsi, $V_{2n,0}$ (voir figure 7.17) désigne l'ensemble des couples de mots de parenthèses de même longueur $2n$ codant des chemins de Dyck ne se coupant pas.



$$x\,x\,x\,\overline{x}\,x\,\overline{x}\,\overline{x}\,x\,\overline{x}\,\overline{x}\,x\,x\,x\,\overline{x}\,x\,\overline{x}\,x\,\overline{x}\,x$$
$$y\,\overline{y}\,y\,y\,\overline{y}\,\overline{y}\,y\,y\,\overline{y}\,\overline{y}\,y\,y\,\overline{y}\,\overline{y}\,y\,y\,\overline{y}\,y\,y$$

Figure 7.16 Un couple de facteurs gauches de mots de parenthèses dont les chemins correspondants ne se coupent pas de $V_{19,3}$.



$$x\,x\,\overline{x}\,x\,x\,x\,\overline{x}\,\overline{x}\,\overline{x}\,\overline{x}\,x\,x\,\overline{x}\,x\,x\,\overline{x}\,\overline{x}\,\overline{x}$$
$$y\,\overline{y}\,y\,y\,\overline{y}\,y\,\overline{y}\,\overline{y}\,y\,\overline{y}\,y\,y\,\overline{y}\,\overline{y}\,y\,\overline{y}\,y\,\overline{y}$$

Figure 7.17 Un couple de mots de parenthèses codant des chemins de Dyck ne se coupant pas de $V_{18,0}$.

D. Gouyou-Beauchamps [48, 49] a établi combinatoirement les deux résultats suivants.

$$|V_{l,p}| = |\{\sigma \in I_l(54321) : \sigma \text{ a } p \text{ points fixes}\}| = \frac{(p+3)!l!(l+2)!}{p!\frac{l-p}{2}!(\frac{l-p}{2}+1)!(\frac{l+p}{2}+2)!(\frac{l+p}{2}+3)!}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |V_{2n-1,2k+1}| = |I_{2n-1}(54321)| = c_n.c_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} |V_{2n,2k}| = |I_{2n}(54321)| = c_{n+1}.c_n$$

Théorème 7.48 *Les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la première ligne et les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs situés sur les deuxième et première lignes sont en bijection avec les couples de chemins de Dyck ne se coupant pas de longueur $2n$. Ils sont dénombrés par*

$$|\{f \in Y_n : |f|_{11} = 0\}| = |\{f \in Y_n : |f|_{21} = 0\}| = |V_{2n,0}| = \frac{3!(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}$$

En considérant les opérations miroir et complémentaire d'un mot, nous en déduisons que cette même formule dénombre l'ensemble des mots de piles sans facteur 32 et l'ensemble des mots de piles sans facteur 33.

Corollaire 7.49 *Les tableaux de Young standard n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la première ligne, possédant $\frac{l+p}{2}$ entiers sur les deux premières lignes et $\frac{l-p}{2}$ entiers sur la troisième ligne, et les tableaux de Young standard n'ayant pas deux entiers consécutifs situés sur les deuxième et première lignes, possédant $\frac{l+p}{2}$ entiers sur les deux premières lignes et $\frac{l-p}{2}$ entiers sur la troisième ligne, sont en bijection avec les couples de facteurs gauches de mots de parenthèses de même longueur l et de même hauteur finale p dont les chemins correspondants ne se coupent pas. Ils sont dénombrés par*

$$\frac{(p+3)!l!(l+2)!}{p!\frac{l-p}{2}!(\frac{l-p}{2}+1)!(\frac{l+p}{2}+2)!(\frac{l+p}{2}+3)!}$$

Lemme 7.50 *Il existe une bijection Φ_{11} entre couples de chemins de Dyck ne se coupant pas et mots de piles sans facteur 11. Celle-ci est donnée par le morphisme*

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_{11} & : & V_{2n,0} & \longrightarrow & Y_n \backslash \{\mathcal{A}^*11\mathcal{A}^*\} \\ & & (u,v) & \longmapsto & f \end{array} \quad \textit{défini par} \begin{cases} \Phi_{11}(x,y) = 12 \\ \Phi_{11}(x,\overline{y}) = 13 \\ \Phi_{11}(\overline{x},y) = 2 \\ \Phi_{11}(\overline{x},\overline{y}) = 3 \end{cases}$$

Preuve Soient $(u,v) \in V_{2n,0}$ et $f = \Phi_{11}(u,v)$. Nous avons alors

- $|u|_x = |u|_{\overline{x}} = |v|_y = |v|_{\overline{y}} = n \Longrightarrow |f|_1 = |f|_2 = |f|_3 = n$,
- Soient $u = u'u'', v = v'v''$ tels que $|u'| = |v'|$ et $f' = \Phi_{11}(u',v')$; alors
  - $|u'|_x - |u'|_{\overline{x}} \geq |v'|_y - |v'|_{\overline{y}} \Longrightarrow |f'|_1 \geq |f'|_2$,
  - $|v'|_y \geq |v'|_{\overline{y}} \Longrightarrow |f'|_2 \geq |f'|_3$.

De plus, l'ensemble $\{12, 13, 2, 3\}$ constituant un code préfixe, l'application réciproque de Φ_{11} est clairement définie. $\square$

Exemple 7.51 *Le mot* 121321213123323121231312323 *de* $Y_9 \backslash \{\mathcal{A}^* 11 \mathcal{A}^*\}$ *est en correspondance par* Φ_{11} *avec le couple de mots de parenthèses ne se coupant pas de* $V_{18,0}$ *illustré par la figure 7.17.*

Lemme 7.52 *Il existe une bijection* Λ_{21} *entre mots de piles sans facteur* 21 *et couples de chemins de Dyck ne se coupant pas. Celle-ci est donnée par le morphisme*

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda_{21} & : & Y_n \backslash \{\mathcal{A}^* 21 \mathcal{A}^*\} & \longrightarrow & V_{2n,0} \\ & & f & \longmapsto & (u,v) \end{array} \quad \textit{défini par} \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{21}(1) = (x, \varepsilon) \\ \Lambda_{21}(2) = (\varepsilon, y) \\ \Lambda_{21}(3) = (\overline{x}, \overline{y}) \end{array} \right.$$

L'application réciproque consiste à envoyer, avant chaque couple $(\overline{x}, \overline{y})$, d'abord toutes les lettres x sur 1 avant toutes les lettres y sur 2.

Preuve Soient $f \in Y_n \backslash \{\mathcal{A}^* 21 \mathcal{A}^*\}$ et $(u, v) = \Lambda_{21}(f)$. Nous avons alors

- $|f|_1 = |f|_2 = |f|_3 = n \Longrightarrow |u|_x = |u|_{\overline{x}} = |v|_y = |v|_{\overline{y}} = n$,
- pour toute factorisation $f = f'f''$ telle que $\Lambda_{21}(f') = (u', v')$, $|f'|_1 \geq |f'|_2 \Longrightarrow |u'|_x \geq |v'|_y$ et donc $|u'|_x - |u'|_{\overline{x}} \geq |v'|_y - |v'|_{\overline{y}}$ car $|u'|_{\overline{x}} = |v'|_{\overline{y}}$.

$\square$

Exemple 7.53 *Le mot* 112311122323323112231132323 *de* $Y_9 \backslash \{\mathcal{A}^* 21 \mathcal{A}^*\}$ *est en correspondance par* Λ_{21} *avec le couple de mots de parenthèses ne se coupant pas de* $V_{18,0}$ *illustré par la figure 7.17.*

Preuve du théorème 7.48. Les bijections Φ_{11} et Λ_{21} mettent en correspondance les couples de chemins de Dyck ne se coupant pas avec les mots de piles respectivement sans facteur 11 et sans facteur 21. Nous obtenons alors le résultat d'énumération annoncé à partir de la formule de D. Gouyou-Beauchamps [48, 49] dénombrant $V_{l,p}$, en posant $l = 2n$ et $p = 0$. $\square$

Preuve du corollaire 7.49. Il suffit d'étendre les morphismes Φ_{11} et Λ_{21} aux couples de facteurs gauches de mots de parenthèses ne se coupant pas de $V_{l,p}$. $\square$

Exemple 7.54 *Les mots* 121312213321233121213312213212 *et* 111231223312233111223131223122 *sont en correspondance respectivement par* Φ_{11} *et* Λ_{21} *avec le couple de facteurs gauches de mots de parenthèses ne se coupant pas de* $V_{19,3}$ *illustré par la figure 7.16.*

7.5.2 Mots de piles et arbres binaires

Théorème 7.55 *Les tableaux de Young standard rectangulaires de hauteur* 3 *et de longueur* n *n'ayant pas deux entiers consécutifs sur la première ligne, n'ayant pas deux entiers consécutifs situés sur les première et troisième lignes et les tableaux de Young standard rectangulaires de* *hauteur 3 et de longueur n n'ayant pas deux entiers consécutifs situés sur les deuxième et première lignes, n'ayant pas deux entiers consécutifs situés sur les troisième et première lignes sont en bijection avec les mots de parenthèses de longueur $2n$. Ils sont dénombrés par*

$$|\{f \in Y_n : |f|_{11} = |f|_{13} = 0\}| = |\{f \in Y_n : |f|_{21} = |f|_{31} = 0\}| = c_n$$

Plusieurs autres ensembles des mots de piles excluant deux facteurs de longueur deux sont également dénombrés par le $n^{ème}$ nombre de Catalan. Ils s'obtiennent bijectivement à partir de l'un des deux langages donnés par le théorème 7.55, en utilisant la bijection Λ (entre mots de piles sans facteur 13 ou 31 et arbres binaires), avec la correspondance composant les bijections Φ, Υ, Ω et Λ (entre mots de piles sans facteur 22 et mots de piles sans facteur 13) ou encore en appliquant les opérations miroir et complémentaire sur un mot.

Lemme 7.56 *Les mots de piles sans facteur* $11, 13$ *sont exactement les mots de parenthèses de* $P_{12,3}$.

Preuve Il suffit de remarquer que tout mot de piles f appartenant à Y_n tel que $|f|_{11} = |f|_{13} = 0$ vérifie $|f|_{12} = n$. □

Lemme 7.57 *Les mots de piles sans facteur* $21, 31$ *sont exactement les mots de* $\{1\}^*P_{2,3}$ *ayant autant de* 1 *que de* 2.

Preuve Il suffit de remarquer que tout mot de piles f appartenant à Y_n tel que $|f|_{21} = |f|_{31} = 0$ vérifie $|f|_{11} = n - 1$. □

Preuve du théorème 7.55. Ce résultat est une conséquence des deux lemmes précédents. □

7.5.3 Mots de piles et arbres ternaires complets

Définition 7.58 *Un* arbre ternaire complet *est un arbre dessiné et enraciné pour lequel chaque sommet interne possède exactement trois fils.*

De manière générale, le nombre d'arbres p-aires ayant $pn + 1$ sommets (n sommets internes et $(p-1)n + 1$ feuilles) est $\frac{(pn)!}{((p-1)n+1)!n!}$ [61].

Le système de réécriture $\left\{ \begin{array}{lll} (p) & & \\ (t) & \rightsquigarrow & (p), (p+1), \ldots, (p+t-1) \end{array} \right.$ caractérise un arbre de génération des arbres p-aires où l'étiquette (t) associée à un arbre indique que ses t feuilles les plus à gauche sont actives (c'est à dire qu'il est possible de les faire croître).

Théorème 7.59 *Les mots du langage* R_n *(ensemble des mots de piles sans facteur* $2g2, 1g3$ *où* $g \in Y$*) sont en bijection avec les arbres ternaires complets ayant* $3n + 1$ *sommets. Ils sont dénombrés par*

$$|R_n| = \frac{(3n)!}{(2n+1)!n!}$$

Preuve Cette bijection est obtenue par le codage suivant d'un arbre ternaire complet a.

$$tern(a) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } a \text{ est réduit à un sommet} \\ 1\ tern(gauche(a))\ 2\ tern(central(a))\ 3\ tern(droit(a)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, ce codage constitue une bijection entre arbres ternaires complets ayant n sommets internes et mots du langage R_n. □

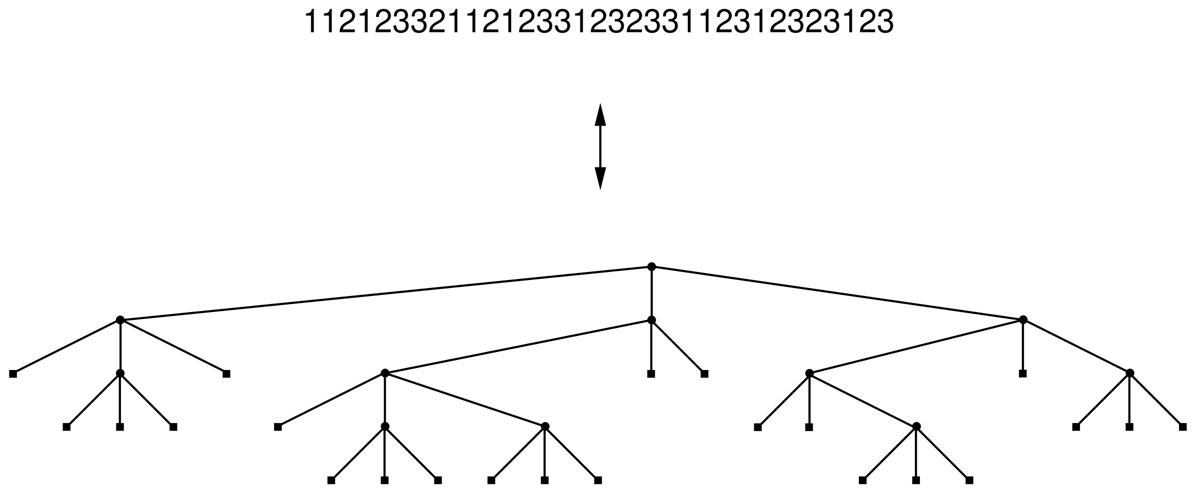


Figure 7.18 Codage d'un arbre ternaire complet ayant 11 sommets internes par un mot de R_{11}.

Exemple 7.60 *La figure 7.18 illustre cette bijection.*

Remarquons pour terminer que nous avons $2.|R_n| = (n+1).|P_n|$ où P_n est l'ensemble des mots de piles sans facteur $2g2, 11, 33$ avec $g \in Y$; il est également possible de considérer, au lieu de P_n, l'ensemble des mots de piles sans facteur $1g3, 32, 21$ avec $g \in Y$, ou l'ensemble des mots de piles sans facteur $1g3, 22, 31$ avec $g \in Y$ ou encore l'ensemble des mots de piles sans facteur $2g2, 13, 31$ avec $g \in Y$. Prouver combinatoirement cette formule fournirait, compte-tenu des résultats obtenus dans cette thèse, une preuve combinatoire de la formule dénombrant les cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes, problème soulevé par R. Cori [17].

Perspectives

La méthode des arbres de génération se révèle être une technique pouvant avoir plusieurs applications et dont il est naturel d'aborder certaines questions qu'elle pose.

Comme nous l'avons montré, cette méthode peut être utilisée pour effectuer la génération aléatoire d'objets combinatoires.

Dans de nombreux cas, nous avons obtenu des systèmes de réécriture différents permettant d'engendrer des objets combinatoires ayant la même formule d'énumération. Par exemple, nous avons exhibé cinq systèmes de réécriture correspondant à des objets énumérés par les coefficients binomiaux centraux. Ainsi, il est naturel de se demander s'il existe des opérations qui transforment les règles (et les étiquettes) d'un système de réécriture pour en obtenir un autre, avec pour unique contrainte que les deux arbres de dérivation correspondants aient le même nombre de sommets par niveau ? Ce principe est à rapprocher de la notion de réécriture de termes en programmation fonctionnelle. Un exemple simple utilisant cette technique nous a permis de relier combinatoirement involutions vexillaires (motif 2143 interdit) et involutions excluant le motif 1243.

M.P. Schützenberger [91, 93] a montré les liens qui pouvaient exister entre certains problèmes d'énumération et certaines classifications de langages. Qu'en est-il pour la méthode des arbres de génération ? Nous pouvons actuellement affirmer que des objets combinatoires dont les séries génératrices sont rationnelles, algébriques ou différentiablement finies peuvent être engendrés par des arbres de génération se caractérisant ensuite par un système de réécriture.
Par exemple, les nombres de Fibonacci (série génératrice rationnelle) et les nombres de Catalan (série génératrice algébrique) sont obtenus avec les systèmes de réécriture caractérisant respectivement l'arbre de génération $T(123, 132, 213)$ et l'arbre de génération des mots de parenthèses. D'autre part, la série génératrice associée au système de réécriture obtenu en effectuant le produit cartésien de deux systèmes de réécriture caractérisant l'arbre de génération des mots de parenthèses est différentiablement finie. En effet, D. Gouyou-Beauchamps a montré lors de l'énumération des tableaux de Young standard de hauteur au plus 4 [48, 49] que la série génératrice correspondante est différentiablement finie puisque la suite des carrés des nombres de Catalan satisfait une P-récurrence, c'est à dire une récurrence linéaire homogène à coefficients polynomiaux [42].

Introduite par F.R.K. Chung, R.L. Graham, V.E. Hoggatt et M. Kleiman [15] pour dénombrer les permutations de Baxter [4], la méthode des arbres de génération a été utilisée dans de nombreux travaux portant sur l'énumération d'ensembles de permutations à motifs exclus [110, 53, 45, 114, 97, 112] et a permis à S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [28, 27] d'établir une correspondance entre permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile et cartes planaires pointées non séparables, prouvant ainsi une conjecture de J. West [110, 113].

Ainsi, les correspondances obtenues par isomorphisme d'arbres de génération des permutations viennent en complément des trois bijections classiques miroir, complémentaire et inverse sur les permutations à motifs exclus [110]. Les résultats développés dans les chapitres 4 et 5, en partie devinés à l'aide du logiciel *forbid*, en sont une illustration.

Toutefois, certaines familles de permutations à motifs exclus, bien qu'ayant une même formule d'énumération (par exemple, 12 ensembles sont dénombrés par les coefficients binomiaux centraux), ne peuvent être reliées entre elles par la méthode des arbres de génération ou par ces trois bijections classiques.

Ainsi, apparait la nécessité d'obtenir des résultats revétant un caractère général sur l'énumération des permutations à motifs exclus, les seuls connus à ce jour étant ceux d'E. Babson et J. West [110, 2, 115].

Un vaste travail reste à entreprendre pour énumérer involutions et permutations alternantes à motifs exclus, à l'instar des résultats de R. Simion et F.W. Schmidt [95] et de J. West [110, 114] pour les permutations à motifs exclus.

Le dénombrement de tels ensembles pour des motifs simples constituerait une première étape de ce travail, d'autant que des formules classiques en Combinatoire apparaissent comme par exemple les nombres de Motzkin.

Une telle approche est également motivée par les travaux [79, 99, 49, 118, 6, 42] sur les tableaux de Young standard de hauteur bornée, tableaux en bijection [83, 89, 92] avec les involutions excluant le motif identité.

Les involutions excluant le motif 54321 et les permutations de Baxter alternantes ont même formule d'énumération (alternativement le carré des nombres de Catalan et le produit de deux nombres de Catalan successifs), formule prouvée combinatoirement respectivement par D. Gouyou-Beauchamps [49] et par R. Cori, S. Dulucq et X. Viennot [18], mais sans que n'ait été encore trouvé de bijection directe reliant ces deux ensembles.

Nous pensons avoir franchi une première étape vers un tel résultat. En effet, nous avons caractérisé un nouvel ensemble d'involutions à motifs exclus, directement en correspondance avec les involutions excluant le motif 54321, et possédant des distributions qui coïncident (les premières valeurs ont été vérifiées à l'aide du logiciel *forbid*) avec certaines distributions des permutations de Baxter alternantes. Ces distributions font apparaître les nombres de Delannoy et de Narayana.

Les permutations vexillaires, introduites par A. Lascoux et M.P. Schützenberger [69], sont telles que les partitions correspondant aux tables d'inversion de ces permutations et de leurs inverses sont conjuguées. Elles correspondent également aux permutations excluant le motif 2143 [72]. En combinant les travaux de J. West [110] et d'I.M. Gessel [42], nous obtenons une formule les dénombrant.

Nous nous sommes intéressés aux involutions vexillaires et avons conjecturé qu'elles sont énumérées par les nombres de Motzkin.

Pour l'instant, nous avons seulement montré que les involutions vexillaires sans point fixe sont en bijection avec les permutations vexillaires. Plus précisément, nous avons établi qu'une permutation π appartient à $S_n(2143)$ si et seulement si l'involution sans point fixe $(n+\pi^{-1}(1))(n+\pi^{-1}(2))\ldots(n+\pi^{-1}(n))\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$ appartient à $I_{2n}(2143)$.

En dépit de la correspondance de S. Dulucq, S. Gire, O. Guibert et J. West [28, 27] reliant cartes planaires pointées non séparables, permutations non séparables et permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile, il n'existe pas de preuve combinatoire de la formule dénombrant ces objets, problème soulevé par R. Cori [17].

Une étude approfondie de la caractérisation des cartes planaires pointées non séparables en terme d'arbres bien étiquetés due à S. Dulucq et J-G. Penaud [31] ou du codage des permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile par des chemins de Raney dû à I.P. Goulden et J. West [46] pourrait éventuellement permettre de résoudre ce problème.

Nous pouvons également considérer une autre approche qui fait directement suite à nos travaux. En effet, nous avons obtenu quatre langages de mots de piles en bijection avec les permutations non séparables. Or, un autre langage de mots de piles est en correspondance avec les arbres ternaires complets. Exprimer l'un des quatre langages en bijection avec les permutations non séparables en fonction de celui codant les arbres ternaires complets constituerait donc une solution à ce problème.

Plusieurs nouvelles questions portant sur l'énumération des mots de langages correspondant à des restrictions sur les mots de piles restent sans réponse. Toutefois, nous avons remarqué que dans plusieurs cas apparaissent des formules énumérant des familles de cartes planaires considérées par W.T. Tutte.

Par exemple, nous conjecturons qu'un de ces langages est dénombré par la formule donnant le nombre de triangulations planaires [102] ou de cartes planaires cubiques pointées non séparables 3-connexes [103]. De même, il serait fort utile d'établir une correspondance permettant d'expliquer le rapport du nombre de cartes planaires cubiques pointées non séparables [103] au nombre de cartes planaires pointées non séparables [105].

Plus généralement, nous avons souvent constaté que des permutations à motifs exclus et des cartes planaires ont même formule d'énumération. Ceci est source de nouvelles recherches laissant apparaître de nombreux problèmes.

Annexe A

Catalogue sur les permutations à motifs exclus

Ce catalogue, inspiré de celui de J. West [111], complété par les résultats obtenus dans cette thèse et quelques recherches bibliographiques, présente les résultats que nous connaissons à ce jour sur l'énumération des permutations à motifs exclus. Il ne prétend pas toutefois être exhaustif sur le sujet.

Propriétés et résultats généraux

Nous présentons tout d'abord des résultats très généraux, c'est à dire des propriétés pouvant s'appliquer à toute une classe de permutations à motifs exclus.

- $|S_n(12\ldots(l+1),(m+1)m\ldots 1)| = 0, \forall n > l.m$ [34]
- $|S_n(12\ldots(k+1))| \sim \alpha_k.\frac{(k-1)^{2n}}{n^{(k^2-2k)/2}}$ où α_k est une constante [79]
  $|I_n(12\ldots k)| = |I_n(k(k-1)\ldots 1)|$
- $T(12a_3a_4\ldots a_k) \cong T(21a_3a_4\ldots a_k)$ [110]
  $T(123a_4a_5\ldots a_k) \cong T(321a_4a_5\ldots a_k)$ [2]
  $T(12\ldots ra_{r+1}a_{r+2}\ldots a_k) \cong T(r(r-1)\ldots 1a_{r+1}a_{r+2}\ldots a_k)$ [115]
- $\pi \in S_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p) \iff \pi^* \in S_n({\tau_1}^*,{\tau_2}^*,\ldots,{\tau_p}^*) \iff \pi^c \in S_n({\tau_1}^c,{\tau_2}^c,\ldots,{\tau_p}^c) \iff \pi^{-1} \in S_n({\tau_1}^{-1},{\tau_2}^{-1},\ldots,{\tau_p}^{-1})$ [110]
  $\pi \in I_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p) \iff \pi^{*c} \in I_n({\tau_1}^{*c},{\tau_2}^{*c},\ldots,{\tau_p}^{*c})$ [corollaire 1.13]
  $\pi \in I_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p) \iff \pi \in I_n({\tau_1}^{-1},{\tau_2}^{-1},\ldots,{\tau_p}^{-1})$ [corollaire 1.13]
  $\pi \in \widehat{S}_{2k}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p) \iff \pi^{*c} \in \widehat{S}_{2k}({\tau_1}^{*c},{\tau_2}^{*c},\ldots,{\tau_p}^{*c})$ [corollaire 1.13]
  $\pi \in \widehat{S}_{2k+1}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p) \iff \pi^* \in \widehat{S}_{2k+1}({\tau_1}^*,{\tau_2}^*,\ldots,{\tau_p}^*)$ [corollaire 1.13]

Exclusion d'au moins une permutation d'ordre 3

Nous présentons les résultats d'énumération connus sur les permutations excluant des motifs dont le plus petit d'entre eux est une permutation d'ordre 3.

Les motifs exclus sont tous des permutations d'ordre 3

- $|S_n(\tau)| = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = c_n$ le $n^{ème}$ nombre de Catalan, $\forall \tau \in S_3$ [62]
- $|S_n(123,132)| = |S_n(132,231)| = 2^{n-1}$ [95]
  $|S_n(132,213)| = 2^{n-1}$ [88]
- $|S_n(123,231)| = 1 + \binom{n}{2}$ [95]
- $|S_n(123,132,213)| = f_n$ le $n^{ème}$ nombre de Fibonacci défini par $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($f_0 = f_1 = 1$) [95]
- $|S_n(123,132,231)| = |S_n(123,231,312)| = |S_n(132,213,231)| = n$ [95]

Deux motifs exclus : deux permutations d'ordre 3 et 4

- $|S_n(123,1432)| = |S_n(123,2143)| = |S_n(123,2413)| = |S_n(132,1234)| = |S_n(132,2134)| = |S_n(132,2314)| = |S_n(132,2341)| = |S_n(132,3241)| = |S_n(132,3412)| = f_{2n-2}$ le $(n-2)^{ème}$ nombre de Fibonacci défini par $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($f_0 = f_1 = 1$) [114]
- $|S_n(123,2431)| = 3.2^{n-1} - \binom{n+1}{2} - 1$ [114]
- $|S_n(123,3412)| = 2^{n+1} - \binom{n+1}{3} - 2n - 1$ [9]
- $|S_n(123,3421)| = \binom{n}{4} + 2\binom{n}{3} + n$ [114]
- $|S_n(123,4231)| = \binom{n}{5} + 2\binom{n}{4} + \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + 1$ [114]
- $|S_n(132,3214)|$ a pour fonction génératrice $\frac{(1-x)^3}{1-4x+5x^2-3x^3}$ [114]
- $|S_n(132,3421)| = 1 + (n-1)2^{n-2}$ [114]
  $|S_n(132,4231)| = 1 + (n-1)2^{n-2}$ [53]
- $|S_n(132,4321)| = \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4} + \binom{n}{2} + 1$ [114]

Trois motifs exclus : une permutation d'ordre 3 et deux d'ordre 4

- $|S_n(123,2143,3214)| = |S_n(213,1234,1243)| = |S_n(132,2341,3241)| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k = p_n$ le $n^{ème}$ nombre de Pell vérifiant $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ ($p_1 = 1, p_2 = 2$) [section 4.1]
- $|S_n(123,1432,3214)|$ a pour fonction génératrice $\frac{1-x}{1-2x-x^3-x^4+x^5}$ [53]

Exclusion d'au moins une permutation d'ordre 4

Nous présentons les résultats d'énumération connus sur les permutations excluant des motifs dont le plus petit d'entre eux est une permutation d'ordre 4.

Un seul motif exclu d'ordre 4

- $|S_n(1234)| = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{n}{k}^2\frac{3k^2+2k+1-n-2kn}{(k+1)^2(k+2)(n-k+1)}$ [42]
  $T(1234) \cong T(1243) \cong T(2143)$ [110]

- $T(3142) \cong T(4132)$ [97]

- $|S_n(1423)| < |S_n(1234)| < |S_n(1324)|, \forall n > 7$ [10]

Deux motifs exclus d'ordre 4

- $|S_n(2413,3142)| = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{n-1-i}c_i$ le $(n-1)^{ème}$ nombre de Schröder [110]
  $|S_n(3124,3214)| = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{n-1-i}c_i$ [45]
  $|S_n(1234,2134)| = |S_n(1324,2134)| = |S_n(1324,2314)| = |S_n(1342,2341)| = |S_n(2134,3124)| = |S_n(2314,3124)| = |S_n(3142,3241)| = |S_n(3412,3421)| = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{n-1-i}c_i$ [section 4.4]

- $|S_n(3412,4231)|$ a pour fonction génératrice $\frac{1-5x+4x^2-2x^3C(x)}{1-6x+8x^2-4x^3} = \frac{x}{1-\frac{2x}{2-C(x)}}$ [54]
  $|S_n(3124,4213)|$ a pour fonction génératrice $\frac{1-5x+4x^2-2x^3C(x)}{1-6x+8x^2-4x^3} = \frac{x}{1-\frac{2x}{2-C(x)}}$ [97]
  où $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ est la fonction génératrice des nombres de Catalan

Quatre motifs exclus d'ordre 4

- $|S_n(1234,1243,1423,4123)| = |S_n(1324,1342,1432,4132)| = |S_n(2134,2143,2413,4213)| = |S_n(2314,2413,3142,3241)| = |S_n(1234,1324,2134,2314)| = |S_n(1234,2134,2314,3124)| = |S_n(1324,2134,2314,3124)| = |S_n(1324,2134,3124,3214)| = |S_n(1324,2314,3124,3214)| = |S_n(1342,2341,3142,3241)| = |S_n(1324,1342,2314,2341)| = |S_n(1342,2341,2431,3241)| = \binom{2n-2}{n-1}$ [section 4.2]

Classes des symétries $(*, c, -1)$ complètes d'ordre 4

- $|S_n(1243,2134,3421,4312)| = 14n, \forall n \geq 6$ [97]

- $|S_n(1324,4231)| = 2 + 2^{n-5}(\frac{n^3-18n^2+59n-138}{3}) + 2^{n-\frac{5}{2}}((1+\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1} - (1-\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1})$ [53]

- $|S_n(1342,1423,2314,2431,3124,3241,4132,4213)| = 2^n - 2, \forall n \geq 5$ [97]

- $|S_n(1432,2341,3214,4123)| = 2.|S_n(123,1432,3214)|\ \forall n \geq 6$ [53]

- $S_n(2143, 3412)$: ensemble des permutations obtenues par mélange d'une sous-suite croissante et d'une sous-suite décroissante [97]

Autres résultats

Nous présentons finalement des résultats sur l'énumération de permutations excluant des motifs dont au moins l'un d'entre eux est une permutation barrée, et ceux portant sur l'énumération des involutions excluant le motif identité.

Permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile

- $|S_n(2341, 3\bar{5}241)| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [119]
- $T(2413, 41\bar{3}52)$ est isomorphe à l'arbre de génération [45, 28] des cartes planaires pointées non séparables ayant $n+1$ arêtes énumérées par $\frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [105]
- $|S_n(3241, \bar{2}4153)| = |S_n(2413, \bar{4}2315)| = |S_n(3142, 45\bar{3}12)| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [45, 27, section 5.1]
- $|S_n(3412, \bar{2}4531)| = \frac{2.(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!}$ [section 5.3]

Nombres de Motzkin

- $|I_n(1234)| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$ [79]
- $|S_n(321, 3\bar{1}42)| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$ [45]
- $|S_n(231, 4\bar{1}32)| = |I_n(3412)| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$ [section 4.3]

Nombres de permutations de Baxter et produit de nombres de Catalan

- $|S_n(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)| = |S_n(21\bar{3}54, 41\bar{3}52)| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{m}.\binom{n+1}{m+1}.\binom{n+1}{m+2}}{\binom{n+1}{1}.\binom{n+1}{2}}$ [15, 108, chapitre 6]
- $|\widehat{S}_n(25\bar{3}14, 41\bar{3}52)| = c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ [18, chapitre 6]

Involutions excluant le motif identité d'ordre au plus 6

- $|I_n(123)| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
- $|I_n(1234)| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} c_i$ [79]
- $|I_n(12345)| = c_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.c_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ [49]
- $|I_n(123456)| = 6 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!(2i+2)!}{(n-2i)!i!(i+1)!(i+2)!(i+3)!}$ [49]

Bibliographie

[1] **D. Arquès**, Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* **39** (1985) 27–42.

[2] **E. Babson** et **J. West**, The permutations $123p_4 \ldots p_l$ and $321p_l \ldots p_4$ are Wilf equivalent, soumis à *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Discrete Mathematics.*

[3] **E. Barcucci**, **A. Del Lungo**, **E. Pergola** et **R. Pinzani**, Towards a methodology for tree enumeration, $7^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Marne-la-Vallée (1995) 53–65.

[4] **G. Baxter**, On fixed points of the composite of commuting functions, *Proceedings of the American Mathematical Society* **15** (1964) 851–855.

[5] **J.S. Beissinger**, Similar constructions for Young tableaux and involutions, and their application to shiftable tableaux, *Discrete Mathematics* **67** (1987) 149–163.

[6] **F. Bergeron**, **L. Favreau** et **D. Krob**, Some conjectures on the enumeration of tableaux of bounded height, pré-publication.

[7] **F. Bergeron**, **G. Labelle** et **P. Leroux**, Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes, *Publication du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique de l'Université du Québec à Montréal* **19** (1994).

[8] **J. Berstel**, Axel Thue's papers on repetitions in words : a translation, *Publication du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique de l'Université du Québec à Montréal* **20** (1994).

[9] **S. Billey**, **W. Jockusch** et **R.P. Stanley**, Some combinatorial properties of Schubert polynomials, *Journal of Algebraic Combinatorics* **2** (1993) 345–374.

[10] **M. Bóna**, Permutations avoiding certain patterns : the case of length 4 and some generalizations, pré-publication.

[11] **W.G. Brown**, Enumeration of non-separable planar maps, *Canadian Journal of Mathematics* **15** (1963) 526–545.

[12] **W.G. Brown** et **W.T. Tutte**, On the enumeration of rooted non separable planar maps, *Canadian Journal of Mathematics* **16** (1964) 572–577.

[13] **E. Catalan**, Note sur une équation aux différences finies, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **3** (1838) 508–516.

[14] **S.J. Chang** et **K.Y. Lin**, Rigourous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **21** (1988) 2635–2642.

[15] **F.R.K. Chung**, **R.L. Graham**, **V.E. Hoggatt** et **M. Kleiman**, The number of Baxter permutations, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **24** (1978) 382–394.

[16] **R. Cori**, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque, Société Mathématique de France* **27** (1975).

[17] **R. Cori**, Bijective census of rooted planar maps : a survey, $5^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Florence (1993) 131–141.

[18] **R. Cori**, **S. Dulucq** et **G. Viennot**, Shuffle of parenthesis systems and Baxter permutations, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **43** (1986) 1–22.

[19] **R. Cori** et **J. Richard**, Enumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives, *Discrete Mathematics* **2** (1972) 115–162.

[20] **M. Delest**, Langages algébriques : à la frontière entre la combinatoire et l'informatique, $6^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Dimacs (1994) 69–78.

[21] **M. Delest** et **X. Viennot**, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theorical Computer Science* **34** (1984) 169–206.

[22] **M. Desainte Catherine** et **G. Viennot**, Enumeration of certain Young tableaux with bounded height, Combinatoire Enumérative, G. Labelle et P. Leroux édition, *Lecture Notes in Mathematics* **1234** (1986), Springer-Verlag, 58–67.

[23] **R. Donaghey**, Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* **22** (1977) 114–121.

[24] **R. Donaghey**, Automorphisms on Catalan trees and bracketings, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* **29** (1980) 75–90.

[25] **R. Donaghey** et **L.W. Shapiro**, Motzkin numbers, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **23** (1977) 291–301.

[26] **S. Dulucq**, Equations avec opérateurs : un outil combinatoire, *Thèse de l'Université Bordeaux I* (1980).

[27] **S. Dulucq**, **S. Gire** et **O. Guibert**, A combinatorial proof of J. West's conjecture, soumis à *Discrete Mathematics*.

[28] **S. Dulucq**, **S. Gire** et **J. West**, Permutations à motifs exclus et cartes planaires non séparables, $5^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Florence (1993) 165–178, à paraître dans *Discrete Mathematics*.

[29] **S. Dulucq** et **O. Guibert**, Mots de piles, tableaux standards et permutations de Baxter, $6^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Dimacs (1994) 119–128, à paraître dans *Discrete Mathematics*.

[30] **S. Dulucq** et **O. Guibert**, Permutations de Baxter, $7^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Marne-la-Vallée (1995) 139–150, soumis à *Discrete Mathematics*.

[31] **S. Dulucq** et **J-G. Penaud**, communication personnelle.

[32] **I. Dutour**, Grammaires d'objets : énumérations, bijections et génération aléatoire, *Thèse de l'Université Bordeaux I* (1996).

[33] **I. Dutour** et **J-M. Fédou**, Grammaires d'objets, *Rapport interne du LaBRI de l'Université Bordeaux I* **963-94** (1994).

[34] **P. Erdös** et **G. Szekeres**, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica* **2** (1935) 463–470.

[35] **K. Eriksson** et **S. Linusson**, Combinatorics of Fulton's ranked essential set, $7^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Marne-la-Vallée (1995) 195–202.

[36] **A. Errera**, Un problème d'énumération, *Mémoires publiées par l'Académie royale de Belgique*, Bruxelles, tome **11** (1931).

[37] **L. Favreau**, Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel, *Thèse de l'Université Bordeaux I* (1991).

[38] **J.S. Frame**, **G. de B. Robinson** et **R.M. Trall**, The hook graphs of the symetric group, *Canadian Journal of Mathematics* **6** (1954) 316–324.

[39] **F. Françon** et **X. Viennot**, Permutations selon les pics, creux, doubles-montées, doubles-descentes, nombres d'Euler et de Genocchi, *Discrete Mathematics* **28** (1979) 21–35.

[40] **D.S. Franzblau** et **D. Zeilberger**, A bijective proof of the hook-length formula, *Journal of Algorithms* **3** (1982) 317–343.

[41] **W. Feller**, An introduction to probability theory and its applications, volume **I**, John Wiley & Sons, New York - London - Sydney (1968).

[42] **I.M. Gessel**, Symmetric functions and P-recursiveness, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **53** (1990) 257–285.

[43] **I.M. Gessel** et **G. Viennot**, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Advances in Mathematics* **58** (1985) 300–321.

[44] **I.M. Gessel** et **G. Viennot**, Determinants, paths, and plane partitions, pré-publication.

[45] **S. Gire**, Arbres, permutations à motifs mxclus et cartes planaires : quelques problèmes algorithmiques et combinatoires, *Thèse de l'Université Bordeaux I* (1993).

[46] **I.P. Goulden** et **J. West**, Raney paths and a combinatorial relationship between rooted nonseparable planar maps and two-stack-sortable permutations, pré-publication.

[47] **D. Gouyou-Beauchamps**, Codages par des mots et des chemins : problèmes combinatoires et algorithmiques, *Thèse d'Etat de l'Université Bordeaux I* (1985).

[48] **D. Gouyou-Beauchamps**, Chemins sous-diagonaux et tableaux de Young, Combinatoire Enumérative, G. Labelle et P. Leroux édition, *Lecture Notes in Mathematics* **1234** (1986), Springer-Verlag, 112–125.

[49] **D. Gouyou-Beauchamps**, Standard Young tableaux of height 4 and 5, *European Journal of Combinatorics* **10** (1989) 69–82.

[50] **D. Gouyou-Beauchamps** et **B. Vauquelin**, Deux propriétés combinatoires des nombres de Schröder, *Revue française d'Automatique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle Informatique Théorique et Applications* **22** (1988) 361–388.

[51] **C. Greene**, An extension of Schensted's theorem, *Advances in Mathematics* **14** (1974) 254–265.

[52] **C. Greene**, **A. Nijenhuis** et **H.S. Wilf**, A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape, *Advances in Mathematics* **31** (1979) 104–109.

[53] **O. Guibert**, Permutations sans sous-séquence interdite, *Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies de l'Université Bordeaux I* (1992).

[54] **M.D. Haiman**, Noncommutative rational power series and algebraic generating functions, *European Journal of Combinatorics* **14** (1993) 335–339.

[55] **P. Hanlon**, Counting interval graphs, *Transactions of the American Mathematical Society* **272** (1982) 383–426.

[56] **S. Hee Choi** et **D. Gouyou-Beauchamps**, Enumération de tableaux de Young semi-standard, $3^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Bordeaux (1991) 229–243.

[57] **T. Hickey** et **J. Cohen**, Uniform random generation of strings in a context-free language, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Computing* **12** (1983) 645–655.

[58] **G. Higman**, Ordering by divisibility in abstract algebras, *Proceedings of the London Mathematical Society* **2** (1952) 326–336.

[59] **A.P. Hillman**, Elementary problems and solutions, *The Fibonacci Quarterly* 4 (1966) 373–378.

[60] **A. Joyal**, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Mathematics* **42** (1981) 1–82.

[61] **D.A. Klarner**, Correspondences between plane trees and binary sequences, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **9** (1970) 401–411.

[62] **D.E. Knuth**, The art of computer programming, volume **1**, Fundamental algorithms, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1973).

[63] **D.E. Knuth**, The art of computer programming, volume **3**, Sorting and searching, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1973).

[64] **C. Krattenthaler**, Bijective proofs of the hook formulas for the number of standard Young tableaux, ordinary and shifted, *The Electronic Journal of Combinatorics* **2** (1995) #R13.

[65] **G. Kreweras**, Sur les éventails de segments, *Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle* **15** (1970) 1–41.

[66] **G. Kreweras**, Sur les partitions non croisées d'un cycle, *Discrete Mathematics* **4** (1972) 333–350.

[67] **J-C. Lalanne**, Une involution sur les chemins de Dyck, $3^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Bordeaux (1991) 263–274.

[68] **S.K. Lando** et **A.K. Zvonkin**, Plane and projective meanders, $3^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Bordeaux (1991) 287–303.

[69] **A. Lascoux** et **M.P. Schützenberger**, Schubert polynomials and the Littlewood-Richardson rule, *Letters in Mathematical Physics* **10** (1985) 505–507.

[70] **A.B. Lehman**, A bijective census of rooted planar maps, Communication à Ontario Mathematical Conference (1970), non publié.

[71] **M. Lothaire**, Combinatorics on words, G.C. Rota édition, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **17**, Addison-Wesley, Reading, MA (1983).

[72] **I.G. MacDonald**, Notes on Schubert polynomials, *Publication du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique de l'Université du Québec à Montréal* **6** (1991).

[73] **P.A. MacMahon**, Combinatory analysis, Chelsea (1960), version originale publiée par Cambridge University Press, London (1915).

[74] **C.L. Mallows**, Baxter permutations rise again, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **27** (1979) 394–396.

[75] **T. Motzkin**, Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products, *Bulletin of the American Mathematical Society* **54** (1948) 352–360.

[76] **R.C. Mullin**, The enumeration of hamiltonian polygons in triangular maps, *Pacific Journal of Mathematics* **16** (1966) 139–145.

[77] **T.V. Narayana**, A partial order and its applications to probability theory, *Sankhya* **21** (1959) 91–98.

[78] **I.M. Pak** et **A.V. Stoyanovskii**, A bijective proof of the hook-length formula and its analogs, *Fonctional Analysis and its Applications* **26** (1992) 216–218.

[79] **A. Regev**, Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams, *Advances in Mathematics* **41** (1981) 115–136.

[80] **J.B. Remmel**, Bijective proofs of formulae for the number of standard Young tableaux, *Linear and Multilinear Algebre* **11** (1982).

[81] **J.B. Remmel** et **R. Whitney**, A bijective proof of the hook formula for the number of column strict tableaux with bounded entries, *European Journal of Combinatorics* **4** (1983) 45–63.

[82] **J. Riordan**, Enumeration of plane trees by branches and endpoints, *Journal of Combinatorial Theory (Series A)* **19** (1975) 214–222.

[83] **G. de B. Robinson**, On the representations of the symmetric group, *American Journal of Mathematics* **60** (1938) 745–760.

[84] **D.G. Rogers**, A Schröder triangle : three combinatorial problems, Combinatorial Mathematics V, C.H.C. Little édition, *Lecture Notes in Mathematics* **622** (1976), Springer-Verlag, 175–196.

[85] **D.G. Rogers**, Ascending sequences in permutations, *Discrete Mathematics* **22** (1978) 35–40.

[86] **D.G. Rogers** et **L.W. Shapiro**, Some correspondences involving the Schröder numbers and relations, Combinatorial Mathematics, D.A. Holton et J. Seberry édition, *Lecture Notes in Mathematics* **686** (1978), Springer-Verlag, 267–274.

[87] **D.G. Rogers** et **L.W. Shapiro**, Deques, trees and lattice paths, Combinatorial Mathematics VIII, K.L. MacAvaney édition, *Lecture Notes in Mathematics* **884** (1981), Springer-Verlag, 293–303.

[88] **D. Rotem**, Stack sortable permutations, *Discrete Mathematics* **33** (1981) 185–196.

[89] **C. Schensted**, Longest increasing and decreasing subsequences, *Canadian Journal of Mathematics* **13** (1961) 179–191.

[90] **E. Schröder**, Vier kombinatorische probleme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **15** (1870) 361–376.

[91] **M.P. Schützenberger**, Certain elementary families of automata, *Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Automata*, Polytechnic Institute of Brooklyn (1962) 139–153.

[92] **M.P. Schützenberger**, Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Mathematica Scandinavica* **12** (1963) 117–128.

[93] **M.P. Schützenberger**, Context-free languages and pushdown automata, *Information and Control* **6** (1963) 246–264.

[94] **L.W. Shapiro** et **A.B. Stephens**, Bootstrap percolation, the Schröder numbers, and the N-kings problem, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Discrete Mathematics* **4** (1991) 275–280.

[95] **R. Simion** et **F.W. Schmidt**, Restricted permutations, *European Journal of Combinatorics* **6** (1985) 383–406.

[96] **N.J.A. Sloane**, A handbook of integer sequences, Academic Press (1973).

[97] **Z.E. Stankova**, Forbidden subsequences, *Discrete Mathematics* **132** (1994) 291–316.

[98] **R.P. Stanley**, Enumerative Combinatorics, volume **I**, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California (1986).

[99] **R.P. Stanley**, Differentiably finite power series, *European Journal of Combinatorics* **1** (1980) 175–188.

[100] **A. Thue**, Über unendliche zeichenreihen, *Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat. Naturv. Klasse, Christiania* **7** (1906) 1–22.

[101] **A. Thue**, Über die gegenseitige lage gleicher teile gewisser zeichenreihen, *Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat. Naturv. Klasse, Christiania* **10** (1912) 1–67.

[102] **W.T. Tutte**, A census of planar triangulations, *Canadian Journal of Mathematics* **14** (1962) 21–38.

[103] **W.T. Tutte**, A census of hamiltonian polygons, *Canadian Journal of Mathematics* **14** (1962) 402–417.

[104] **W.T. Tutte**, A census of slicings, *Canadian Journal of Mathematics* **14** (1962) 708–722.

[105] **W.T. Tutte**, A census of planar maps, *Canadian Journal of Mathematics* **15** (1963) 249–271.

[106] **B.L. Van der Waerden**, Beweis einer Baudet'schen vermutung, *Nieuw Arch. Wisk.* **15** (1927) 212–216.

[107] **G. Viennot**, Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted, Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique, D. Foata édition, *Lecture Notes in Mathematics* **579** (1977), Springer-Verlag, 29–58.

[108] **G. Viennot**, A bijective proof for the number of Baxter permutations, $3^{ème}$ *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Le Klebach (1981) 28–29, également paru sous la forme d'un résumé de l'American Mathematical Society suite à une session spéciale de Combinatoire, Minnéapolis, Novembre 1984.

[109] **X.G. Viennot**, A survey of polyominoes enumeration, $4^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Montréal (1992) 399–420.

[110] **J. West**, Permutations with forbidden subsequences and stack-sortable permutations, PHD-thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (1990).

[111] **J. West**, A catalogue of forbidden subsequence results, pré-publication.

[112] **J. West**, Permutation trees and the Catalan and Schröder numbers, à paraître dans *Discrete Mathematics*.

[113] **J. West**, Sorting twice through a stack, $3^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Bordeaux (1991) 397–406, *Theorical Computer Science* **117** (1993) 303–313.

[114] **J. West**, Generating trees and forbidden subsequences, $6^{ème}$ *conférence Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, Dimacs (1994) 441–450.

[115] **J. West**, Wilf-equivalence for singleton classes, pré-publication.

[116] **A. Young**, The collected papers of Alfred Young, *Mathematical Expositions* **21**, University of Toronto Press.

[117] **D. Zeilberger**, A short hook-lengths bijection inspired by the Greene-Nijenhuis-Wilf proof, *Discrete Mathematics* **51** (1984) 101–108.

[118] **D. Zeilberger**, A holonomic systems approach to special functions identities, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **32** (1990) 321–368.

[119] **D. Zeilberger**, A proof of Julian West's conjecture that the number of two-stack sortable permutations of length n is $2(3n)!/((n+1)!(2n+1)!)$, *Discrete Mathematics* **102** (1992) 85–93.

Résumé

Ces travaux portent sur la Combinatoire des permutations à motifs exclus et de certains mots codant les mouvements de deux piles.

Nous obtenons des formules d'énumération pour plusieurs ensembles de permutations à motifs exclus en utilisant la méthode des arbres de génération avec le concours du logiciel *forbid* que nous avons développé. C'est ainsi que la correspondance que nous donnons entre permutations triables par deux passages consécutifs dans une pile et permutations non séparables (elles-mêmes en bijection avec les cartes planaires pointées non séparables) aboutit sur l'obtention d'une preuve de la conjecture de J. West.

Ensuite, nous établissons une nouvelle bijection entre permutations de Baxter et certains triplets de chemins deux à deux disjoints. Cette correspondance, dans laquelle le caractère alternant des permutations s'interprète naturellement, unifie des travaux antérieurs sur le sujet.

Finalement, nous prouvons combinatoirement trois conjectures sur l'énumération de certains mots de piles en faisant intervenir tableaux de Young standard, permutations de Baxter, permutations non séparables et cartes planaires cubiques pointées non séparables.

Mots clefs

arbres	énumération
bijection	mots
cartes planaires	permutations à motifs exclus
combinatoire	tableaux de Young