

ילדים ומתמטיקה

סיפורו של חוג בית למתמטיקה לילדי גן

אלכסנדר זבונקיין

תרגום: רחל פארן

תוכן עניינים

6	הקדמה למהדורה העברית.....	
7	הקדמה ומספר הערות מאת המחבר.....	
7	יומן הורי.....	
7	למה להעביר חוג? למה צריך יומן?.....	
9	האם צריך לערוך יומנים?.....	
9	מחשבות של טירון על מתמטיקה לגיל הרך.....	
11	דעות.....	
12	סיפורו של חוג הבית שלנו.....	
14	תודות.....	
15	שני דיסקליימרים.....	
16	המפגש הראשון ומחשבות מסביב.....	1
16	איך זה הלך.....	
22	התופעות של פיאז'ה: מציאות או תעתועי ראייה?.....	
25	על התועלת שבקריאת ספרי פסיכולוגיה.....	
28	איך להתייחס לתיאוריות.....	
30	החוג של הבנים – השנה הראשונה.....	2
30	מפגש 21. טבעת מוביוס.....	
31	מפגש 22. מה גדול יותר, השלם או חלקו?.....	
34	מפגש 23. מגדלי האנוי.....	
37	מפגש 24. מעט טופולוגיה.....	
39	מפגש 25. הילד במעלית.....	
40	מפגש 26. חיתוך קבוצות.....	
40	מפגש 27. מרובעים מפסיפס.....	
42	מפגש 28. מתחילים ללמוד את תורת ההסתברות.....	
43	מפגש 29. כשלון חרוץ.....	
45	מפגש 30. מוזגים מים.....	
47	מפגש 31. שוב תורת ההסתברות.....	
48	מפגש 32. תעודות.....	
49	כמה תרגילים נוספים.....	
51	איך מציירים קוביה?.....	
53	ילדים ו- $\binom{5}{2}$: סיפורה של חידה אחת.....	3

53	תרגיל בקומבינטוריקה.....	
54	תרגילים שקולים.....	
56	לסמן.....	
58	הוכחות.....	
60	פיזיקה ולוגיקה.....	
63	החוג של הבנים – השנה השניה.....	4
63	מפגש 33. דמיון.....	
65	מפגש 34. בלי אירועים מיוחדים.....	
65	מפגש 35. כמעט חישובי הסתברויות.....	
67	מפגש 36. משחק בשלוש קוביות.....	
68	מפגש 37. כמה מרובעים?.....	
70	מפגש 38. הכל קורס.....	
71	מפגש 39. ירידה לצורך עליה.....	
71	מסע קצר אל העבר.....	
74	שפת התכנות "ילדון".....	
77	מפגש 40. מפגש ראשון עם הלוחיות של דיינש.....	
78	מפגש 41. אותו דבר: הלוחיות של דיינש והרובוט.....	
79	מפגש 42. פתיתי שלג.....	
80	מפגש 43. על תכונות של חיבור.....	
83	מפגש 44. ריבוע קסם.....	
85	מפגש 45. שרשראות מוכללות.....	
86	מפגש 46. איזומורפיזם של חידות.....	
87	מפגש 47. סוף הסיפור על 52.....	
88	מפגש 48. טענות אמת ושקר.....	
89	תכנות עם דימה.....	
90	מפגש 49. תירוץ לחשוב על סימונים.....	
92	מפגש 50. מפגש היובל.....	
93	מפגש 51. איזה שביל ארוך יותר?.....	
95	מפגש 52. פענוח צופן.....	
96	מפגש 53. אילן יוחסין.....	
97	מפגש 54. סוף שנת הלימודים.....	
99	הפשוט והמסובך: על סימונים, תהליך האבסטרקציה, מתמטיקה ושפה.....	5
99	סימונים למילים.....	

100.....	סימונים "פשוטים".....	
101.....	לכל אדם יש אינטליגנציות מסוגים שונים.....	
104.....	ללמד ילדים מתמטיקה כמו שאנחנו מלמדים אותם לדבר.....	
106.....	החוג של הבנים – השנה השלישית.....	6
106.....	מפגש 55. חידות הגיון.....	
108.....	מפגש 56. קבלן בניין.....	
108.....	מפגש 57. מי יותר ניגצה, הטוד או הגרלוב?.....	
111.....	מפגש 58. תכנית אדריכלית.....	
112.....	הפסקה ארוכה.....	
115.....	מפגש 59. מה השני רואה.....	
117.....	מפגש 60. שיקוף.....	
119.....	מפגש 61. איך סוכמים מספרים בלתי נראים?.....	
121.....	מפגש 62. איזה חדר גדול יותר?.....	
122.....	מפגש 63. סיבתיות מול מקריות.....	
124.....	מפגש 64. שוב נלחמים בסיכויים.....	
126.....	מפגש 65. הומומורפיזם.....	
128.....	מפגש 66. טופולוגיה.....	
129.....	מפגש 67. ארבעה צבעים.....	
129.....	על דא ועל הא: בדיחות, שיחות, חידות.....	
130.....	מתקשקשים.....	
133.....	עוד על מתמטיקה.....	
137.....	החוג של הבנים – חצי השנה האחרונה.....	7
137.....	מפגש 68. תעלומות לוח השנה.....	
139.....	מפגש 69. הרבה שאלות מילוליות.....	
140.....	מפגש 70. עוד תכנות.....	
142.....	מפגש 71. תרגילי בית ספר... טוב, כמעט.....	
144.....	מפגש 72. תתי-תוכנות.....	
145.....	מפגש 73. מספרים אי-זוגיים וריבועיים.....	
147.....	מפגש 74. גיאומטריה של מספרים.....	
148.....	מפגש 75. שבט המאיה.....	
149.....	מפגש 76. לכל דבר יש סוף.....	
150.....	סיכום.....	
152.....	בבית הספר ובבית.....	8

152.....	שיחות על מתמטיקה ומחשבות מצערות על בית הספר	
163.....	על ילדי כיתה א'	
167.....	החוג של הבנות – השנה הראשונה	9
167.....	מבוא	
171.....	מפגש 1. שוב התופעות של פיאז'ה	
175.....	מפגש 2. נסיכים ונסיכות	
176.....	מפגש 3. כמה הבדלים יש?	
178.....	מפגש 4. הרכבה על סמך שרטוט	
179.....	מפגש 5. סידורים אפשריים (תמורות)	
181.....	מפגש 6. מה אתה עושה כשאתה קם בבוקר?	
181.....	מפגש 7. המשחק גובר על המדע	
183.....	מפגש 8. בין שתי מראות	
184.....	מפגש 9. בחצר	
186.....	מפגש 10. מנח של קוביות בשני צבעים	
187.....	מפגש 11. ציוני 5	
188.....	החוג של הבנות – השנה השניה	10
188.....	מפגש 12. משהו לא עובד עם תורת ההסתברות	
189.....	מפגש 13. עוד על חיתוך קבוצות	
191.....	מפגש 14. מגדלי האנוי	
191.....	מפגש 15. מגדלים בגובה זהה	
193.....	מפגש 16. סיבוב ב- 90°	
193.....	מפגש 17. פתיתי שלג	
194.....	מפגש 18. פאות, קודקודים וצלעות של קוביה	
196.....	מפגש 19. הזאב, הכבשה והכרוב	
199.....	מפגש 20. שרשרת עם הבדל אחד	
202.....	אפילוג	11

הקדמה למהדורה העברית

כשהתאומים שלי היו בני כמעט ארבע הם גילו שיש בעולם סוגים שונים של משולשים. הם שיחקו במגנטים, ודיברו על זה שכאן מתאים יותר משולש ש"כל הצדדים שלו אותו דבר", ושם מתאים יותר משולש ש"שני צדדים שלו אותו דבר והצד השלישי לא אותו דבר". סיפרתי להם שלראשון קוראים משולש שווה צלעות ולשני משולש שווה שוקיים. במהלך הימים הבאים זיהינו משולשים שונים בעולם שסביבנו, גילינו שקיימים סוגים שונים של משולשים שווי שוקיים (כאלה שבהם הצלע השלישית ארוכה יותר מהשוקיים וכאלה שבהם היא קצרה יותר), ושאלתי את עצמי מה הלאה.

ידעתי שאני רוצה שהם יכירו עוד נושאים מתמטיים. הם היו, ועדיין, ילדים חכמים שאוהבים משחקי חשיבה, אבל רציתי משהו מעבר. לא ידעתי מה בדיוק, ובעיקר לא ידעתי איך.

הייתי עוזרת הוראה באוניברסיטה ומרצה במכללה, נתתי שיעורים פרטיים; ידעתי איך מעבירים חומר, וידעתי שלא זו הצורה שבה הייתי רוצה להכיר להם את המתמטיקה. רציתי שההיכרות תהיה חווייתית, ורציתי לפתח את החשיבה שלהם יותר משרציתי שהם ילמדו חומר כזה או אחר.

כך הגעתי לספר של זבונקין, שהתאים בדיוק למה שחיפשתי: לגישתו, החומר המתמטי הוא האמצעי; המטרה היא עצם המפגש עם החומר וההזדמנות לחשוב. כשהילד טועה, הוא לא נוטה להסביר לו מה התשובה הנכונה; במקום זה, הוא מתקיל אותו, מפגיש אותו עם סתירות, מאפשר לו להתמודד איתן – והמתמטיקה הופכת למעשה לכלי שבעזרתו הילד לומד לשאול שאלות, לחפש את האמת, להיות סקרן.

אשאר לזבונקין את הבמה להרחיב לגבי הגישה שלו ולנמק אותה; אציין רק שהיא ייחודית בעיני, ושרציתי להנגיש אותה לקהל קוראי העברית. כך נולד התרגום שלפניכם.

הספר עשוי להתאים לכל מי שמתעניין בפיתוח חשיבה מתמטית של ילדים בגיל הרך – הורים, אנשי חינוך פורמלי ובלתי-פורמלי, וכל מי שהנושא קרוב לליבו. בחלקים מהספר נדרשת אוריינטציה מתמטית מסוימת, אך רובו מתאים גם למי שאין לו רקע מתמטי.

הערה לסיום. רוב הספר נכתב בברית המועצות בשנות ה-80. כבת לעולי ברית המועצות, הרגשתי בנוח עם העולם שבו הספר נכתב – הן ברמת הפרטים הטכניים והן ברמת הסגנון. בעת כתיבת התרגום, השתדלתי לאזן בין הנאמנות לתוכן הספר לבין השמירה על הזרימה של הטקסט. הדילמות נגעו הן להיבטים טכניים והן לתכניים. האם לשנות שמות? דימה הוא שם שנשמע טבעי יחסית לאוזן הישראלית שכבר פגשה עולה או שניים, אבל מה לגבי העובדה שז'נייה הוא גם שם של בן (קיצור של יבגני) וגם של בת (קיצור של יבגניה), ובספר יש משניהם? האם הקורא הממוצע יודע מהי דאצ'ה? אם לא, האם להוסיף הבהרה או להשמיט את ההתייחסות לדאצ'ה ולכתוב שהם היו בחופשה? מה לגבי הנובי גוד? והעיקר: מה לגבי ביטויים, שלא לומר דינמיקות, שמתפרשים באופן שונה בתרבויות הישראלית והרוסית? למשל, מה לגבי העובדה שלא כל דבר שנשמע חצוף לאוזן הרוסית מתפרש כך גם באוזן הישראלית? האם לעשות אדפטציות תרבותיות לתגובות, לסיטואציות וליחסים המתוארים בספר? עד כמה אפשר בכלל לתרגם תרבות, לצקת את היחסים בין גיבורי הספר למילים מקבילות מעולם מקביל? השתדלתי, כמתבקש, לבחור בדרך האמצע: ליצור תרגום נגיש וזורם מחד, אך כזה שמאפשר הצצה לעולמם של יוצאי ברית המועצות מאידך. אני מאחלת לקוראים שיהנו מקריאת הספר הזה כמו שאני נהניתי מקריאת המקור.

רחל פארן, תשפ"ב, 2022.

לתגובות: minkovr@gmail.com

הקדמה ומספר הערות

יומן הורי

בין שאר הז'אנרים הפחות-או-יותר-ספרותיים תוכלו למצוא גם את היומן ההורי. הילדים גדלים, עוברים כל מיני דברים, וההורים רושמים הכל במחברת. אחרי הרבה שנים, המחברת הזו מתגלה כחומר קריאה מרתק. במיוחד עבור ההורים עצמם, כמובן. הרי היא עוסקת בילדים שלהם, ועוד כשהיו בגיל כל כך מקסים. בעקיפין, היא עוסקת גם בצעירותם של ההורים עצמם.

האם יצא לכם, קוראים יקרים, להתבונן בתמונות של ילדים של אנשים אחרים? אתם מתארחים אצל חברים, והם שולפים ערימה של אלבומים. התחלנו... אחרי שלושה-ארבעה עמודים אתם כבר בקושי מחנניקים פיהוק, בעוד שהם מוכנים להמשיך עם זה עד אין קץ. כל מה שקשור לילדים ולנכדים שלהם נראה להם פשוט מרתק; אתם, בינתיים, מצליחים לחשוב רק על דבר אחד: כמה שכל התינוקות דומים זה לזה.

גם אני חווה עכשיו, כשאני "מציג את הספר הזה לשיפוטם של הקוראים", רגשות מעורבים. הייתי רוצה, אבל אני לא יכול, להכנס לנעליו של המתבונן מהצד. אשתי, אלה ירחו, היא מבקרת מאד קשוחה. אבל בכל פעם שהיא קוראת את הטקסט הזה, היא לא מסוגלת להתנתק. הגישה האירונית שאנחנו כל כך רגילים אליה מפנה את מקומה לרגשות אחרים לגמרי.

הספר הזה עוסק בילדים שלנו. יש לנו שניים: בן בשם דימה ובת בשם ג'ני. הוא מספר על הילדות שלהם, וכמובן גם של החברים שלהם, שכן הם לא חיו על אי בודד. אם כי, כמובן שהיינו קשובים לילדים שלנו הרבה יותר מאשר לילדים אחרים.

אני מוצא את עצמי מתלבט בשאלה קשה: מה בספר הזה יעניין את הקוראים? למה שהספר הזה יעניין גם אנשים זרים, ולא רק את המשפחה שלנו?

מבחינתי, התשובה היא כזו: הספר הזה הוא לא "סתם יומן", אלא יומן של חוג-בית למתמטיקה. כשילדימה מלאו 3 שנים ועשרה חודשים, כינסתי ארבעה ילדים בגיל קרוב לשלו או מעט יותר בוגרים, חברים שלו מהשכונה, והתחלתי להעביר להם חוג בית למתמטיקה. הספר הזה עוסק בחוויה הזו. אם תרצו, אפשר להתייחס לספר הזה גם כאל ספר חידות במתמטיקה לילדי גן. בשונה מספר חידות רגיל, אני מספר כאן גם על האופן שבו הילדים הגיבו לחידות, מה הם הבינו, מה לא, ואילו קשיים צצו בדרך. אני חושב שאם מישהו היה כותב אוסף של חידות בסיסיות בגיאומטריה או באלגברה, והיה הופך כל חידה לסיפור חי על איך הוא ותלמידיו התמודדו עם החידה – ובכן, נראה לי שספר כזה היה יכול לעניין אותי כקורא. כשמדובר בילדים בגיל הרך, זה עוד יותר מעניין. כל המהלכים המחשבתיים גלויים הרבה יותר. כשהתחלתי להעביר את החוג, לא שיערתי עד כמה מרתק זה יהיה. יצא שבמשך כמה וכמה שנים קראתי בעיקר ספרי הוראה ופסיכולוגיה, בתחילת הדרך, ובהמשך גם ספרי בלשנות, פסיכיאטריה, התנהגות של בעלי חיים, גנטיקה של ההתנהגות... גיליתי עולם חדש, העולם הפנימי שלי נהיה עשיר יותר, אני מקווה שגם החכמתי, וכל זה בזכות הילדים שלי.

אגב, מתמטיקה לילדים בגיל הרך היא פשוטה הרבה יותר מזו שלומדים בבית הספר – היא נגישה לכל קורא, ולא רק לאנשי המקצוע. זה מרחיב מאד את קהל היעד הפוטנציאלי של הספר. נראה לי ששכנעתי את עצמי שהספר הזה מעניין לא רק אותי. עכשיו אני יכול להמליץ עליו לקוראים בלב שלם. (אציין שהרבה חברים שקראו את הגרסה הראשונה של היומן הזה, עוד בכתב יד, עודדו אותי להוציא אותו לאור כספר. הרבה עותקים של כתב היד ההוא הסתובבו במוסקבה, ובהמשך גם בעולם. העניין ביומן הזה לא פוחת כבר עשרים שנה, ובעיני זה עוד טיעון בעד ההוצאה לאור).

למה להעביר חוג? למה צריך יומן?

חוג, כמו כל צורת לימוד שיטתית אחרת, הוא מסגרת שדורשת משמעת עצמית. לכאורה, היה אפשר ללמד ילדים גם בלי חוג. לזרוק להם מדי פעם שאלות, חידות, לדון איתם במשהו. אבל בחיים האמיתיים

זה לא כל כך עובד, וכל הפרוייקט הופך די מהר לאוטופיה. אתמול לא היה זמן, היום אין מצב-רוח, או שכולם עייפים... ובכלל – למה דווקא עכשיו? יש זמן, נגיע לזה. מתישהו בימים הקרובים... ובשורה התחתונה, לא קורה כלום.

לעומת זאת, אם אתם יודעים שמחר בשעה 11 יבואו אליכם ארבעה ילדים, ואתם צריכים לשעשע אותם לפחות חצי שעה, זה כבר משהו אחר. תרצו או לא, אתם צריכים לשבת להמציא משהו. אם אתם לא מצליחים להמציא משהו בעצמכם, אתם צריכים לנסות לשאוב רעיונות מספרים. וכשחושבים על משהו בהתמדה, במוקדם או במאוחר באים לראש רעיונות חדשים לגמרי, שלא היו מופיעים אם הנסיבות לא היו לוחצות.

או, נניח, יש לכם רעיון, אבל הוא דורש הכנת חומרים: צריך לגזור משהו, או לצייר, או להדביק... בשביל להניע את עצמך למאמץ כזה, דרושה מסגרת קצת יותר קשיחה מאשר סתם רעיון לחידה נחמדה שעלה לך בראש.

ילדים, אגב, אוהבים טקסים. כשמבוגרים מפריעים להם סתם כך באמצע משחק ומטרידים אותם עם כל מיני חידות, זה עשוי לגרום לאנטגוניזם קל ולנסיון להיפטר כמה שיותר מהר מהמכשול המציק. לעומת זאת, כשנפגשים פעם בשבוע, בזמן מוגדר, בשביל לשבת ולעסוק במשהו רציני – זה משהו אחר. זו, בקצרה, התשובה שלי לשאלה הראשונה: למה להעביר חוג?

באשר ליומן, האמת היא שבהתחלה לא ניהלתי שום יומן, ובכלל לא ייחסתי חשיבות רבה מדי למפגשים שלנו. הקוראים יגלו שהיומן מתחיל רק במפגש ה-21. עשרים השבועות הראשונים הם בכלל לא חמישה חודשים, כפי שהיה ניתן לחשוב; הם נפרשו על פני עשרה חודשים שלמים, שכללו את חופשת קיץ, ועוד ביטולים שונים. אמנם החלטנו לקיים מפגש אחד בשבוע, אבל לא תמיד עמדנו בהחלטה הזו.

ואז קרה הדבר הבא: בערך חצי שנה אחרי תחילת החוג שלנו, כמה חברים שלי ביקשו שאספר להם מה אנחנו לומדים, ואיך. פתחתי את הפה... ובמקום שיצא ממני שטף של חידות ורעיונות, לא הצלחתי להוציא מילה. התברר ששכחתי הכל! טוב, לא הכל כמוכן, אבל קרוב לזה. זכרתי מצוין את ההתלהבות הכללית ואת האנרגטיות של הילדים, שתמיד ליוותה את המפגשים שלנו. אבל את האופן שבו היא באה לידי ביטוי בשטח שכחתי. מספרים משהו דומה על נכים שאיבדו רגל: התחושה שהרגל שם נשאה, אבל הרגל איננה.

לא ציפיתי שהזכרון שלי יבגוד בי ככה; הייתי מאוכזב ונבוך. אחרי השיחה ההיא כתבתי את מה שעוד איכשהו זכרתי, והחלטתי לתעד את המפגשים הבאים. שתהיה לי לפחות איזו רשימת חידות, ובהסתמך עליהן אזכר גם בכל השאר. מעניין לציין שכבר אז חשבתי על "כל השאר"; כנראה שכבר חשתי, אינטואיטיבית, בחסרון שיש ב"רשימת חידות".

מהר מאד גיליתי את "התגלית התיאורטית" הראשונה שלי בתחום הפדגוגי. גיליתי (הבנתי, הרגשתי?) שאין ממש טעם בתייעוד של החידות עצמן. מה שבאמת מעניין הוא בכלל לא התנאים של השאלות ולא הפתרון שלהן, אלא התהליך, הדרך שמובילה מהאחד לשני. כמו שאתם מתארים לעצמכם, החידות שאפשר לחוד לילד בגיל הרך הן די פשוטות (החלק המסובך היחיד הוא להמציא אותן). מצד שני, הדרך מהחידה לפתרון יכולה לקחת גם כמה שנים. כן-כן, כמה שנים, אל תתפלאו: אתם עוד תראו שפע של דוגמאות לכך. במשך כל הזמן הזה, החשיבה של הילד לא יִשְׁנָה. היא מבעבעת, היא מתרוצצת סביב כל מה שתופס את תשומת הלב שלו, כולל החידות שלי. הדיאלוג שלנו הוא החלק הכי מעניין! כך, לאט לאט, "רשימת החידות" שלי התחילה לצבור יותר ויותר הערות, סיפורים, בדיחות, נושאים לא-מתמטיים, כל מיני דיונים כלליים ותיאוריות, וכך בהדרגה נוצר היומן הזה.

אחר כך הגיע השלב הבא: בין החוג ליומן נוצר קשר בכיוון ההפוך. כשאתה רושם את מה שראית וחשבת, נוצרות מאליהן מחשבות חדשות, תפניות בעלילה, נולדות חידות חדשות ונושאים חדשים למפגשים. ההבנה נהיית עמוקה יותר. אפילו טביעת העין נהיית חדה יותר. לפעמים אתה נזכר במשהו שקרה בחוג ושלא שמת לב אליו בזמן אמת, והיית שוכח ממנו אלמלא היית רושם. כך נוצרה סימביוזה מסויימת בין החוג לבין היומן, כשכבר קשה לדמיין אחד בלי השני.

עוד נקודה אחת לסיום. עבר זמן, הילדים גדלו, וקראו את היומן שלי. התברר שיש הרבה דברים שהם זוכרים, והאופן שבו הם תפסו אותם הרבה פעמים שונה ואפילו הפוך מהאופן שבו אני תפסתי. לבקשתי, הם הוסיפו לטקסט הערות משלהם. כך נוצר מימד נוסף, שהפך את כל הפרוייקט לדיאלוגי יותר; כמו שאמר מכר שלי, נוצר אפקט סטריאוסקופי.

האם צריך לערוך יומנים?

לדעתי, חד משמעית כן. בזמנו אנשים היו כותבים ביומנים: "דפים אלה לעולם לא ידעו בושה", דהיינו, לעולם לא ירדו לדפוס. לרוב היה מדובר בתקווה סמויה שהצאצאים הנרגשים ומלאי הכרת הטוב שלהם ימצאו את הטיוטות, יתלהבו מהפגנות (הרי הם כתבו רק לעצמם!), יפרסמו את היומן, וכך הם יזכו לתהילת עולם. קל לזהות מקרים כאלה – המחבר כל הזמן מבהיר דברים שאמורים להיות ברורים לו, מוסיף הערות שהקורא זקוק להן והמחבר עצמו לא.

כשאתה כותב יומן עבור עצמך, ואחר כך מישהו אחר קורא אותו, עלולים להיווצר עיוותים. תארו לעצמכם, למשל, שיש מישהו שאני מאד מעריך, אפילו כמעט מעריך, ועם זאת אני מודע לחסרונות הקטנים שלו, לכל מיני תכונות אופי משעשעות. ביומן שנכתב לעצמי אני יכול לצחוק על האיש הזה; אני יכול אפילו להביע פה ושם סלידה ממנו. אני לא צריך להזכיר לעצמי את היחס האמיתי שלי כלפיו ("אבל אל תראה את זה ככה, אני מאד מעריך אותו...") – מי לא יראה את זה ככה? אם הטקסט הזה יגיע לעיניו של קורא מבחוץ, הרושם שיתקבל יהיה רחוק מאד מהמציאות: הקורא לא ידע כלום על ההערכה שלי לאותו אדם, וישארו רק הלעג והסרקזם.

או, ניקח דוגמה אחרת, קרובה יותר לענייננו. לכאורה אני כותב על ילדים, אבל האמת היא שלא ממש. האמת היא שאני כותב רק על היבט אחד בחיים שלהם – על היחסים שלהם עם המתמטיקה, ואי אפשר לסכם ילד דרך הפריזמה הזו. למעשה, אני מסכם בממוצע חצי שעה מתוך שבועיים בחיים שלו. יש לו גם מוקדי עניין אחרים, ובעיות אחרות, וכשרונות אחרים. אפילו כשאני קורא את הספר הזה, אני נוטה לשכוח מזה, אז מה יש לדבר על קורא שמעולם אפילו לא פגש את הילדים האלה. (אני עוד אחזור לנושא הזה בהקדמה לפרק 9, אבל רק בהקשר של ג'ני). וזה עוד בלי להתייחס לזה שהילדים כבר גדלו מזמן ועכשיו הם בני 25-30. עוד מעט הילדים שלהם כבר יוכלו לקרוא עליהם. מה שפעם עוד איכשהו יכול היה להחשב לתיעודי, נהיה עם הזמן יותר ויותר אמנותי, כאילו נכתב על אנשים אחרים.

אני לא יכול לומר שהיומן הזה היה איזה מסמך אינטימי. הוא היה יותר מסמך טכני. כתבתי אותו בשביל עצמי, אבל מעולם לא תכננתי לשמור אותו בסוד, והראיתי אותו ברצון למי שהתעניין בו. וגם האופי הטכני הזה טומן בחובו בעיות. הרי אני לא אסביר לעצמי מה זה מגדלי האנוני או החידה על הזאב, הכבשה והכרוב. מה עוד שבמקור היו ביומן אינספור כפילויות, חלקים לא ברורים, רישומים שדרשו פענוח... (חלק מהכפילויות השארתי; במיוחד אלו שבהן אותן הנחות מובילות למסקנות שונות לחלוטין. כך זה יותר "אותנטי").

בקיצור, יש שפע של שיקולים, חלקם אתיים, חלקם טכניים, שבגללם החומר שכתבתי היה זקוק לעריכה רצינית. לכן תמיד הסתייגתי משלל ההצעות לפרסם את היומן "כפי שהוא".

אז למה לקח לי כל כך הרבה זמן לערוך אותו? למה משכתי את זה כל כך הרבה שנים?
נו, מה יש להסביר פה. החיים הם מה שהם. כל פעם צץ משהו.
נדמה לי שהגיע הזמן להפסיק ללכת סחור סחור, ולעבור לעניין עצמו.

מחשבות של טירון על מתמטיקה לגיל הרך

מתי זה מתחיל?

כל אחד מאיתנו צפה בסיטואציות כאלו אינספור פעמים: אם מסתירה את פניה, ואז מציצה בחיוך ואומרת "קו-קו!". ושוב מסתירה. בכל פעם שהיא מציצה, התינוק צוחק בהתלהבות. שניהם מאושרים. ושניהם אפילו לא חושדים שהם עוסקים במתמטיקה.

אני כותב את המשפט הזה לא כדי להמם את הקוראים או כדי ללכוד את תשומת לבם בעזרת איזה פרדוקס מגוחך. אני רציני לחלוטין. כשקוראים ספרי פסיכולוגיה, מגלים שהמשימה האינטלקטואלית העיקרית של תינוק עד גיל שנה וחצי היא לגלות את חוק שימור קיומם של האובייקטים. כלומר, לגלות שחפצים לא נעלמים כשאנחנו מפסיקים לראות אותם, אלא ממשיכים להיות קיימים איפה שהם היו, רק בלעדנו. מסתבר שכשאמא, שהיא אובייקט חשוב מאד, נעלמת מאחורי ידיים, היא עדיין ממשיכה להיות איפשהו בסביבה, ואז היא פתאום מופיעה שוב.

הילד גדל, וההבנה שלו את העולם גדלה ביחד איתו. ילדה קטנטונת משחקת במשחק מרתק: היא אוספת קוביות שפזורות על הרצפה, קוביה אחר קוביה, ומושיטה כל קוביה לאביה: "קח!". הוא לוקח את הקוביות והיא מאושרת. היא למדה את המילה "קח" ממש לאחרונה, ומשתמשת בה בכל הזדמנות אפשרית. לפתע היא מרימה שתי קוביות ביחד. היא מתלבטת כמה רגעים, ואז – אאוריקה! – היא מושיטה לאבא שלה את שתי הקוביות וקוראת בקול, "קח-קח!". מתבקש לצטט פה את פושקין: לעקוב אחרי מחשבות של בן אדם קטן זה המדע הכי משעשע.

עד גיל שנתיים, הילד כבר מספיק ללמוד המון. ילד בן שנתיים מעיר את אבא שלו:
– אבא, אתה ישן?

– לא, מה פתאום – עונה אבא, משפשף את עיניו. – אני במטבח, שותה תה.

הבן מופתע: זה סותר את מה שהוא כבר יודע על העולם. ליתר בטחון, הוא רץ למטבח לבדוק. הוא חוזר משם ומכריז כמנצח:

– אתה לא במטבח! אתה פה!

בפעם הבאה כבר אי אפשר לעבוד עליו. אבל אני רוצה להדגיש את הרגע הזה של האוטודידקטיות, שבו הוא רץ לבדוק במטבח ליתר בטחון. כולנו מרגישים, אינטואיטיבית, שזו תכונה ילדית חשובה מאד, ושכדאי לשמור עליה.

סופרים ביפנית

תוך זמן יחסית מועט, הילד יתחיל "ללמוד מתמטיקה" באופן רשמי. בפועל, המשמעות היא בדרך כלל שילמדו אותו לספור. אין ספק שהיכולת לספור היא חשובה ומועילה. אבל לנו, המבוגרים, לעתים קשה מאד להבין מה המשמעות של היכולת הזו.

בואו נכנס לנעליים של הילד וננסה ללמוד חשבון... ביפנית! ובכן, הרי לכם עשרת המספרים הראשונים: איטי, ני, סן, סי, גו, רוקו, סיטי, חטי, קיו, ג'ו. המשימה הראשונה: ללמוד את הסדרה הזו בעל פה. אתם תראו שזה לא כל כך פשוט. כשתצליחו, תוכלו לעבור למשימה הבאה: ללמוד לספור הפוך, מג'ו לאיטי. אם אתם מצליחים לעשות גם את זה, בואו נתחיל לחשב. כמה זה דוקו ועוד סן? כמה זה סיטי פחות גו? כמה זה חטי חלקי סי? עכשיו בואו ננסה לפתור חידה. אמא קנתה בשוק קן תפוחים ונתנה ני תפוחים לכל אחד מסי ילדיה. כמה תפוחים נשארו לה? כשאתם פותרים את כל זה, אל תתרגמו לעברית, אפילו לא בראש. שימו לב שתרגום כזה יכול לצוץ לכם בראש אפילו בניגוד לרצונכם, ולפעמים אפילו בלי שתשימו לב.

התחלתי להעריך את ההישג האינטלקטואלי שילדים עושים בשנות היסודי הראשונות רק בשלב מאוחר יותר, כשהגעתי לצרפת. גם היום, אחרי יותר מעשור של מגורים בצרפת, אני עדיין מתקשה קצת עם ספירה בצרפתית. הסיבה היא שבתחום המספרים 70-99, צרפתים סופרים אחרת מאיתנו. אחרי ששים ותשע מגיע ששים ועשר (כלומר 70), ששים ואחת-עשרה (71), ששים ושתיים-עשרה (72) וכן הלאה, עד ששים ותשע-עשרה (79); אחר כך מופיע ארבע-עשרים (80), ארבע-עשרים ואחת (81), ארבע-עשרים ושתיים (82), וכן הלאה עד ארבע-עשרים ותשע (89) – ואז שוב, כמו קודם, ארבע-עשרים ועשר (90), ארבע-עשרים ואחת עשרה (91), ארבע-עשרים ושתיים עשרה (92), וכן הלאה עד ארבע-עשרים ותשע עשרה (99), ואז, סוף כל סוף, מאה. כשמכתיבים לי ממש מהר מספר טלפון, או כשאומרים לי את שנת הלידה או הפטירה של מישהו מפורסם, אני לא תמיד מצליח לתפוס את המספר משמיעה. טוב שאני לא צריך לחבר ולחסר את כל זה.

(זה המקור, אגב, לציטוט מוכר מספרי הוראה, על הילד הצרפתי שנשאל "כמה זה עשרים כפול ארבע?" וענה "זה ארבע-עשרים, כי כפל הוא קומוטיבי").
 ובכן, למדתם סוף סוף לספור באופן שוטף עד 7/8. כמה זמן זה לקח לכם? שבוע? חודש? הבעיה פה היא לא רק בעיית זכרון מכנית: אם זה היה רק עניין של זכרון, כל הסיפור היה לוקח לכם חצי שעה. אבל אם זה לא עניין של זכרון, אז עניין של מה זה? האם אתם יכולים לבודד מהנסיון שלכם קשיים מהותיים, מתמטיים לחלוטין, בספירה עד עשר, אבל כאלה שנשארים בלתי-מורגשים, איפשהו מאחורי הקלעים? לא כל כך פשוט, נכון?
 אולי זה לטובה. אחרת חסידי הלמידה המוקדמת היו ממהרים להסביר לפעוט את מה שהוא עוד לא מסוגל להבין, בנסיון לגרוור אותו כמה שיותר מהר לשלב הבא.
 והרי הוא יכול היה להגיע לשם גם בכוחות עצמו...

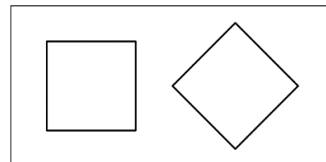
גיאומטריה של גן

הנושא השני שמככב באופן מסורתי בתכנים מתמטיים לגיל הרך הוא גיאומטריה. הנוהל הוא שצריך לספר לילדים אוסף מסויים, צנוע למדי, של עובדות שנוגעות לצורות גיאומטריות: מה זה משולש, ריבוע, עיגול, פינה, ישר, קטע, וללמד אותם כמה שיטות מדידה פשוטות. אבל בואו נחשוב על זה רגע לעומק: אם הילד מבחין בקלות בין מזלג לכף, למה קשה לו להבחין בין ריבוע למשולש? טוב, באמת לא קשה לו. מה שהוא באמת מתקשה בו זה הבנת היחסים הלוגיים בין המושגים והפעולות שאפשר לבצע על צורות.

הרבה ילדי כיתה א', למשל, חושבים שאם מציירים ריבוע שעומד על פינתו (איור 1), אז הוא מפסיק להיות ריבוע והופך למרובע. והשאלה האם יש יותר ריבועים או מרובעים היא בכלל שאלה שדורשת לוגיקה מתקדמת.

אם מסתכלים על זה מנקודת המבט הזו, אז משולשים וריבועים מיד מאבדים את הבכורה: חידות על מזלגות וכפות הן לא פחות מתמטיות, אם יש על מה לחשוב בהן. ננסח את הרעיון בדרך אחרת. מתמטיקה בית-ספרית עוסקת ב"מספרים וצורות", וזה טוב. אבל לילד בגיל הרך אנחנו יכולים לדווח מעט מאד עובדות על האובייקטים האלה. היינו עלולים להסיק מזה שאין שום התפתחות מתמטית בגיל הרך, אבל האמת היא אחרת. יש בלי סוף חומר, אבל צריך לגשת לעניין נכון, ובזהירות. ובכן, מהי הגישה הנכונה? בנושא הזה מספר הדעות הוא כמספר האנשים. להלן, אציג חלק מהן (בהגזמה קלה, אבל רק בשביל להביע את הרעיון באופן ברור יותר).

איור 1. הצורה השמאלית היא ריבוע. מה לגבי הצורה הימנית?
 הרבה ילדים חושבים שכשמסובבים ריבוע, הוא מפסיק להיות ריבוע והופך למרובע.



דעות

1. "בעידן המודרני, הדרישות למוכנות מתמטית של בוגרי גן גבוהות לאין שיעור" – אח, כמה מתישות "הדרישות למוכנות" האלו. לברוח.
2. "אתם יודעים שזה מסוכן להעמיס יותר מדי על המוח של הילד עם דברים מסובכים? האינטגרלים וכל זה" – אלהים ישמור, מי דיבר על אינטגרלים?
3. "אתם קולטים שהילדים לומדים אצלו תורת ההסתברות? מבוגרים עם השכלה אקדמאית לא מסתדרים עם זה, והילדים קולטים כל כך בקלות. תמיד טענתי שלמוח שלנו יש יכולות מדהימות שאנחנו לא מכירים, במיוחד בגיל הרך" – טעות בידך: אנחנו לא לומדים שום תורת הסתברות, למרות שאנחנו כן בוחנים תופעות הסתברותיות מסוימות.
4. "בגיל הרך לילדים יש זכרון יוצא מן הכלל, וכשרון מדהים לקלוט מידע חדש. בנוסף, בגיל הזה ילדים נוטים לשמוע בקול המבוגרים. לכן בגיל הזה כדאי להכניס להם כמה שיותר מידע.

בהמשך, כשהם יאמצו נקודת מבט ביקורתית יותר על העולם וכבר לא ירצו לעסוק בדברים שהם לא רואים בהם טעם, צריך לתת להם יותר זמן לחשיבה, ולתת יותר דגש על המוטיבציה של החומר הנלמד" – את נקודת המבט הזו קראתי במאמר מעניין. הוגה הגישה הוא פרופסור מומחה לניורופיזיולוגיה. מכיוון שאיני נוקב בשמו, אני מרשה לעצמי להגיד באופן ישיר מה אני חושב על זה: אלו שטויות במיץ שלא ראויות להתייחסות.

5. "אני לא מבין למה לדחוף לילדים את השטויות האלו! למה לגזול מהם את הילדות הנורמלית?" – הטיעון הזה מעלה שתי שאלות: אחת לגבי השטויות, והשנייה לגבי הילדות. לגבי השטויות אני לא אתווכח; בסופו של דבר, זה עניין של טעם. אני למדתי עם הילדים דברים שאני עצמי אוהב, וההיבט הזה חשוב מאד בעיני.

כשהתחילו להתפרסם מאמרים שלי, מצאתי את עצמי להפתעתי בעמדת היועץ, שאינה טבעית לי. כל מיני הורים כתבו לי מכתבים. אמא אחת תיארה את המצב בבהירות רבה: "מאז שהייתי ילדה, שנאתי מתמטיקה. אבל אני יודעת שזה ממש חשוב להתפתחות של הילד. תיעץ לי בבקשה איך ללמד את הבן שלי מתמטיקה". למרבה המזל, במקרה הזה ידעתי מה לענות לה. כתבתי לה פחות או יותר את הדברים הבאים: בשום אופן אל תלמדי את הבן שלך מתמטיקה אם את לא אוהבת אותה. תלמדי אותו רק דברים שאת נהנית מהם; רק אז שניכם תהנו מהלמידה המשותפת. זה יכול להיות כל דבר. למשל, אם את אוהבת לאפות עוגות, תאפי אותן עם הבן שלך... אני רק מקווה שהאמא היא לא נעלבה, לא חשבה שאני טוען שמתמטיקה היא מעבר ליכולותיה.

לגבי "הילדות הנורמלית" – פה אני חולק, והייתי רוצה להגן על העמדה שלי. דמיינו את הסיטואציה הבאה. אנחנו יושבים על חוף הים, וצופים בצרעה שחופרת מחילה קטנה בחול. היא תסיים את העבודה, אחר כך תביא לשם מספיק אוכל בשביל הצאצאים שלה (למשל, עכבישים שהיא שיתקה), ותטיל לתוכו את הביצים שלה. הביולוג הנודע ניקולס טינברגן, המומחה להתנהגות של בעלי חיים, הראה שצרעה מתמצאת בשטח לפי החפצים שיש בו. אפשר לשים, למשל, סנדל בצד אחד של הקן, צדף בצד השני, וכשהצרעה עפה משם להזיז אותם מטר הצידה. כעבור שתי דקות הצרעה חוזרת, ומתיישבת – בדיוק כמו שחזה טינברגן – לא ליד הקן, אלא מטר משם, בין הסנדל לצדף. הילדים שלנו צופים בניסוי הזה בהתלהבות רבה, ואיתם גם מי שבמקרה נמצא בסביבתנו על החוף. (אגב, פרט מעניין: אף אחד מהם לא העלה על דעתו להרוג את הצרעה הזו). אז אני שואל אתכם: האם האירוע הזה נכנס תחת ההגדרה שלכם לילדות נורמלית? הרי אלה בדיוק הניסויים שעליהם טינברגן קיבל בזמנו פרס נובל לביולוגיה. אז גם על זה היה אפשר לכתוב אלהים-יודע-מה – אולי משהו על ילדי פלא שעושים ניסוי-נובל.

אם יש משהו שלימדתי את הילדים, זה להתעניין בעולם שסביבם. אני זוכר משפט שאמר לי חבר, המתמטיקאי והמורה הדגול אנדריי לאונוביץ' טואום. אני מביא אותו פה לא כמחמאה לעצמי, אלא כניסוח מצוין של החזון שיש לשאוף אליו. אנדריי אמר: "אתה לא מלמד אותם מתמטיקה; אתה מלמד אותם דרך חיים".

סיפורו של חוג הבית שלנו

במקרה שמרתי את התאריך של השיעור הראשון שלנו: 23 במרץ 1980. המפגשים עם הבנים היו לא לגמרי סדירים, אבל התקיימו במשך ארבע שנים. בזמן הזה ג'ני גדלה, והתחלנו חוג בית שני – איתה ועם חברותיה. הוא התקיים במשך שנתיים. היו עוד כמה נסיונות פה ושם לקיים חוגי בית עם ילדים אחרים, אבל אף אחד מהם לא החזיק מעמד לאורך זמן; צריך לקחת בחשבון שאת כל זה עשיתי בנוסף לעבודה הרגילה שלי (אני מעדיף לקרוא לה "שירות"). היו גם כמה פעמים שהעברתי סדנאות מזדמנות. והיה איזה שלב שהעזתי להגיע עם זה לבית ספר. בהתחלה זה היה חוג בכיתה א', שבה למד דימה; אחר כך היו עוד כמה שיעורים באותו סגנון, והיה אפילו חודש שבו, במסגרת ניסוי פדגוגי, עבדתי חודש שלם כמורה מן המניין של כיתות א' באחד מבתי הספר במוסקבה. לפני כן הייתי אקדמאי עם שפע של בטחון עצמי, שתמיד מוכן לבקר את בתי הספר ואת המורים ולתת להם עצות מלומדות. הניסוי האכזרי אך מועיל להפליא הזה גרם לי לשנות הרבה דברים בתפיסה שלי. אבל קצת רצתי קדימה כרונולוגית.

שלב חשוב בסיפור היה כשחברה של המשפחה שלנו, הפסיכו-בלשנית רבקה פרומקין, קראה את היומן ושלחה אותי למערכת כתב העת "ידע הוא כח". מעט לאחר מכן התפרסמו שם שני מאמרים שלי על החוג (גליון מס' 8 בשנת 1985 וגליון מס' 2 בשנת 1986). בהמשך היה גם מאמר שלישי, אבל הוא לא תפס. שני המאמרים הראשונים הפכו למאד פופולריים, להפתעתי. משורר הילדים והמורה המצוין ואדים לויין אפילו אמר לי פעם שהמאמרים שלי הם ספרות פדגוגית קלאסית. כעבור זמן מה הם תורגמו לאנגלית ופורסמו בכתב העת *The Journal of Mathematical Behavior*; אחר כך עלו לאינטרנט, נדמה לי שלארבעה אתרים שונים; פורסמו בעיתון "השכלה לגיל הרך" (מאי ויולי 2000), הפעם עם הערות של ו. לויין; נכנסו לספר שלו "שיעורים להורים"; ולבסוף, ממש לאחרונה, בשנת 2005, הוצאת "אחד בספטמבר" פרסמה ברושור תחת השם "חינוך ביתי לגיל הרך", עם אותו טקסט, אבל לצערי בלי קרדיט ללויין. (אותה תופעה מצערת קורית גם בחלק מארתי האינטרנט. כך, בין השאר, מחמאות מסוימות – שלא לומר שבחים – שלויין מפנה אלי נשמעים כאילו כתבתי אותם לעצמי. אין ממש מה לעשות עם זה. אפילו לא עדכנו אותי על פרסום הברושור של "אחד בספטמבר", למשל, ובטח שלא את לויין).

בינתיים התחילה הפרסטרופיקה¹. חבר טוב שלנו, סטפן פצ'יקוב, ארגן במוסקבה מועדון מחשבים לילדים; את המחשבים תרם גארי קספרוב. באותה תקופה (שנת 1986) זה היה אולי המקום היחיד בברית המועצות שבו ילדי בית ספר יכלו להשתמש במחשבים. באופן טבעי, ביקשו ממני להעביר שם שיעורים לקבוצת הילדים הצעירים. בהמשך ארגנו גם קייטנת מחשבים בפרסלב-זלסקי בקיץ ובזבניגורוד בחורף. והיה עוד מועדון מחשבים אחד, "זודיאק". כבר קשה למנות את הכל. אני הייתי שקוע עד צוואר בכל זה, כשבכל מקום הייתי על תקן המומחה לילדים בגיל הרך. שולבתי במה שנקרא "צוות החוקרים הזמני של בתי הספר-1", שהיה אמור לתכנן רפורמה בכל תכנית הלימודים של בתי הספר; ראש הצוות היה החוקר ווליאחוב, והמוביל בפועל היה אלכסיי סימיונוב. מכל הדברים שעשינו באותה תקופה, אני רוצה לציין את ספר הלימוד שכתבנו, "אלגוריתמיקה" לכיתות ה'-ז' (א. זבונקין, ס. לנדאו, א. סימיונוב, א. קולקוב, א. שיין); הספר הודפס לראשונה בהוצאת "דרופה" ב-1996; בהמשך יצאו לאור עוד מספר מהדורות). נעשה בו שימוש בתכנים שהופיעו לראשונה בחוג הבית (בגרסה מעט יותר מורכבת, מן הסתם). לימים, השתעשעתי לגלות שחלק מהתכנים האלה ניתנו כתרגילי בית לתלמידי שנה א' באחת האוניברסיטאות בארצות הברית.

* * *

כאן החיים פורשים בפנינו עלילה נוספת, שקשורה לחוג הבית רק בעקיפין. בשנת 1989 החלפתי מקום עבודה. לפני כן, עבדתי 13 שנים ב"מכון המחקר והפיתוח של ברית המועצות לאוטומציה משולבת של תעשיית הנפט והגז". מי שמכיר לא זקוק להסברים: מכון מחקר יישומי סוג ג', עם מעקב נוכחות ומשלחות שנתיות לקולחוז², תחושת שותפות גורל ויחסים לבביים מאד בין העובדים, ועבודה משעממת וחסרת תוחלת לחלוטין (כיום האנשים שעבדו שם עושים דברים עם תוחלת, אבל כבר לא במכון ההוא). לא סבלתי את השירות שלי, אבל לא היה לי שום סיכוי למצוא עבודה אחרת. והנה פתאום מצאתי את עצמי ב"וועדה המדעית לקיברנטיקה של האקדמיה למדעים של ברית המועצות", חבר בצוות שעוסק בפיתוח והטמעה של תכניות לימוד בתחום האינפורמטיקה בבתי הספר, ובכלל בכל חידוש פדגוגי אפשרי. התוצאות היו כנראה ככה-ככה, אבל באותה תקופה היינו כל כך נלהבים ומושקעים בעבודה. אם מסתכלים על העניין הזה לא מנקודת מבט היסטורית אלא מנקודת המבט של הביוגרפיה האישית שלי, דבר אחד ברור לחלוטין: אלמלא חוג הבית, לא הייתי מגיע לעבודה החדשה שלי. חוץ מזה המשכתי, כמו קודם, לעסוק במתמטיקה. כלומר, עבדתי כחוקר בתחום הפדגוגי, ובמקביל עבדתי גם כחוקר במתמטיקה. תחום המחקר המתמטי שלי השתנה באותה פתאומיות וקיצוניות. זה קרה,

¹ רפורמה כלכלית שהנהיג גורבצ'וב בסוף שנות השמונים, ושהובילה לנפילתה של ברית המועצות. – ר.פ.

² משק שיתופי שאליו עובדים היו נשלחים לעזור בהתנדבות. – ר.פ.

בין השאר, בעקבות מפגש עם שני קולגות בקייטנת המחשבים בפרסלבל-זלסקי, שגם הם היו נלהבים מהתחום החדש לכולנו: סרגיי לנדאו וגיאורגי שבת. התחלנו – ואנחנו ממשיכים עד היום – לעבוד ביחד. המונוגרפיה המשותפת שלי ושל ס. לנדאו ראתה אור בהוצאת Springer-Verlag ממשיכה לאחריה, ב-2004.

ב-1990 נסעתי לראשונה לצרפת. במכון המחקר הקודם כנראה לא היו מאשרים לי לנסוע, אבל בוועדת הקיברנטיקה התנאים היו שונים. באותה תקופה כמעט לא הכרתי מומחים בתחום המתמטי החדש שלי. הנסיעה הזו עזרה לי להתמצא: התברר שהאנשים שהכי קרובים אלי בתחומי העניין עובדים בבורדו. נסעתי לשם; ואחר כך שוב; אחר כך הזמינו אותי לשנה; ובסופו של דבר יצא שנשארתי שם. כך העניינים התגלגלו: העובדה שהיום אני פרופסור באוניברסיטת בורדו קשורה במידה רבה לזה שפעם, לפני הרבה שנים, העברתי חוג בית למתמטיקה לגיל הרך.

(אם אני כבר שוקע בזכרונות, אני מרשה לעצמי לספר פה עוד סיפור אחד. אני אאלץ להשתחצן קצת, אבל בלי זה לא יהיה סיפור. ובכן, הייתי פרופסור אורח לשנה בבורדו. ביקשו ממני להעביר ארבע הרצאות בתורת הסיבוכיות בהשתלמויות למורים. הבעיה הייתה שהקהל היה מורכב ממורים למתמטיקה, פיזיקה, ביולוגיה, היסטוריה וספרות. מה אפשר לעשות עם קבוצה כל כך מגוונת? בשנים קודמות המשתתפים תמיד התלוננו שדחפו להם לתכנית את הנושא הטפשי הזה. אף אחד לא רצה להשתתף בהשתלמות הזו. מה עושים?... החלטתי להשתמש בתכנים מספר האלגוריתמיקה שהזכרתי לעיל. הם מספיק פשוטים בשביל שכולם יבינו אותם, אבל הם יחדשו משהו אפילו למורים למתמטיקה; ואם רוצים, אפשר גם לפתח ולסבך אותם. ההצלחה הייתה מסחררת. מסרו לי שהמשתתפים "מוקסמים" ושואלים למה יש רק ארבע הרצאות. סוכם שאעביר עוד שתיים. זה היה מחמיא מאד, אבל זה רק חצי מהעניין. החצי השני הוא שהאירוע הזה השפיע ללא ספק על החלטת הוועדה שבחרה למי, מתוך כעשרים איש, לתת תקן של פרופסור חבר).

תודות

הקוראים שלי חכמים; הם וודאי מנחשים במי אפתח את החלק הזה. אפתח אותו בתודה לילדים. כשהייתי קטן, ההורים שלי הטיפו לי לעתים קרובות: "כשיהיו לך ילדים, תבין". כעסתי: מה אני אבין, מה? אפשר לחשוב, ילדים! לכולם יש ילדים, אז מה? לא כזה עניין. לא תיארתי לעצמי אז עד כמה כל תפיסת העולם של האדם משתנה כשנולדים לו ילדים. אני מוכן להאמין שיש אנשים שיכולים לדמיין את זה גם בלי שיהיו להם ילדים; כנראה המהפך התודעתי שלהם עובר עליהם בצורה מעט יותר רגועה. אבל ביקום שלי, "המפץ הגדול" קרה בזכות הילדים. אז תודה להם על זה.

אני מודה מעומק לבי לכל הילדים שהשתתפו בחוג הבית שלנו. קשה להביע במילים כמה למדתי מהם. ואני רוצה להגיד להם עוד דבר. השתדלתי מאד לחלק את תשומת הלב שלי באופן הוגן בין כולם, אבל אני חושש שלא תמיד הצלחתי. אני מאד מקווה שלא פגעתי באף אחד. ואם מישהו מהם עוד נוטר לי טינה, אני יכול להגיד לו רק דבר אחד: "כשיהיו לך ילדים, תבין".

אני מודה לאשתי, אלה ירחו. ראשית, על זה שנולדו לנו הילדים שלנו – היה לה חלק משמעותי בזה. שנית, הרעיון לארגן חוג היה שלה. בכלל, החוג היה שלה כמעט באותה מידה שהיה שלי, זה יהיה די ברור מההמשך. אני מודה לה על התמיכה אז, וגם על כך שדחפה אותי בהמשך להשלים את היומן הזה. וכמובן, במהלך הכתיבה שלו היא שימשה כעורכת לשונית, עורכת תוכן, יועצת, וקוראת.

רבקה פרומקין "הוציאה אותי לאור": בזכותה, העיסוק המשפחתי-לחלוטין שלנו פורסם. ריטה (כך קוראים לה חבריה) היא סנדקית של אינספור פרויקטים מעניינים. הספר שלפניכם הוא אחד מהם. בנוסף, הדיונים איתה עזרו לי ללבן חלק גדול מהרעיונות שלי.

אלכסיי סימיונוב היה המנהל שלי בוועדת הקיברנטיקה, אבל למעשה הוא היה המצפן שלי בהרבה תחומים, ומעייני "חבר בכור" שלי (למרות שהוא צעיר ממני). העובדה שהוא היה משוכנע עמוקות בכך שיש עניין נרחב ביומן הזה השפיעה עלי.

אלכסנדר שיין היה בהתחלה אחד מהקוראים של המחברות שלי, ונדנד לי שאוציא את כל זה לאור. בהמשך, הוא לא הצליח לעמוד בקצב (האיטי) שלי, וארגן קבוצה של תלמידי בית ספר וסטודנטים שכתבו גרסה ממוחשבת ראשונה של הספר הזה. בהקשר הזה, אני רוצה לציין את העבודה הרבה שעשה ולדימיר לוגובקין. אחרי זה כבר לא הייתה לי ברירה – נאלצתי לעבוד ברצינות על העריכה. אלכסנדר התקין על המחשב הצרפתי שלי גרסה רוסית של לטך. בלעדיו, העבודה כנראה הייתה נמשכת שנים יותר. רשימת האנשים שאני מודה להם לא רק שאינה נגמרת כאן, אלא שלמעשה היא בקושי התחילה. אבל אם אמשך כך, הקוראים בלוא הכי ידלגו על החלק הזה. לכן אכתוב בקצרה: אני מודה מעומק הלב לכל מי שאי פעם דנתי איתו בספר הזה, למי שהתעניין ובכך חיזק אותי. חברים יקרים: תודה לכם.

* * *

במוסקבה, ברחוב בולשוי וולסייבסק (לא רחוק מארבת), יש מוסד מדהים ששמו הולך לפניו בכל העולם: "מרכז מוסקבה לחינוך מתמטי מתמשך". משמעותה של המילה "מתמשך", בהקשר הזה, היא "מיועד לכל הגילאים". המרכז הזה כולל את אוניברסיטת מוסקבה העצמאית, אבל הוא מארגן גם כל אולימפיאדה מתמטית אפשרית, וגם פעילויות מתמטיות חוץ-כיתתיות אחרות לכיתות הבינוניות והגבוהות. למה לא להרחיב את טווח הגילאים ולכלול גם את הגיל הרך? אני מאושר וגאה שהספר שלי יוצא לאור בהוצאת המרכז הזה. מה עוד שבמקומות כאלה תמיד פוגשים מכרים מהעבר. אחד מהם, ואדים בוגיינקו, ריכז את העבודה על הכנת הספר הזה לדפוס, למרות שהנושא לא היה בתחום אחריותו, וארגן צוות נפלא שעבד על זה. אני מודה לכולם, ובראש ובראשונה למיכאל פנוב, שבין השאר אייר מחדש את כל הציורים. (מביני עניין יעריכו את הכשרון היוצא מן הכלל שלו לאייר בעזרת התוכנה metapost, שתוכננה במקור לשמש ככלי ליצירת המחשורת גרפיות במאמרים מדעיים).

אפשר לעיין בפעילות המרכז באתר <http://www.mccme.ru/>. ייתכן ששם אתם קוראים את הספר הזה. שם כתוב גם איפה ואיך אפשר לרכוש אותו.

שני דיסקליימרים

יש לי שתי הצהרות חשובות.

הראשונה: לא את כל החידות בספר הזה אני המצאתי. השתמשתי במגוון מקורות, החל ממאמרים בפסיכולוגיה וכלה בספרים במתמטיקה פופולרית, או בסיפורים של חברים. לפעמים שמרתי על התנאים המקוריים של השאלות, והרבה פעמים שיניתי אותם כדי הדמיון, לפעמים עד כדי כך שקשה לזהות את המקור, ולפעמים גם במהלך המפגש עצמו. כבר שכחתי מזמן חלק גדול מהמקורות שלי; אחרים הלכו לאיבוד במעברי דירות, ואני לא יכול לתת הפניה מדויקת אליהם. אני בטוח שיש גם חידות שאני עצמי כבר מזמן שכחתי שלא המצאתי אותן. כדי להחזיר את החוב הזה לאנשות, אני מאשר לכל המעוניין להשתמש באופן חופשי בכל המסופר פה, ומבטיח לא לתבוע אף אחד על פלגיאט. אני אשמח, ואפילו אהיה גאה, אם תכנים שהמצאתי יכנסו לפולקלור הפדגוגי.

והשנייה: הסיפורים שמובאים להלן הם לא בהכרח מדויקים היסטורית. ראשית, הם נכתבו מהזכרון, ושנית, לא תמיד היה אפשר להבין מה כל ילד אומר כשדיברו כמה ילדים בבת אחת. אני בטוח שפספסתי המון דברים שנאמרו, ושחלק מהדברים הבנתי לא נכון. בעצם, כנראה זה מובן מאליו.

1 המפגש הראשון ומחשבות מסביב

איך זה הלך

בסיפור שלהלן נעשה שימוש בתכנים מהמאמר שלי "ילדים ומתמטיקה שלא נראית כמו מתמטיקה" (כתב העת "ידע הוא כח", גליון מס' 8 משנת 1985).

בחוג שלנו משתתפים ארבעה ילדים: הבן שלי, דימה, ושלושה חברים שלו – יבגני, פיטר, ואנדריי. דימה הוא הצעיר מהארבעה, הוא בן 3 ועשרה חודשים; הגדול ביותר הוא אנדריי, שבקרוכ ימלאו לו חמש.

אנחנו מתיישבים מסביב לשולחן. אני מתרגש: איך אסתדר עם כולם? אני מספר לילדים שנלמד מתמטיקה, ולחיצוק המוטיבציה אני מוסיף שמתמטיקה זה המדע הכי מעניין בעולם. אחד הילדים שואל, – מה זה מדע?

– מדע זה כשחושבים הרבה, – אני מנסה להסביר.

– אה, חשבתי יהיו קסמים – אומר אנדריי באכזבה. בבית הסבירו לו שאלכסנדר יעשה איתם היום מפגש, ושיהיו קסמים.

– יהיו גם קסמים – אני מכריז, ובכך מסיים את ההקדמה ועובר לעניין עצמו.

להלן התרגיל הראשון. אני מניח על השולחן שמונה כפתורים. בלי לחכות שאתן הוראות, הבנים עטים עליהם ומתחילים לספור אותם. כנראה, למרות הגיל הצעיר, הם כבר הספיקו לגבש איזושהי תפיסה לגבי מהי מתמטיקה: מתמטיקה זה כשסופרים. כשהמולה נרגעת, אני מסביר להם מה המשימה: – תניחו על השולחן מטבעות באותה כמות.

הם מניחים על השולחן שמונה מטבעות. אנחנו מסדרים את המטבעות והכפתורים בשתי שורות באורך זהה, מטבע אחד ליד כל כפתור.

– מה יש יותר, מטבעות או כפתורים? – אני שואל.

הילדים מסתכלים עלי במבוכה מסויימת; לוקח להם זמן לנסח את התשובה:

– אין יותר מאף אחד מהם.

– אז שניהם באותה כמות, – אני אומר. – ועכשיו, תסתכלו מה אני עושה.

ואני מרווח את המטבעות, כך שהשורה נעשית ארוכה יותר.

– ועכשיו, מה יש יותר?

– מטבעות! יש יותר מטבעות! – צועקים הילדים במקלה.

אני מציע לפיטר לספור את הכפתורים. למרות שספרנו אותם כבר ארבע פעמים, פיטר לא שואל שאלות, סופר את הכפתורים בפעם החמישית, ומודיע שיש שמונה. אני מבקש מדימה לספור את המטבעות. דימה סופר ואומר:

– גם שמונה.

– גם שמונה? – אני מטעים, – כלומר, אותה כמות משניהם?

– לא, יש יותר מטבעות! – קובעים הבנים בהחלטיות.

למען האמת, ידעתי מראש שזו תהיה התשובה. התרגיל הזה הוא רק אחד מתוך סדרה ארוכה של תרגילים שהפסיכולוג השוויצרי ז'אן פיאז'ה נתן לילדים בניסויים שהוא ערך (בפרק הבא אספר בקצרה על "התופעות של פיאז'ה"). הניסויים שלו הראו שילדים קטנים לא מבינים את מה שנראה לנו מובן מאליו: אם משנים את המיקום של מספר חפצים, הכמות שלהם לא משתנה. ובכן, ידעתי מראש מה הילדים יגידו. ידעתי, אבל משום מה לא הכנתי שום תגובה הולמת. איך אתם, הקוראים, הייתם מגיבים? מה הייתם אומרים לילדים?

לצערי, התגובה הנפוצה ביותר של מבוגרים במצבים כאלה היא להעמיס על הילדים הסברים בכל הכח. "איך יכול להיות?!", אומר המבוגר בפליאה מעושה. "איך יהיו פה יותר מטבעות? הרי לא הוספנו

שום מטבעות חדשים! הרי רק ריווחנו אותם וזהו. הרי קודם הייתה אותה כמות משניהם – אמרתם את זה בעצמכם! אז לא יכול להיות שעכשיו יש יותר. כמובן (בהטעמה) שנשארה אותה כמות משניהם!". המאמצים מיותרים – גישה כזו לא מובילה לשום מקום. ליתר דיוק, היא מובילה למבוי סתום. ראשית, אל תקוו שההגיון שלכם ישכנע את הילד במשהו. מבנים לוגיים הם משהו שהוא ירכוש בשלב מאוחר עוד יותר מחוק שימור כמות העצמים. עד שזה יקרה, טיעונים לוגיים לא יראו לו משכנעים. הדבר המשכנע היחיד יהיה האינטונציה שלכם. והדבר היחיד שהיא תמחיש לילד הוא ששוב הוא לא היה במיטבו ופישל. ילדים לא נכנעים כל כך מהר, אבל אם מתאמצים מאוד, אפשר לגרום להם להפסיק לסמוך על השכל הישר שלהם, ולהתחיל לנסות לנחש מה המבוגר רוצה מהם. באופן כללי, מבוגרים מעמידים בפני ילדים לא מעט דרישות בלתי מוסברות: משום מה אסור לצייר על הקיר; משום מה צריך ללכת לישון דווקא כשהמשחק בעיצומו; משום מה אסור לשאול "מתי האיש הזה ילך?". גם עכשיו קורה משהו דומה: למרות שאני רואה מצוין שיש יותר מטבעות מאשר כפתורים, משום מה אני אמור לענות שיש אותה כמות משניהם. היחס למתמטיקה כאל טקס מסוים, שבו צריך להגיד לחשים מסוימים בסדר מסוים, נולד בבית הספר ושורד עד האוניברסיטה, שם אפשר לפגוש בו אפילו אצל סטודנטים למתמטיקה.

אז מה עושים? אולי עדיף בכלל לא לשאול שאלות מסוימות, אם כבר אי אפשר להביע דעה על התשובות?

להפך, דווקא כדאי לשאול שאלות: "מה אתה חושב, יבגני? ואתה, פיטר? למה? בכמה יש יותר מטבעות מכפתורים?". אפשר גם להביע את עמדתך, אבל בזהירות, בלי לתת לילדים תחושה שדעתך נחשבת יותר משלהם, ובלי שום צל של טרחנות. מומלץ גם להוסיף כמה הסתייגויות כמו "נדמה לי" ו"אולי". במילים אחרות, כל הסמכות של המבוגר צריכה לשמש לא לחיזוק מעמדה של הדרך היחידה לחשוב נכון, אלא לשכנע הילד בחשיבותם וערכם של המאמצים והחיפושים שלו עצמו. אבל עוד יותר מעניין להפגיש אותו עם סתירות בנקודת המבט שלו.

– וכמה מטבעות צריך להוריד כדי ששוב תהיה אותה כמות משניהם?
– שני מטבעות.

מורידים שני מטבעות; סופרים: יש שמונה כפתורים וששה מטבעות.
– ועכשיו, מה יש יותר?
– עכשיו אותו דבר.

מצוין. אני מרווח שוב את המטבעות ושואל את אותה שאלה. עכשיו כבר מתברר שששה מטבעות הם יותר משמונה כפתורים.

– איך נהיו יותר?
– כי ריווחת אותם.

אנחנו שוב מסירים שני מטבעות; אחר כך שוב. לבסוף, המצב נראה כפי שמתואר באיור 2. בשלב הזה מתפתח פתאום ויכוח סוער. חלק מהבנים חושבים, כמו קודם, שיש יותר מטבעות, והאחרים פתאום "רואים" שיש יותר כפתורים. נראה שזה בדיוק הזמן לעבור לתרגיל אחר; שימשיכו לחשוב לבד.

איור 2. בשורה העליונה יש שמונה כפתורים, ובתחתונה – שני מטבעות. מה יש יותר, מטבעות או כפתורים?



אני הייתי מאלה שאמרו שיש יותר מטבעות. בפעם הראשונה פשוט הסכמתי עם כל השאר, ואחר כך סתם עניתי בלי לחשוב. בכל הפעמים הקודמות זה היה נכון (כלומר, אבא הסכים עם זה), ולכן לא הייתה לי סיבה לשנות את דעתי גם הפעם. – דימה.

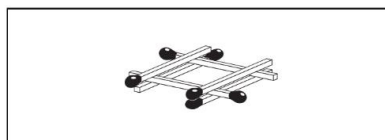
לקח לי זמן לפתח את הרעיונות האלה, כך שהטיעונים שאני מציג קצת מקדימים את המאוחר. חזרנו על התרגיל הזה המון פעמים במגוון וריאציות. למשל, היו לנו שני צבאות שלא הצליחו לנצח אחד את

השני, כי היה להם אותו מספר חיילים. ואז אחד מהם התרווח, נהיו לו יותר חיילים, והוא התחיל לגבור על הצבא השני. כשהצבא השני ראה את זה, הוא התרווח עוד יותר, וכו' (אפשר להמשיך את הסיפור כיד הדמיון הטובה). היה גם פינוקיו, שהשועל והחתול רצו להערים עליו, אז הם ריווחו את חמשת מטבעות הזהב שלו וטענו שיש לו יותר. למדתי להתאזר בסבלנות. ממילא יקח לפחות עוד שנתיים-שלוש עד שהילדים יבינו את חוק שימור כמות החפצים, לא משנה איך וכמה אתאמץ ללמד אותם. והאמת היא שאין צורך ללמד אותם. בתחום הזה, ההבשלה המוקדמת כמוה כלידה מוקדמת. לכל דבר יש זמן, ולא כדאי לדחוק בהתפתחות, בפרט בהתפתחות האינטלקטואלית. (אני מודה שהגישה הזו מוצגת כאן באופן מעט דמגוגי. אנמק אותה בהמשך). אבל שוב, כל המחשבות האלו הגיעו מאוחר יותר. אז, במפגש הראשון, איזושהי אינטואיציה גרמה לי "לא להסביר", ופשוט עברתי לתרגיל הבא.

על השולחן מונחים ששה גפרורים. אני בונה מהם צורות שונות ומבקש מכל ילד בתורו לספור אותם. בכל פעם מתברר שיש ששה. ... לא, הסגנון שלי נהיה פורמלי מדי. בואו נחזור לילדים ונראה איך הדברים התרחשו במציאות.

בכל פעם שאחד הילדים מסיים לספור, התוצאה מתקבלת בפרץ צחוק. אנדריי ויבגני צועקים שתמיד יצא שש. דימה מנסה לחטוף לי את הגפרורים ולבנות בעצמו איזו צורה מורכבת, ופיטר מבקש שאתן לו גם. אני מרגיש שתכף העליזות שלהם תהפוך להשתוללות ותצא משליטה. צריך להרגיע אותם איכשהו, להקשיב למה שיש לאנדריי ויבגני לומר ("למה אתם חושבים שתמיד יצא שש?"), ולא לפספס כיוונים חדשים: דימה בדיוק הרכיב צורה תלת מימדית (איור 3).

איור 3. "באר" משהו גפרורים.



אני מפנה אליה את תשומת הלב של כולם. הפעם אפילו אנדריי ויבגני לא בטוחים שיש בה ששה גפרורים. קשה מאד לספור אותם, כי ה"באר" מתפרקת כל הזמן. אנחנו מרכיבים אותה מחדש שוב ושוב, סופרים, היא שוב מתפרקת... בסוף דימה מצליח לספור שבעה גפרורים. הילדים קצת מבולבלים, אבל לא נדהמים במיוחד: אם יצא שבע, שיהיה שבע, למרות שזה קצת מוזר. אני אולי חוזר על עצמי, אבל שיהיה: המטרה הפדגוגית שלי היא לא ללמד את הילדים אמיתות מוחלטות, אלא לעורר את הסקרנות ואת אהבת הידע שלהם. הייתי רוצה שעוד כמה ימים או חודשים מישוהו מהבנים ירכיב מעצמו באר מגפרורים ויספור אותם – סתם כי מעניין אותו לגלות איך הדברים עובדים באמת. ואם זה לא יקרה, אז אני מקווה שזה יקרה בפעם אחרת, עם תרגיל אחר. (בהמשך קיבלתי לא מעט אישורים לכך שאכן כך הדברים עובדים לעתים קרובות). כך או אחרת, אני מגביל את עצמי לביטויים כמו "מעניין!" או "מעולה!" – בתקווה שהם יזכרו את הסיטואציה.

זכרון של ילדים הוא דבר מדהים. אני מוכרח לספר בהקשר הזה משהו שקרה לנו בתקופה מאוחרת יותר.

אחד מהמפגשים: על השולחן מונחות שלוש צורות מקרטון (איור 4), ואנחנו מדברים על התכונות שלהן. ראשית, לכל הצורות ארבע פינות. לכן כולן נקראות מרובעים. בסך הכל יש לנו שלושה מרובעים. בשניים מהם כל הזוויות ישרות. לצורות כאלו קוראים מלבנים. אחד משני המלבנים הוא מיוחד: כל הצלעות שלו הן באותו אורך. לצורה כזו קוראים ריבוע. לריבוע בעצם יש שלושה שמות: אפשר לקרוא לו גם ריבוע, גם מלבן, וגם מרובע – וכל השמות נכונים. הילדים מתקוממים; הם מעדיפים לחשוב במונחים של קבוצות זרות. האופן שבו הם מגיבים מעלה את החשד שהם עוד לא באמת מבינים את הכלל "השלם גדול מחלקיו". לפני עשר דקות הם התווכחו האם נכון שכל הסבים והאבות הם גברים, וכל הגברים הם בני אדם. ועכשיו הם לא מוכנים בשום אופן לקרוא לריבוע מרובע: או שהוא ריבוע, או שהוא מרובע. אני פוצח בקמפיין למען זכות הריבוע להקרא מרובע. לאט-לאט התעמולה שלי מתחילה לעבוד. אנחנו מסכמים שוב:

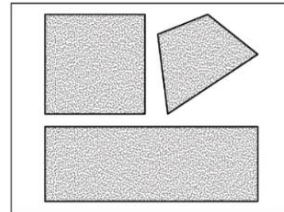
— כמה ריבועים יש לנו?

- אחד.
- ומלבנים?
- שניים.
- ומרובעים?
- שלושה.

לכאורה, הכל בסדר. ואז אני שואל את השאלה האחרונה – כבר הזכרתי אותה במבוא:
 – מה יש בעולם יותר – ריבועים או מרובעים?
 – ריבועים! – כולם עונים בלי להתלבט.
 – כי יותר קל לגזור אותם, – מסביר דימה.
 – כי יש אותם בבתים, על הגגות, על ארובות, – מסביר יבגני.

זו הייתה נקודת ההתחלה של העלילה הזו. נקודת הסיום התרחשה אחרי שנה וחצי, בלי שום הכנה ואפילו בלי שום טריגר חיצוני. בקיץ, תוך כדי טיול, דימה פתאום אמר לי:
 – אבא, אתה זוכר, פעם נתת לנו תרגיל על ריבועים ומרובעים, שאלת מה יש יותר. אז נראה לי שמה שאמרנו אז לא היה נכון. יש יותר מרובעים.
 והסביר יפה. מאז אני נצמד לעקרון: השאלות חשובות מהתשובות.

איור 4. כמה ריבועים יש באיור הזה?
 כמה מלבנים? כמה מרובעים? אפילו
 מבוגרים טועים לפעמים בשאלות הללו.

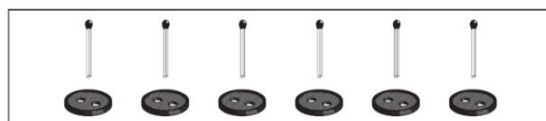


פסיכולוגים ערכו, וממשיכים לערוך, ניסויים רבים שמטרתם להקנות לילדים הבנה ראשונית של חוקים מתמטיים. למשל, הם לוקחים קבוצה של ילדים, ובודקים האם הם מבינים את העובדה הפשוטה הבאה: אם לוקחים חתיכה של פלסטלינה, מועכים, מגלגלים, ומשנים את צורתה, כמות הפלסטלינה לא משתנה. את הילדים שלא מבינים את זה מחלקים לשתי קבוצות. עם הקבוצה הראשונה, קבוצת הביקורת, לא עושים כלום. את הקבוצה השנייה מלמדים על חוק שימור החומר: מראים, מסבירים, שוקלים, משווים. אחרי כשבועיים, בודקים שוב את משתתפי שתי הקבוצות, ובודקים מה הם למדו. על פי רוב, ההתקדמות בשתי הקבוצות זניחה למדי, וזהה לחלוטין. לרוב פסיכולוגים מתפלאים: איך ייתכן שילדים, שכל כך התאמצו ללמד אותם ולהסביר להם, לא למדו כלום? אני, כשאני קורא על ניסויים כאלה, מתעניין בשאלה ההפוכה: למה ילדים שלא לימדו אותם כלום (קבוצת הביקורת) גם כן התקדמו מעט? ההשערה שלי, מהנסיון האישי שלי עם ילדים, היא שזה קורה בגלל שגם אותם שאלו שאלות. אך נחזור למפגש שלנו. התרגיל הבא הוא עוד וריאציה בנושא חוק שימור החומר. אני מסדר בשורה את ששת הגפרורים מהתרגיל הקודם, ומבקש מהילדים להניח כפתור ליד כל גפרור (איור 5). אני שואל את השאלה הרגילה:

- מה יש יותר – גפרורים או כפתורים?
- אותו דבר.

– אז הכמות של הגפרורים זהה לכמות של הכפתורים, – אני מסכם.
 אני אוסף את הכפתורים ומחביא אותם בכף ידי. אני מבקש מהילדים להגיד כמה כפתורים החבאתי. כצפוי, אף אחד אפילו לא מנסה לספור את הגפרורים. בשביל מה, בעצם? הרי שאלו על כפתורים; סימן שצריך לספור כפתורים. דימה מנסה לפתוח את כף היד שלי. האחרים שואלים בפליאה:

איור 5. כמות זהה של גפרורים וכפתורים.



– איך אנחנו יכולים לספור אותם?

– כמובן שאתם לא יכולים, – אני צוחק, – הכפתורים מוחבאים. אבל נסו לנחש.

הם ממטירים עלי ניחושים. כולם צועקים משהו, אבל יבגני צועק את התשובה הנכונה, ואני מנסה לשאול אותו למה הוא חושב כך, אבל הוא נסוג. זה קורה לו הרבה. כשכולם צועקים ביחד, הוא צועק את התשובה הנכונה לעתים קרובות יותר מהאחרים, אבל ברגע שפונים אליו ישירות, הוא נבוך ומתכנס לתוך עצמו. עם אנדריי הבעיה היא אחרת. הוא ילד מאד ממוקד מטרה, אבל במפגשים שלנו הרבה פעמים חסרה לו מוטיבציה. בפעם אחרת נתתי לילדים את התרגיל הזה עם חיילים ורובים, במקום גפרורים וכפתורים – החיילים הלכו והשאירו את הרובים, והבלש היה צריך לגלות כמה חיילים היו – ואז הוא היה הראשון לנחש שאפשר לספור את הרובים. הוא גם מעדיף משחקים שיש בהם מנצח. אבל לא תמיד יש לי מספיק דמיון בשביל להציג בעיה בתצורה המתאימה, מה עוד שההיבט הזה חסר משמעות עבור שאר הילדים. באשר לדימה, הוא בכלל לא אוהב לפתור תרגילים של אחרים, ומעדיף להמציא תרגילים משלו. בסוף מצאתי דרך להתמודד עם זה – התחלתי להגיד לו משפטים כמו "תמציא תרגיל, שבו יהיה...", ואז להגיד את תנאי התרגיל שלי. בנוסף, הפתרונות שלו נוטים להיות מפותלים מאד (זה יבלוט במיוחד בתרגיל הבא); קשה לגרום לו לחשוב ישר. גם לפיטר יש מורכבויות משלו, כמובן. איך אני יכול להתאים את עצמי לכולם? יש לי רק ארבעה תלמידים, ואני לא מסוגל לתת לכולם יחס אישי! מה יעשה מורה שיש לו ארבעים תלמידים בכיתה? אוהבים להשוות מורה למנצח על תזמורת. אני אישית מרגיש יותר כמו לוליין שתכף הכל יתפזר לו על הבמה. זה מה שקורה גם עכשיו: בזמן אני מנסה לשוחח עם יבגני – להבין מה הוא חושב ולמה – דימה כבר מוציא את הכרטיסים של התרגיל הבא ("מה יוצא דופן?") ושואל:

– אבא, זה התרגיל הבא?

שני האחרים כבר חוטפים לו את הכרטיסים מהידיים; הכרטיסים מתקמטים. גם יבגני כבר פוזל לכיוונם ומקשיב לי רק בחצי אוזן. אני פותח את כף היד הקפוצה, אנחנו בודקים בזריזות כמה כפתורים יש, ועוברים לתרגיל הבא.

כולם מכירים את המשחק "מה יוצא דופן?". הילדים מקבלים ארבעה כרטיסים שעליהם מצוירים, למשל, ארנב, קיפוד, סנאי ומזוודה. הם צריכים להגיד איזה מהצוירים יוצא דופן. מעניין שהם כמעט תמיד פותרים נכון, אבל לרוב לא מצליחים להסביר את התשובה.

– המזוודה יוצאת דופן.

– למה?

– כי היא לא ארנב, לא קיפוד, ולא סנאי.

– וואלה? אני חושב שהארנב יוצא דופן. כי הוא לא קיפוד, לא סנאי, ולא מזוודה.

הילדים תוקעים בי מבט מבולבל ומתעקשים:

– לא, המזוודה יוצאת דופן.

אני מנסה לשאול האם יש מילה שמתארת את כל הלא-יוצאי-דופן – הארנב, הקיפוד והסנאי. בסוף פיטר, הורבלי שבחבורה, מוציא את הביטוי המתאים – "חיות". היו בהמשך הרבה סיטואציות דומות שבהן הוא הציל את המצב.

(פעם הזמינו אותי להעביר מפגש בקבוצה של ילדים שלא הכרתי, גם כן בגילאי ארבע-חמש. פרשתי על השולחן את הכרטיסים החביבים עלי עם הארנב, הקיפוד, הסנאי והמזוודה, ושאלתי מי יוצא דופן. הילדים הסתכלו עלי באימה, ואחרי שתיקה ארוכה מישוהו מהם אזר אומץ ופלט בקושי: "שווה בשווה...". מיד הבנתי שמישהו כבר "לימד" אותם לפני).

אגב, אני נוהג לתת גם תרגילים שהפתרון שלהם אינו חד-משמעי. למשל: ציפור, דבורה, חלזון ומטוס. מצד אחד, המטוס יוצא דופן (דומם), ומצד שני, החלזון יוצא דופן (לא יודע לעוף). באיור 6 למשל, כל אחת מהצורות יוצאת דופן במובן מסוים, כך שכל מהות התרגיל משתנה. בתרגילים כאלה הייתי קובע בעצמי מה יוצא דופן, והבנים היו צריכים להסביר. כך ניסיתי לגרום להם להפנים

שבמתמטיקה הפתרונות הנכונים הם לא הדבר היחיד שחשוב, ואפילו לא העיקרי; דרושים הסברים נכונים. בשפה מדעית יותר, דרושים לא רק משפטים נכונים אלא גם הוכחות למשפטים האלה. המשחק "מה יוצא דופן?" על שלל צורותיו, עוזר מאד ללמד ילדים למצוא חוקיות (ההיבט הזה של חשיבה מתמטית נזנח לחלוטין בבתי הספר). אפשר גם לקחת שמונה ציורים שצריכים להתחלק על פי קריטריון כלשהו לשתי קבוצות, כמו שעשה מ. בונגרד בספרו "בעיות הגילוי". למרבה הצער, שמונה ציורים הם פי שניים מארבעה. מאיפה מביאים אותם? למעט מקרים חריגים, אלה הכינה את הכרטיסים למפגשים שלנו; אני לא יודע לצייר, ואילו היא למדה בזמנו בבית ספר לאמנויות. ויש גם תרגילים לוגיים מסובכים במיוחד שעוסקים בקבוצות שאינן זרות. למשל, צריך לחלק חמישה ציורים לשתי קבוצות שוות בגודלן, שלושה ציורים בכל קבוצה, כאשר ציור אחד משותף לשתיהן. לדוגמה: כדור, צמיג, מגפי גומי, מעיל, כובע. יש פה שלושה פריטים שעשויים מגומי (כדור, צמיג, מגפיים), ושלושה פריטי לבוש (מגפיים, מעיל, כובע); הפריט המשותף – מגפיים. איך, פיזית, מחלקים חמישה ציורים לשתי קבוצות שבכל אחת מהן שלושה חפצים? אנחנו השתמשנו בשני חבלים, שמכל אחד מהם יצרנו מעגל, ובחיתוך היינו מניחים את הפריט המשותף (כפי שמודגם באיור 7).

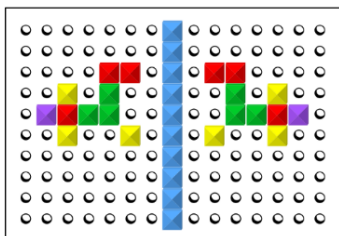
לדימה היה קושי משמעותי עם תרגילים מהסוג הזה. – נכון שזה גבר, אבל הוא דומה לאשה, – הוא היה אומר על קשיש עם זקן, ומצרף אותו לקבוצת הנשים. הוא התעקש שגם צמיג הוא בגד, כי אפשר ללבוש אותו על המותניים. כשאף אחד לא קיבל את דעתו, הוא אמר:

– בכל זאת זה בגד, כי האוטו לובש אותו.

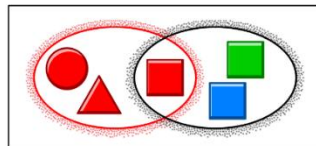
לכאורה, נראה שהילד יודע לחשוב ביצירתיות, מחוץ לקופסה. לגבי "מחוץ לקופסה" אני מסכים, אבל לגבי היצירתיות... מי שבאמת יצירתי יודע להציע פתרון מקורי, אבל בלי לחרוג ממסגרת התרגיל. להרכיב באר מששה גפרורים זה יצירתי, אבל להחשיב קשיש מזוקן לאשה, או צמיג לבגד – לא. דימה חושב הרבה פעמים מחוץ לקופסה, אבל בינתיים הוא לא כל כך יודע להשאר בתוך המסגרת של התרגיל, או לפחות לידה. צריך לפתח איכשהו יכולת אחת מבלי לחנוק את השניה. אבל איך?

התרגיל הבא שלנו (והאחרון להפעם) הוא מתחום הגיאומטריה. אני שולף לוח פסיפס צבעוני (לצערני, יש לנו רק אחד; כשקנינו אותו עוד לא חשבנו על החוג). מדובר במשטח מלבני עם שקעים. בשקעים האלה אפשר למקם אבנים ריבועיות בחמישה צבעים שונים (איור 8). התרגיל שלנו עוסק בסימטריה. ראשית אני בונה ציר – קו מאונך בצבע אחד שעובר באמצע המשטח. אני קורא לקו הזה "מראה", ואומר לבנים שתקף יהיו כל מיני צורות שיביטו במראה הזו. אני מרכיב צורות שונות בצד אחד של הציר, והבנים צריכים לבנות צורות סימטריות להן בצד השני. אני משחק עם כל המשתנים שאפשר: צבע, גודל, מיקום הצורה. במפגשים הבאים נשחק גם עם הציר עצמו: בהתחלה נהפוך אותו לאופקי, ואחר כך נמתח אותו לאורך האלכסון. אנחנו משתמשים במראה אמיתית על מנת לבדוק את הפתרונות שלנו: האם ההשתקפות במראה תואמת את הצורה שמורכבת מאחוריה?

הבנים פותרים את התרגיל הזה בקלות מפתיעה, כמעט בלי טעויות. אני לא מצליח להבין למה ילדים מתקשים עם הנושא הזה (סימטריה) בכיתה ו'! בעקבות ההתלהבות של הילדים, הקדשנו לנושא הזה



איור 8. פסיפס. הפס האנכי מייצג "מראה" – ציר סימטריה. המורה מרכיב את הצורה שמשמאל לפס, והתלמיד צריך להרכיב את הצורה שממין לו.



איור 7. מופיעות כאן שתי קבוצות שבכל אחת מהן שלוש צורות: באחת שלוש צורות אדומות, ובשניה שלוש ריבועים. הריבוע האדום משותף לשתי הקבוצות; במתמטית, הריבוע הזה "שייך לחיתוך" של הקבוצות האלו.



איור 6. במקום לשאול מה יוצא דופן, אפשר להגדיר כל צורה בתורה כיוצאת דופן, ולהסביר מדוע היא יוצאת דופן.

עוד הרבה מפגשים. סימטריה היא תחום עשיר מאד ואסתטי מאד. עֵינֵנו בספרי מתמטיקה פופולרית עם תמונות של עיטורים סימטריים; ציירנו צורות צבעוניות סימטריות על דפי משבצות; יצרנו נגזרות סימטריות על ידי קיפול הדף לשניים; גזרנו פתיתי שלג לכבוד הנובי גוד; איתרנו שיבושים של הסימטריה באיורים שהיו אמורים להיות סימטריים אבל הוכנסו בהם טעויות; חיפשנו את כל צירי הסימטריה של צורות שונות, ועוד. הרבה ילדים מתקשים עם סוגים אחרים של איזומטריה, כמו סיבוב למשל, אבל מתמודדים מצוין עם סימטריה ביחס לציר.

הפסיפס הפך די מהר לכלי העבודה החביב עלי. זה לא משחק; זה אוצר שלם של בעיות בגיאומטריה, קומבינטוריקה, לוגיקה, ניחוש של חוקיות. יום אחד קיבלתי בעזרתו שיעור מאלף על סדרי עדיפויות של ילדים. הסיפור היה כזה. הבנים היו מגיעים למפגשים בשמחה, ולפעמים גם ביקשו להמשיך את המפגש אחרי שהודעתי שהוא הסתיים. הייתי גאה בעצמי, עד ששמתי לב שהם מבקשים להמשיך את המפגש רק כשאנחנו עובדים עם לוח הפסיפס. החלטתי לבדוק את העניין, ובמפגש הבא לא עבדנו איתו. ואכן כך היה: אני מודיע שהמפגש הסתיים, והילדים קמים ומתפזרים לבתיהם בנחת. התחלתי לאכול את עצמי. הפסיפס באמת יפהפה, לא פלא שהילדים נהנים לשחק בו. והמתמטיקה שלי, כך חשבתי, לא קשורה לזה; היא משמשת רק כמעמסה מיותרת על המשחק המעניין. החלטתי שבשיעור הבא אערוך ניסוי שיכריע בעניין. אנחנו שוב עובדים עם הפסיפס, ושוב הילדים לא רוצים לסיים את המפגש, ואז אני אומר להם: "לא, אנחנו מסיימים עכשיו, אבל אני מרשה לכם להמשיך לשחק בפסיפס". בתגובה כולם מתרעמים, ופיטר מכריז בהחלטיות, "לא! אנחנו רוצים חידות!".

כך הבנתי שהילדים זקוקים לחוויה מלאה, להנאה שהיא גם אינטלקטואלית וגם אסתטית. אם אחד מהחלקים חסר, החוויה נהיית פחות שלמה. עץ אשוח בלי צעצועים שמקשטים אותו נראה לילדים סתמי באותה מידה שנראים להם הצעצועים בלי העץ. החגיגות נובעת מהשילוב ביניהם. אני מקווה שבעתיד, כשילדי החוג ילמדו מתמטיקה אבסטרקטית יותר, הם יהנו ממנה יותר משאר בני גילם. הרי המושגים האבסטרקטיים יתחברו איפשהו, במעמקי התודעה שלהם, ל"עץ אשוח", ויקושרו בזכרונות ילדות של חידות צבעוניות.

גם עכשיו – אנחנו כבר אחרי שני סבבים, כלומר כל ילד פתר כבר שתי חידות בנושא של סימטריה, והגיע הזמן לסיים, אבל הילדים רוצים עוד ועוד. נדמה לי שהם כבר התעייפו. לפתע צץ במוחי רעיון: "עכשיו תחודו לי אתם חידות, ואני אנסה לפתור אותן". הילדים מתלהבים, ובפרץ מחודש של אנרגיה הם מרכיבים צורות, ואני מרכיב את הצורות הסימטריות להן. ואז אני חושב על עוד רעיון: אני מתחיל לזייף בכוונה. פיטר שם לב לזה ראשון; הילדים מאושרים. הם עוקבים בדריכות אחרי היד שלי, ובכל פעם שאני טועה הם פוצחים בקריאות קרב.

אבל באמת הגיע הזמן לסיים. אני מניח את הפסיפס בצד, מודה לכולם, ומודיע שהמפגש הסתיים.

– ומתי נעשה קסמים? – נזכר פתאום אנדריי.

– מה קרה לך, אנדריי, הרי אתה בעצמך עשית קסם! החבאתי את הכפתורים בכף היד, ואתה הצלחת

לספור אותם!

האמת היא שלא הוא הצליח אלא יבגני, אבל אנדריי כנראה כבר הספיק לשכוח מזה, כי הוא נראה די מרוצה. אנחנו קמים. אני מציץ בשעון: איך ייתכן שחלפו רק 25 דקות? תכף הילדים יתפזרו, ואני אשב לארגן את המחשבות שלי, להמציא חידות חדשות, גישות חדשות, מהלכים, וכמובן להדביק, לגזור ולצבוע: להכין את "החומר הדידקטי". הרי המפגש הבא בעוד שבוע בסך הכל.

התופעות של פיאז'ה: מציאות או תעתועי ראייה?

בספר הזה אני חוזר המון למה שנקרא "התופעות של פיאז'ה". מן הראוי שאקדיש להן כמה מילים. הפסיכולוג השווייצרי ז'אן פיאז'ה (Jean Piaget) הוא ללא ספק אחת הדמויות המשפיעות ביותר בתחום הפסיכולוגיה במאה העשרים. בחייו הארוכים (1896-1980) הוא כתב כ-50 ספרים וכ-500 מאמרים (את המספר המדויק כנראה גם הוא עצמו לא ידע). את המאמר המדעי הראשון שלו הוא פרסם בגיל 11: הוא עקב בפארק אחרי דרוור לבקן ותיאר אותו בכתב-עת כלשהו.

כילד, פיאז'ה עוסק ב"מלקולוגיה" – מדע הרכיכות – והופך די מהר למומחה בתחום. הוא מקבל הצעת עבודה נחשקת למדי: אוצר הרכיכות במוזיאון ז'נבה להיסטוריה של הטבע. בשלב זה הוא נאלץ להודות שהוא בסך הכל ילד. עד גיל 20, הוא כבר מלקולוג בעל שם עולמי.

ואז הוא משנה כיוון ומתחיל לעסוק בפסיכולוגיה של ילדים. עד גיל 30 הוא כבר הופך למומחה נודע בתחום הפסיכולוגיה של הילדים וכותב חמש מונוגרפיות שמתפרסמות בכל העולם. ואז קורה משהו מוזר. חמש המונוגרפיות האלו מאפילות לתקופה ארוכה על המשך הפעילות המחקרית של פיאז'ה. האזכור של השם "פיאז'ה" גורר תגובה אוטומטית: "אה, פיאז'ה, בטח שאני מכיר! חמשת הספרים המפורסמים...". הוא, בינתיים, מתקדם באותו קצב מסחרר. למעשה, בשלב ההוא גם העולם כבר לא ממש פנוי לעסוק בפסיכולוגיה של ילדים: עליית הפאשיזם, מלחמה, ההשתקמות אחריה... ובשוויצריה השקטה והניטרלית פיאז'ה ממשיך בעבודתו. בשנות החמישים לערך, היקף תרומתו למדע זוכה בהכרה. כדי לקבל מושג כללי על התיאוריה שלו, הכי כדאי, לדעתי, לקרוא את ספרו של ג'ון פלייבל "הפסיכולוגיה הגנטית של ז'אן פיאז'ה".

פיאז'ה לא החשיב את עצמו לפסיכולוג, אלא לאפיסטמולוג, כלומר, למומחה בתורת ההכרה. התחום הזה חוקר את האופן שבו אנחנו יודעים דברים. אם אנחנו לא רוצים לזרוק לחלל האוויר מילים ריקות אלא לעסוק בשאלות קונקרטיות, יש לנו שתי אפשרויות: או לחקור את ההיסטוריה של ההכרה, כלומר, איך אנשים למדו את העולם בהדרגה, או לחקור איך זה קורה אצל ילדים. פיאז'ה בחר באפשרות השנייה. מכל המחקרים התיאורטיים והניסויים של פיאז'ה, התופעות של פיאז'ה³ זכו להכרה הגדולה ביותר. כבר הזכרתי אותן לעיל. ילד קטן לא מבין שאם מסדרים כמה חפצים (אבנים, קוביות, ...) בצורה אחרת, הכמות שלהם לא משתנה. כך, המושג "מספר" לא נגיש לו, גם אם הוא "יודע" לספור עד מאה". אחר כך הילד גדל, ועם הזמן מתפתחת אצלו הבנה של חוק שימור הכמות. ועם זאת, נצטרך להמתין עוד שנה וחצי – שנתיים עד שהוא ילמד את המקבילה של החוק הזה לכמויות רציפות: אם יוצרים נחש מגוש של פלסטלינה, כמות הפלסטלינה נשארת זהה; אם שופכים מים מכוס לקערה, כמות המים לא משתנה. כך גם לגבי עוד חוקיות דומות – למשל, אם יש שני דברים בכמות זהה, ומאחד מהם לוקחים יותר ומהשני פחות, אז מזה שלקחו ממנו יותר, נשאר פחות. קצת קשה להאמין לכל זה; החוקיות האלו נראות לנו טריוויאליות מדי.

מה שהכי מדהים בעיני בתגלית הנפלאה הזו הוא שלא היה צורך בכלים מורכבים בשביל לגלות אותה. היא "הסתובבה לכולם בין הרגליים", מילולית, ולא היה צריך לחכות למאה ה-20 בשבילה: היא הייתה נגישה לאפלטון ולאוקלידוס בדיוק באותה מידה שהיא נגישה לנו. אבל הם לא חשבו על זה. היה דרוש עניין באופן שבו האדם מכיר את העולם, הגדרה נכונה של השאלה, תשומת לב, וכמובן, ניסוי מקיף. מעניין לציין שהתופעות של פיאז'ה זכו להתנגדות רבה מצד הקהילה המדעית. עד היום, עשרות שנים אחרי, יש אנשים שבתגובה לתופעות האלו מנופפים בידם בביטול ואומרים שהכל שטויות. הרי אנחנו שואלים את הילד שאלות מילוליות, נכון? אנחנו שואלים מה יש יותר, מה פחות, או האם הכמות זהה. מי הגדיר להם, ומתי, מה בדיוק המשמעות של המילים האלו? הילד פשוט מבין אותן אחרת מאיתנו, זה הכל. מישהו שאני מכיר, שעוסק בלוגיקה מתמטית, ניסח את זה כך:

– הרי לא הגדרת להם את המושג "יותר". אז הם מבינים אותו בדרך אחרת. הם חושבים ש"יותר" זה אומר שהשורה ארוכה יותר.

מה אפשר לענות על זה? נכון, לא הגדרתי. אבל מה הייתי אמור להגיד? שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל מקבוצה אחת לתת-קבוצה של הקבוצה השנייה? מה עוד שזה לא פותר שום בעיה: מנין לנו שאם מצאנו פונקציה כזו, היא תהיה קיימת גם בפעם הבאה שנבדוק? אולי היה צריך גם להוכיח את זה... אני מתווכח איתו, אבל אני מרגיש שאני לא מצליח לגעת בנקודה. אני עונה שעשו ניסויים שבהם

³ רשימה חלקית של נושאים נוספים שהוא חקר: לוגיקה, זמן, תנועה ומהירות, מרחב, גיאומטריה, מקריות, הפנמה, שיקול דעת של מתבגרים, דמיון, שפה, שיפוט מוסרי של ילדים, סיבתיות, סיווג ועוד.

שקלו יחד עם הילדים את גושי הפלסטלינה לפני ואחרי שיצרו מהם נחשים... אבל בעצם, אז מה ששקלו? הילד הרי לא יודע איך בנוי המשקל ומה המשמעות של המדידה שלו. אין לויכוח הזה סוף. איך שלא נציג לילד את השאלה, תמיד יהיה בתוכם איזשהו "אמצעי מקשר", בין אם אלו מילים, משקל, או פעולות חשבוניות. ותמיד אפשר לתלות את האשמה בכך שה"ממשק" לא מוגדר מספיק: אנחנו מבינים אותו באופן אחד, והילד באופן אחר. אפשר כמובן לשאול למה בגיל שבע הילד כבר עונה נכון על כל השאלות, למרות שאף אחד, כמו קודם, לא הגדיר לו שום דבר. אבל בויכוח מדעי טיעון מהסוג הזה – "אז איך אתה מסביר את זה ש...?" – הוא לא קביל. על המבקר אין שום חובת הוכחה – חובת ההוכחה היא על הוגה התיאוריה בלבד. כמובן, במידה שבה אפשר בכלל להוכיח דברים בפסיכולוגיה.

בלי להכנס לעומק הפילוסופי של הדיון, אני רוצה להביע את דעתי בנושא הזה. אחרי הרבה שנים של עבודה עם ילדים, אני לא זקוק לשום הוכחות. אני יודע שפיאז'ה צודק. צפיתי בתופעות שהוא הגדיר כל כך הרבה פעמים ובמגוון כל כך גדול של סיטואציות – חלקן יזומות על ידי וחלקן ספונטניות לחלוטין – שלא צריך לשכנע אותי. פעם, למשל, באו אלינו אורחים, והיה חסר כסא אחד. דימה, שהיה אז בן שלוש, התחיל להציע דרכים אחרות להושיב את האורחים, ובכל פעם התברר מחדש שחסר כסא. מספיק היה לראות את הבעת הפנים המרוכזת שלו בשביל להבין: הסמנטיקה של המילה "יותר" היא בכלל לא העניין. (אבל כמובן שלא הייתי שם לב לזה אם לא הייתי מכיר את התיאוריות של פיאז'ה).

פסיכולוגים השקיעו לא מעט זמן ויצירתיות בניסיון ללמד ילדים את חוק שימור הכמות (או, מנקודת המבט של המתנגדים לתיאוריה, את המשמעות של השאלות הנשאלות). התוצאה, בדרך כלל, הייתה מאכזבת (בהמשך אספר על הצלחה אחת, יחסית מאד). בהקשר הזה, אני הכי אוהב את האנקדוטה הבאה. לקחו הרבה ילדים שהשתתפו בניסוי כזה, והצליחו לבודד מתוכם כמה שהיה נראה ש"הבינו". לכל הפחות, הם ענו נכון על כל השאלות של הבודדים: "כמות הפלסטלינה נשארה זהה, כי לא הוספנו לה כלום ולא לקחנו ממנה, רק שינינו את הצורה שלה". ואז החוקרים עשו עוד צעד: הם ניסו להחזיר את הגלגל לאחור, לגרום לילדים לשכוח את מה שלמדו. כשילד היה עונה נכון, הם היו מורידים חתיכה מנחש הפלסטלינה בלי שהילד ישים לב, מודדים אותו את הנחש, ומראים לו שהפלסטלינה נהייתה קלה יותר. כך הסתבר שגם הילדים שהבינו את חוק השימור שכחו ממנו בקלות רבה. הם עברו להסביר שאכן, כמות הפלסטלינה פחתה, כי הפכנו את הכדור לנחש. לעומת זאת, הילדים שידעו את חוק שימור הכמות עוד לפני הניסוי לא התבלבלו. באותם מקרים בדיוק הם אמרו:

– כנראה שחתיכה מהפלסטלינה נפלה ולא שמנו לב.

ובכן, אם כל כך קשה, ואולי אפילו בלתי אפשרי, ללמד ילד את המושג "מספר", מה בעצם אני מנסה להשיג? מה המשמעות של המפגשים שלי? כבר התייחסתי לזה, ועוד אחזור על זה: המשמעות היא המפגשים עצמם. התכלית היא שיהיה מעניין. לשאול שאלות, ולחפש תשובות, כאודת חיים.

* * *

לסיום החלק הזה, אספר עוד שתי אנקדוטות. הראשונה היא מהילדות שלי. אני לא יודע בן כמה הייתי; כנראה בערך חמש. גרנו בויטבסק. היה לנו שכן, זקן שאהב לשוחח עם ילדים מדי פעם. נחשבתי לילד חכם שטוב בחשבון. יום אחד הזקן ביקש שאכפיל 3 ב-5. כבר ידעתי שלהכפיל זה לחבר מספר עם עצמו כמה-שצריך פעמים. צללתי למשימה. קודם 3+3; זה 6, עד כאן זה קל. הלאה: 6+3=9, זה רק קצת יותר קשה, אבל העיקר הוא לא החיבור עצמו, אלא לא לשכוח כמה פעמים כבר חיברתי. עכשיו מגיע החלק הכי קשה: 9+3. ראשית, זה חוצה את המספר עשר, ושנית, צריך להמשיך לעקוב כמה פעמים כבר חיברתי... בסוף, כשכבר הייתי על סף יאוש, הצלחתי בכוחותי האחרונים לחבר 12 ו-3 ועניתי:

– חמש עשרה.

– נכון! – ענה הזקן, – איך חישבת?

הסברתי.

– למה ככה מסובך? – התפלא הזקן, – היית יכול פשוט לחבר $5+5+5$.
 הייתי המום ומבולבל. לחשב $5+5+5$ זה קל: $5+5=10$ (ברור), ו- $10+5=15$ (גם ברור). ומה שהכי מדהים, הוא שהתוצאה היא באמת 15. אבל למה?!

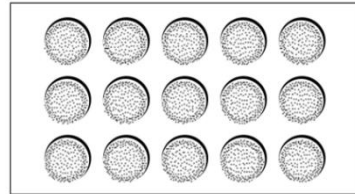
הסיפור הזה ליווה אותי הרבה זמן. חיפשתי הסבר, ולא מצאתי. בבית הספר גיליתי שבכיתה ו' נתחיל ללמוד אלגברה, ואז נלמד נוסחאות. ילדים לרוב לא חושבים להציץ בספרי לימוד של כיתות גבוהות יותר. אז חיכיתי בסבלנות לכיתה ו', בציפיה שאז תגיע ההארה שאני מחכה לה כל כך הרבה זמן. ובכיתה ו' למדתי את הנוסחה $ab = ba$, ובהיתי בה ארוכות, ולא חוויתי שום הארה. בכיתה ט' הגעתי לפנימיית קולמגורוב המפורסמת לפיזיקה ומתמטיקה שבאוניברסיטת מוסקבה. התכנית שם הייתה מתקדמת למדי; די מהר הגענו ללמוד על חבורות, שדות וחוגים. "אלהים, איזה טיפש הייתי," חשבתי לעצמי, "הרי זו בסך הכל אקסיומה, שנקראת קומוטיביביות, ואקסיומות לא מוכיחים".

הזמן עבר, והחכמתי עוד קצת. הבנתי שאקסיומה היא אמנם אקסיומה, אבל הכניסו אותה לא כי מישוהו נתן הנחיה כזו, אלא כי התכונה הזו מתקיימת בכפל של מספרים טבעיים.

(נציין פה בסוגריים שהעלאה בחזקה ("הכפל בעצמך כמה-שצריך פעמים"), למשל, היא לא קומוטיבית. הכפילו 5 בעצמו 3 פעמים, ואחר כך הכפילו 3 בעצמו 5 פעמים – התוצאות יהיו שונות. ואילו במקרה של "חבר עם עצמך כמה-שצריך פעמים" מקבלים את אותה תוצאה משום מה).

אני כבר לא זוכר איך ומתי הבנתי שמדובר בסך הכל בדרכים שונות לספור את אותה כמות. ניקח כמה אבנים ונסדר אותן בשלוש שורות שבכל אחת חמש אבנים; זה אותו דבר כמו לסדר אותן בחמש שורות שבכל אחת שלוש אבנים – תלוי למה אנחנו קוראים "שורה" (איור 9). אז כל הסיפור הוא שכשסופרים את אותם חפצים בסדר שונה, מקבלים את אותה תוצאה. אני משער שהתכונה הזו לא כל כך טריוויאלית אם בשביל להבין אותה נדרשו לי כל כך הרבה שנים.

איור 9. יש פה שלוש שורות אופקיות שבכל אחת חמישה עיגולים – סה"כ $3 \cdot 5$. מצד שני, יש פה חמש שורות אנכיות שבכל אחת שלושה עיגולים, סה"כ $5 \cdot 3$. אם יוצאים מנקודת הנחה שהסדר שבו סופרים את העיגולים לא משנה, מגיעים למסקנה ש- $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.



לסיכום, עוד סיפור אחד. ליתר דיוק, שיחה בין זוג זקנים שהייתי עד לה. האשה רוצה להכין חביתה לארוחת הערב, ומגלה שהמחבת שבה היא בדרך כלל מטגנת אותה נמצאת בכיור.
 – מיכאל, המחבת הגדולה מלוכלכת, – היא צועקת מהמטבח.
 – אז תכיני במחבת הקטנה, – צועק הבעל בחזרה.
 – אני חוששת שלא יהיה מספיק...
 – אז תשטפי את הגדולה, – עונה הבעל במשיכת כתפיים.
 ומה עם חוק שימור הכמות?!

ברור שזה תלוי בסיטואציה. דמיינו שאותם שני זקנים היו ניגשים למבחן, ובמבחן הייתה שאלה: "אם מעבירים את תכולתן של מספר ביצים ממחבת אחת לאחרת, הכמות שלה: א. תגדל, ב. תקטן, ג. לא תשתנה, ד. תלוי בגדלי המחבתות". אין לי ספק שבמקרה הזה התשובה שלהם הייתה נכונה. זה מעלה כל מיני שאלות שאני מתקשה אפילו לנסח בבירור. ראשית, לגבי היחס בין ידיעה פורמלית למעשית. ושנית, לגבי מה שמנחה אותנו בחיי היומיום: האם אלה "טיעונים הגיוניים", או "מה שנראה לנו נכון בעיניך"? (אתם שמים לב לכמות המרכאות פה? זה בגלל שאני לא מצליח לנסח את הרעיון באופן "קצר וקולע").

על התועלת שבקריאת ספרי פסיכולוגיה

לא קל לשכנע מתמטיקאים שיש משהו מעניין בספרי פסיכולוגיה. כל דבר בספרים האלה מציק להם: הטרמינולוגיה, רמת ההוכחות, אופן הגדרת השאלות. אני זוכר שיחה שניהלתי ונקטעה באיבה, כשסיפרתי לסטודנט צעיר על סדרה של ניסויים.

– בוא ניקח למשל את השאלה הבאה: האם תינוק בן חודשיים מסוגל ללמוד?
הסטודנט גיחך.

– מה, זה לא מובן מאליו? היו שואלים אותי, הייתי אומר להם את התשובה במקום.
מה כבר אפשר לענות על זה? ברור שהוא מסוגל, זה באמת מובן מאליו. מכר צרפתי שלי הגיב באופן
דומה על תגלית שזכתה בפרס נובל בכלכלה. הזוכה הוכיח שהתנהגות כלכלית של אנשים אינה
רציונלית.

– היה יכול לשאול את העוזרת שלי – משך בכתפיו.

הרגשתי שהסטודנט שלי טועה, אבל לקח לי זמן להבין מה אפשר לענות לו. נשאל את עצמנו שאלה
מתחום אחר: האם חוקי הפיזיקה זהים בזמנים שונים ובמקומות שונים? התשובה, כנראה, מובנת מאליה
באותה מידה כמו במקרה הנ"ל. כל פילוסוף יגיד לכם שברור שהם זהים, אחרת הם לא ראויים להיקרא
לחוקי פיזיקה. והוא צודק, כמובן. אבל מה יענה על זה פיזיקאי?

הפיזיקאי נמצא בעמדה יותר מורכבת: הוא לא עוסק במילים כלליות, אלא בחוקים קונקרטיים –
למשל, במשוואות מקסוול. גם את המשפט האמורפי על זמנים ומקומות שונים צריך לדייק, ולהסביר מה
בדיוק משתנה במעבר ממערכת צירים אחת לאחרת. אם תמשיכו לפתח את הרעיון הזה, תגלו את
טרנספורמציות לורנץ, ובהמשך גם את תורת היחסות של איינשטיין. וזה רק הצעד הראשון: משוואות
מקסוול מתארות השפעות אלקטרו-מגנטיות, אבל יש עוד סוגים של כוחות: חלשים, חזקים,
גרביטציוניים. כבר מאות שנים פיזיקאים מנסים לתת צורה קונקרטית לעקרונות פילוסופיים "מובנים
מאליהם" שעוסקים בשימור חוקים בזמן ובמרחב, והדרך עוד ארוכה.

ובכן, שורש הבעיה הוא ביכולת לשאול שאלות במושגים קונקרטיים ולא כלליים-פילוסופיים,
שאלות שאפשר לבחון ולבדוק בעזרת ניסוי. הפסיכולוגיה לא עוסקת בנוסחאות ובמשוואות, כמובן, ועם
זאת, במקום לשאול "האם תינוק מסוגל ללמוד", בואו נשאל משהו קונקרטי יותר. למשל: האם בגיל
חודשיים הוא יכול לזכור סדרה של ארבעה ביטים? נניח, את הסדרה 0011? יחסית לשאלה הכללית
המקורית זה נשמע די עלוב, אבל לא כל כך קל להגדיר ניסוי שיענה על השאלה הפשוטה הזו.
הקושי הראשון: איך אנחנו יכולים לדעת שהתינוק באמת למד את האינפורמציה "0011"? וזה עוד
השלב הקל. אפשר לבדוק, למשל, האם הוא יכול לסובב את הראש פעמיים שמאלה ואז פעמיים ימינה
כדי להשיג איזושהי מטרה.

קושי שני, משמעותי יותר: איזו מטרה אנחנו יכולים להגדיר לו, ואיך נעשה שהוא ירצה להשיג
אותה? מה יכול לעניין אותו? בניסויים בבעלי חיים יש דרך פשוטה: מרעיבים אותם, במחילה. מביאים
את המשקל של החיה ל-80% מהמשקל התקין, ואז, בניסיון להשיג אוכל, היא מפגינה יכולות מדהימות.
אף אחד לא עושה דבר כזה לילדים, תודה לאל. אז מה עושים?

בפסיכולוגיה, הרבה פעמים קורה שמגלים משהו חדש לא בדרך מהשאלה לפתרון, אלא "מהצד". כך
גם כאן: דווקא התשובה לשאלה האחרונה פוקחת לנו את העיניים לגלות אמיתות חדשות. החוקרים ניסו
מגוון תמריצים: רעשנים מקושטים, מנגינות עליונות, אורות צבעוניים. התברר שמספיק נורה פשוטה.
התמריץ האמיתי היה עצם האפשרות ללמוד!

זה עובד בערך כך: הילד מגלה במקרה שכשהוא מסובב את הראש שמאלה, נדלקת נורה. הוא בודק
את זה כמה פעמים, אחר כך נרגע, ורק מדי פעם, לעתים רחוקות, מוודא שהכל כשורה. באיזשהו שלב
מתברר פתאום שלא הכל כשורה: הנורה לא נדלקת. הוא מתחיל לחפש את הסיבה, עד שהוא מגלה
שבשביל להדליק הנורה, צריך לסובב את הראש פעם אחת ימינה ואז פעם אחת שמאלה. אז מתחיל עוד
סבב: סדרה של בדיקות ואז תקופה של רגיעה.

אחר כך שוב מתברר פתאום שהנורה לא מגיבה ל"פקודה". שוב מתחיל חיפוש, עד ההגעה לפתרון.
וכן הלאה, עד ה-0011. (תיאור הניסוי הזה לקוח מספרו של ת. באוור, "התפתחות פסיכולוגית של
התינוק", 1985).

מסתבר שכך זה עובד. התמריץ העיקרי ללמידה הוא לא הפרס אלא הלמידה עצמה, היכולת לגלות
משהו חדש. אנחנו נדרשים רק לא לדכא את הסקרנות הזו, וכנראה גם לספק לילד סביבה מספיק מגוונת

בשביל שהיא לא תדעך. גם בזה הפסיכולוגיה יכולה לתת לנו כלים מפתיעים. אני מצטט מספרם של ו. רוטנברג וו. ארשבסקי "חיפוש ואדפטציה" (1984):

"בניסוי שביצעו המדענים האמריקאים ג'ונס, ניישן ומסד, לקחו ארבע קבוצות של נסיינים. בשלב הראשון של הניסוי, קבוצת הנסיינים הראשונה קיבלה חידות שלא הצליחה לפתור אף אחד מהן (0% הצלחה), הקבוצה השנייה קיבלה חידות שהצליחה לפתור את כולן (100% הצלחה), והקבוצה השלישית הצליחה לפתור חצי מהחידות (50% הצלחה). בשלב בשני, הנסיינים של כל שלוש הקבוצות ושל הקבוצה הרביעית, קבוצת הביקורת, קיבלו סדרה של חידות לא פתירות, בנסיון לייצר אצלם חוסר אונים נרכש. בשלב השלישי והמסכם, הוצעו לכל הנסיינים חידות ברמת קושי בינונית, וכך נבדקה ההשפעה של השלב הקודם. התברר שרק הקבוצה השלישית "פיתחה נוגדנים" לחוסר האונים הנרכש. הם התמודדו באופן הטוב ביותר עם החידות שבשלב השלישי. לא נמצאו הבדלים משמעותיים בין הקבוצה הראשונה, השנייה, וקבוצת הביקורת. מה שהכי מעניין בניסוי הזה, הוא שהן 100% הצלחה והן 100% כשלון לא גרמו לנסיינים להיות חסינים מפני השפעתו של כשלונם בשלב השני של הניסוי".

תוצאות דומות מאד מתקבלות בניסויים על ילדים, על גורים ועל חולדות. נכון שזה מעורר מחשבה? עד היום אני מצטער שלא יצא לי לספר על כל זה לסטודנט ההוא.

אנחנו רוצים שהילדים שלנו יגדלו להיות חכמים ושהחשיבה שלהם תהיה מפותחת, נכון? מה אנחנו צריכים לעשות בשביל זה?

בספרו של אורי ברונפנברגר "שני עולמות ילדות: ילדים בארה"ב ובבריה"מ" (1976) הוא מספר על פרויקט שקיבל בהמשך את הכינוי "ניסוי שלוש השנים". מדובר בניסיון לשלב בחברה ילדים בעלי פיגור שכלי שהתגוררו במוסד מיוחד, וללמד אותם להיות עצמאיים. היו הרבה שלבים בניסוי הזה, אבל השלב הכי נוגע ללב היה הראשון. כל ילד הוצמד ל"אם ממלאת מקום"; האמהות האלו היו נשים בעלות פיגור שכלי שהתגוררו באותו מוסד. אחרי שנתיים הילדים הראו עליה של 20-30 נקודות ברמת המשכל, בעוד שרמת המשכל של ילדים בקבוצת הביקורת ירדה. מה שהכי הרשים אותי היה העובדה שהאמהות האלו בבירור לא יכלו ללמד את הילדים חומר שיפתח אותם שכלית. שום חוגי בית מתמטיים, חידות, או משחקי חשיבה. הן יכלו בעיקר לחבק את הילדים, לנשק ולחטל אותם. מתברר שלפחות בגיל מסוים, חום רגשי תורם הרבה יותר להתפתחות הילד, כולל – אני מדגיש – להתפתחות השכלית שלו, מאשר סוגים אחרים של העשרה. הורים, אל תשכחו את זה!

אני לא רוצה להפוך את הספר הזה לספר פסיכולוגיה, מה עוד שאני לא מומחה בתחום, אבל בכל זאת אחזור פעם נוספת לתופעות של פיאז'ה ואספר על הניסוי היחיד שבו ילדים הצליחו חלקית ללמוד את חוק שימור הכמות. מדובר ב"קונפליקטים הקוגניטיביים" של יאן סמדסלונד (הם מתוארים, בין השאר, בספר של ג'ון פלייבל שהזכרתי לעיל). אני מצטט:

"אם, למשל, ילד חשב שכשמשטחים כדור פלסטלינה, כמות הפלסטלינה גדלה, והסרה של חתיכה ממנו מקטינה את הכמות, החוקר ביצע את שתי הפעולות בו זמנית [...] התהליך הזה נבחר על מנת לגרום לנסיין לעצור ולהתלבט בין שתי אפשרויות סותרות [ההדרגה שלי – א. ז.]; הציפיה הייתה שהילד יאמץ בהדרגה סכמה פשוטה ועקבית יותר של חיסור-הוספה [...]"

בניסויים האלה לא הסבירו ולא שקלו עם הילדים שום דבר. הצליחו "ללמד" ככה ארבעה ילדים מתוך שלושה עשר, ולא הצליחו לגרום להם לשכוח אחר כך את מה שלמדו.

אני יודע שאני נוטה להסיק מסקנות מרחיקות לכת בלי בסיס מספיק מוצק, וגם לסתור את עצמי מדי פעם (לפני רגע טענתי שאנחנו לא מנסים ללמד את הילד את חוק שימור הכמות, ופתאום אני מנסה להסביר איך אפשר לעשות את זה). לא חשוב. מה שאני מנסה להפוך לעקרון יסודי בשיטה הפדגוגית שלי הוא לגרום להם לעצור, לגרום להם להתלבט בין שתי אפשרויות סותרות. את הגישה הזו אני מעמיד כנגד גישה אחרת, שמניחה שאינטליגנציה היא היכולת לפתור חידות מהר. אני מסתכן בפעם המי-יודע-כמה בכך שאשמע מתנשא, וטוען שהמטרה שלנו היא לגדל אנשים שעוזרים לחשוב. בהמשך אביא דוגמאות.

איך להתייחס לתיאוריות

מונח לידי הספר המרתק בעל השם המשעמם "תבניות מתמטיות באקולוגיה: ניתוח היסטורי-מתודולוגי". לספר חמישה מחברים: ו. טוטובלין, י. ברבשב, א. גריגוריאן, ג. דביאטקוב, וי. אוגר. לכאורה אין קשר בין הספר לבין הדיון שלנו. אבל דווקא בספר הזה קראתי לראשונה ניסוח מדויק של מה שבמשך זמן רב לא הצלחתי לנסח בעצמי – איך להתייחס למודלים תיאורטיים. נדמה לי שביחס לפסיכולוגיה זה עוד יותר נכון (וחשוב) מאשר ביחס לאקולוגיה.

הספר בוחן, בין השאר, את משוואות לוטקה-וולטר. הרעיון יחסית פשוט. נניח שיש לנו שועלים וארנבים. ככל שהשועלים טורפים יותר את הארנבים, יש פחות ופחות ארנבים, ואז לשועלים נוצר מחסור באוכל. בהתאם, כמות השועלים קטנה, חיי הארנבים הופכים לבטוחים יותר, וכמות הארנבים גדלה. לשועלים יש שוב שפע של אוכל, והכמות שלהם גדלה; כמות הארנבים שוב יורדת, וכן הלאה. אפשר לתרגם את המודל הזה למשוואות דיפרנציאליות. למרבה המזל, יש להן אפילו פתרון מפורש (מה שנדיר בתחום הזה), ואפשר לחשב את התנודות כפונקציה של הזמן.

התיאוריה מוכנה; עכשיו צריך לערוך ניסוי שיאשש אותה. ניסויים אמפיריים, כלומר ספירה של אוכלוסיות של בעלי חיים בטבע (לוא דווקא שועלים וארנבים; כל שני סוגים של בעלי חיים שאחד טורף את השני), לא נותנים את התוצאות שהיינו מצפים להן, וזה הגיוני: יש יותר מדי השפעות סביבתיות. אם מנסים להתחשב בהשפעות הסביבתיות האלו, מקבלים מודל נורא מסובך, ולפיכך, לא משכנע. אפשר כמובן לערוך ניסוי במעבדה, שבה כל ההשפעות הסביבתיות מבוקרות היטב, וגם הזנים שבוחרים בהם – שמרים, למשל – הם זנים שקל יותר לעבוד איתם מאשר עם בעלי חיים. אבל אפילו אז, העיבוד הסטטיסטי של הנתונים לא נעשה בצורה מספיק טובה (מדובר בשנות ה-30, הסטטיסטיקה המתמטית הייתה עוד בחיתוליה), והיה קשה להסיק מסקנות ברורות. באזור מפרץ הדסון אפילו גילו תנודות בכמות הארנבים וחתולי הבר, רק שהמחזוריות של התנודות האלו הייתה הפוכה, כאילו שהארנבים הם הטורפים וחתולי הבר הם הנטרפים. המאמר שעסק בתופעה הזו פורסם תחת הכותרת הסרקסטית "האם ארנבים טורפים חתולי בר?".

בקיצור, לא הצליחו לערוך ניסוי שיאשש את התיאוריה. מה המסקנה? נזרוק את התיאוריה לפח? יש פילוסופים – מבקרי מדע – שטוענים שזה בדיוק מה שצריך לעשות. אבל כותבי הספר הם לא פילוסופים, אלא מדענים, והם מגיעים למסקנה ההפוכה. הם אומרים כך: בנסיון לאשש (או להפריך, או לדייק, או לפתח) את התיאוריה של לוקה-וולטר, המומחים ביצעו אינספור ניסויים ומדידות, וצברו נסיון בעל ערך. ייתכן שאי אפשר לנסח אותו במשוואות פשוטות, ועם זאת, האקולוגים היום יודעים הרבה יותר משידעו בשנות ה-20 של המאה הקודמת. בלי נקודת ההתחלה הזו הם פשוט לא היו יודעים איך לגשת לבעיה, מה למדוד ולשם מה, והם היו נתקעים עד היום בשלב של ההצהרות הכלליות בסגנון "הכל בטבע קשור זה בזה".

צריך רק לקחת בחשבון שמי שממציא תיאוריה משקיע בה כל כך הרבה משאבים נפשיים, שהוא עלול להאמין בה כאילו ניתנה משמיים. אני, כחובבן, יכול ללהטט במגוון תיאוריות, כולל כאלו שסותרות אחת את השניה, אני יכול להמציא בעצמי תיאוריות חדשות על סמך שום דבר, ולמחרת לחזור בי מהן. יש תיאוריות פסיכולוגיות שאני מאמין בהן לגמרי, למשל, התופעות של פיאז'ה. יש גם כאלו שאני לא מאמין בהן בכלל, למשל "תיאוריית העיצוב ההדרגתי של הפעולות המנטליות" המקובלת במדינתנו, או ההסבר של פיאז'ה לגבי האופן שבו הילד רוכש שפת אם (תוכלו לקרוא על כך בספרו הנהדר של סטיבן פינקר "האינסטינקט הלשוני: כיצד המוח יוצר שפה"). אבל האמת היא שכל התיאוריות מעניינות, שכן כולן מזינות את המוח, ובמקרה שלי הן גם עוזרות להמציא חידות.

כותבי הספר על האקולוגיה מספרים לנו את המשל הבא. קבוצה קטנה של חוקרים מבקרת באיים של הים הלבן. הם שמעו שבאיזשהו אי באזור יש אגם של מים מתוקים, שבו אפשר לדוג אוקונוסים. האם ייתכן שזה האי שבו הם נמצאים כרגע? איך ימצאו את האגם? האזור רצוף הרים וביצות. הנה רעיון ("תיאוריה"): המים מהאגם צריכים להגיע לאנשהו; כנראה שנשפך ממנו נחל, ויכול להיות שלאורך הנחל יש שביל. הם הולכים לאורך חוף הים, עד שהם מגיעים לנחל שלאורכו יש שביל. נהדר! הם עולים

במעלה השביל לאורך הנחל, אבל באיזשהו שלב הנחל נעלם, ואיתו גם השביל, והם מטפסים על איזה הר שממנו רואים רק יער. במשך איזה זמן הם מסתובבים שם, עד שפתאום הם מגיעים איכשהו לשביל, שמוביל אותם לאגם. והאוקונוסים שם אכן נהדרים. מוסר השכל: תפקידן של התיאוריות אינו לשקף את המציאות, אלא לתת לנו נקודת התחלה בשביל שנוכל לעשות משהו – ומשם כבר נראה. (אם כי, כמו שמדגישים כותבי הספר במקום אחר, תיאוריה נכונה היא בכל זאת עדיפה על תיאוריה שגויה). הגיע הזמן שגם אני אפסיק לקשקש על נושאים כלליים ו"אתחיל לעשות משהו"; נחזור לחוג שלנו.

2 החוג של הבנים – השנה הראשונה

כמו שכבר הזכרתי, התחלתי להעביר את החוג במרץ 1980, אבל התחלתי לרשום רק בפברואר 1981. עשרים המפגשים הראשונים "הלכו לאבדון"; היומן מתחיל במפגש ה-21.

הבהרה חשובה

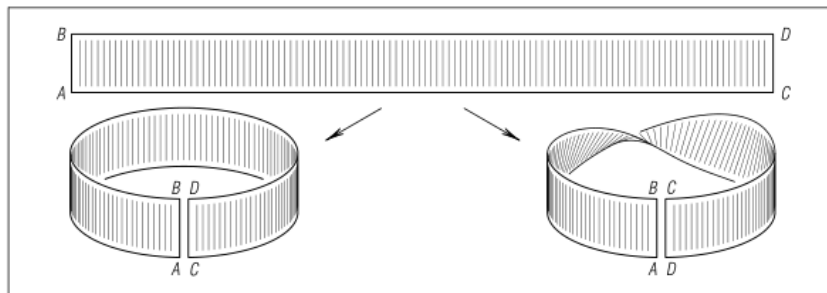
נתתי כותרת לכל אחד מהמפגשים, אבל אין צורך להתייחס אליה ברצינות רבה מדי. בדרך כלל במפגש היו כמה תרגילים שונים; הכותרת משקפת רק אחד מהם, לרוב זה שמבוסס על רעיון חדש או זה שראוי במיוחד לציון מסיבה כזו או אחרת. ולפעמים הכותרת בכלל לא קשורה לתרגילים, אלא לאיזושהי התרחשות או לתפנית בעלילה.

מפגש 21. טבעת מוביוס

יום רביעי, 4 בפברואר 1981. 10:30-11:00. דימה, פיטר, יבגני ואנדריי.

תרגיל 1.

גזרנו דף לארבע רצועות, שמהן יצרנו ארבע טבעות מוביוס. למען הקוראים הלא-מתמטיקאים, אסביר מהי טבעת מוביוס. אם לוקחים רצועת נייר ארוכה ומדביקים את שני הקצוות שלה "רגיל", מקבלים צילינדר – כמו שמתואר באיור 10 משמאל. אם לפני ההדבקה מסובבים את אחד הקצוות ב- 180° , מקבלים את הצורה שמופיעה באיור 10 מימין. הצורה הזו נקראת טבעת מוביוס. לצילינדר יש שני "שטחי פנים" – החיצוני והפנימי. אפשר, למשל, לצבוע אותם בשני צבעים שונים. לטבעת מוביוס, לעומת זאת, יש רק שטח פנים אחד. נסו לצבוע את הצד הפנימי שלו – ובלי שתשימו לב, תעברו לצד החיצוני.



איור 10. שתי דרכים להדביק קצוות של רצועת נייר. משמאל – צילינדר רגיל, מימין – טבעת מוביוס.

לעצמי אני יוצר צילינדר רגיל, לצורך ההשוואה. אני מספר להם על שתי נמלים שמתחרות למי יש בית יותר מעניין. על אחת מהטבעות (זו של דימה) אני מדגים איך נמלה הולכת בצד אחד של הטבעת ומגיעה לצד השני. על טבעת אחרת (של יבגני) אני מדגים איך נמלה הולכת לאורך שפה אחת של הטבעת ומגיעה לשפה השנייה.

[הייתי צריך לעשות את זה יותר לאט, לתת להם להשתכנע בעצמם (כל אחד עם הטבעת שלו) שיש רק צד אחד ורק שפה אחת].

אני גוזר בקו האמצע את הצילינדר, ואחר כך את טבעת המוביוס. בשתי הפעמים אני מבקש מהם לנחש מה נקבל. אחר כך אני גוזר את מה שקיבלנו בקו האמצע, ומבקש מהם לנחש שוב. [בפעם השנייה אפשר לחתוך בשליש הרוחב במקום באמצע: ככה רואים יותר טוב את נקודת החיבור בין שני החלקים].

אני מראה להם כדור שמורכב משני חצאים, ומסביר שהשפה של החצאים נעלמת כשמחברים אותם. אחר כך אני מראה להם איך אפשר להרכיב טבעת משני גלילי גומי (גם אז השפה נעלמת). אני מספר להם מה קורה אם מדביקים שתי טבעות מוביוס לאורך השפות שלהן (השפה תיעלם, אבל אפשר לעבור

מהצד החיצוני לפנימי). הם לא מתרשמים. אני מספר להם שאם מוזגים חלב בצד הפנימי מגלים שהוא הגיע החוצה.

– אז מה? הוא פשוט נשפך.

[הייתי צריך להגיד להם שהחלב הגיע החוצה בלי לחצות את השפה].

תרגיל 2.

כמה עולה כרטיס למטרונית, לאוטובוס, לרכבת הקלה, לרכבת התחתית?⁴ איזה מכונות יש במטרונית? (מקבלות רק מטבעות של 5 קופייקות ומכניסות אותך פנימה; אין כרטיסים). איזה מכונות יש באוטובוס? (מקבלות את כל סוגי המטבעות ומוציאות כרטיס).

עכשיו אנחנו צריכים למצוא כמה שיותר דרכים ליצור אוסף של חמש קופייקות. (מניחים את המטבעות על השולחן בערמות נפרדות. בשביל להרכיב חמש קופייקות בכל הדרכים האפשריות, צריך מטבע אחד של חמש קופייקות, שני מטבעות של שלוש קופייקות, ארבעה מטבעות של שתי קופייקות, ואחד עשר מטבעות של קופייקה אחת).

הם פחות הצליחו משציפיתי: לקח להם הרבה זמן להבין בכלל את השאלה; אחר כך הם טעו בחישובים, חזרו על אותן קומבינציות, נתקעו על אוסף מסוים של מטבעות, חיפשו את המטבע שהם צריכים בערמה הלא נכונה ("יש פה רק מטבעות של אחד!") וכו'.

נדמה לי שראיתי שיבגני מוצא "רק מטבעות של אחד" בגלל שהוא מחפש בערמה הלא נכונה. לא ידעתי אם להגיד לו או לא, והמחשבה על זה כל כך הסיחה אותי שלא שמתי לב שאני עצמי לא מוצא את המטבע הנכון מאותה סיבה בדיוק. – דימה.

[הייתי צריך להתחיל מהרכבת התחתית, ואז לעבור לרכבת הקלה ואז לאוטובוס. היה עדיף אפילו להתחיל מטלפון ציבורי (שתי קופייקות)].

מפגש 22. מה גדול יותר, השלם או חלקו?

שבת, 14 בפברואר 1981. 10:35-11:20. דימה, יבגני, פיטר ואנדריי.

תרגיל 1.

אני שואל את דימה:

– מה יש יותר, ארנבים או חיות?

– חיות.

– למה?

– כי חוץ מהארנבים (ההדגשה שלי) יש גם תוכים, חתולים, כלבים, ועוד כל מיני חיות.

אני מציע הסבר משלי:

– כי גם הארנבים הם סוג של חיה.

אני שואל את אנדריי:

– מה יש יותר, אווזים או ציפורים?

אנדריי מסביר שיש יותר ציפורים, כי יש אותן בכל מקום – בהודו, בגיאורגיה, ואפילו בקוטב הצפוני.

הרעיון שבבסיס ההסבר הזה לזה של דימה (יש הרבה סוגים של ציפורים), אבל העיקר חסר: "חוץ מ".

אני עונה:

– אבל יש גם המון אווזים. (מספר איפה חיים אווזים). אולי בכל זאת יש יותר אווזים מציפורים?

אנדריי לא יודע.

אני שואל את יבגני:

– מה יש יותר, גברים או בני אדם?

⁴ אני חושש שהקוראים כבר שכחו, אם בכלל ידעו אי פעם, כמה עלו כרטיסים בתקופה ההיא: אוטובוס ומטרונית – 5 קופייקות, רכבת קלה – 4 קופייקות, רכבת תחתית – 3 קופייקות.

יבגני חושב שיש יותר בני אדם, אבל לא יודע להסביר. דימה מסביר:

– כי גברים הם גם בני אדם. הם אנשים כפולים.

(אנחנו דנים האם סבים ואבות הם גברים).

אני שואל את פיטר:

– מה יש יותר, זבובים או חרקים?

– זבובים.

– למה?

– כי הם בכל מקום.

– וחרקים לא?

– לא.

– וזבובים הם חרקים?

– כן.

(אנחנו מנהלים דיון על זה שלא כל החרקים יודעים לעוף). דימה היה היחיד שענה נכון. אבל התרגיל

הרביעי הראה שגם הוא לא מביין עד הסוף את הקונספט של הכלת קבוצות.

תרגיל 2.

ממשיכים (פעם שלישית) עם השאלות על הבנים והבנות עם ובלי המשקפיים – עוד ארבע שאלות,

אחת לכל ילד.

בתרגיל הזה הילדים מקבלים כרטיסים שמצוירים עליהם כמה בנים ובנות, חלקם ממושקפים וחלקם לא. הם צריכים להגיד האם כל מיני משפטים כמו "כל הילדים הממושקפים הם בנים", "יש בת לא ממושקפת" וכד' הם נכונים או לא. אפשר לשאול כל שאלה כזו (ואפשר להמציא לא מעט כאלו) לגבי כל כרטיס, כך שאפשר לעבוד עם התרגיל הזה הרבה זמן.

פיטר שם לב שהכרטיס שלו זהה לכרטיס של יבגני. אלה מנסה לרמוז לו שגם המשפטים שקולים ("אין אף בת בלי משקפיים" ו"לכל הבנות יש משקפיים"). אנדריי הכי פחות מסתדר עם התרגיל – הוא מנסה להסביר משהו לגבי הבנים, למרות שהמשפט שהוא קיבל מתייחס בכלל לבנות – אבל זה בגלל שהוא לא נכח במפגשים הקודמים שבהם התרגיל הזה הופיע.

דימה היה היחיד שהצליח לענות נכון בלי עזרתי. אבל גם המשפט שהוא קיבל היה קל יותר: זה היה משפט שהתייחס לכל הילדים, ולא רק לבנים או לבנות.

דיברנו שוב על בעיית הקבוצה הריקה.

[ההקשר הוא כזה: שואלים האם נכון שבכרטיס שלא מצוירות עליו בנות "כל הבנות הן עם משקפיים". הילדים כמובן עונים שלא.

– וואלה? – אני אומר, – אז תראו לי בת בלי משקפיים.

– אבל אין פה בנות!

– אז זה מה שאני אומר, כל הבנות שיש פה הן עם משקפיים.

– אבל אין אותן!

– בסדר, לא אמרתי שיש...

וכן הלאה].

היה קטע משעשע בהתחלה: כשהוצאתי את הכרטיסים, כולם התחילו לצעוק,

Blue! Yellow! Brown! Grey! –

Is it a boy or a girl? – שאלתי.

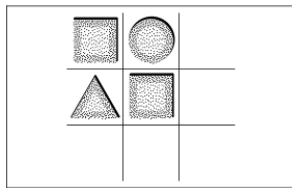
It's a boy (אנדריי מתברח).

No, Andrew, that's not true. It's a girl.⁵ –

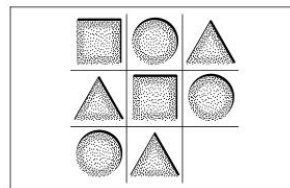
⁵ הילדים למדו אנגלית. את שיעורי האנגלית העבירה להם אלה, ולפעמים השתמשנו באותם כרטיסים.

תרגיל 3.

כל ילד מקבל כרטיס בסגנון של זה שמופיע באיור 11 (כל הכרטיסים שונים אחד מהשני). צריך לנחש איזו צורה צריכה להיות במשבצת הריקה. אנדריי מנחש ראשון. אני שואל איך הוא ידע; הוא מסביר. כולם שומעים ופותרים את החידות שלהם, אבל דימה טועה (נראה לי שיבגני הצליח בלי קשר להסבר של אנדריי). אני מסביר לדימה את הטעות: – שים לב, בכל שורה מופיעות כל שלוש הצורות, ובאלו שהשלמת בהן את הצורה יש שני ריבועים ואין אף משולש. אנחנו מדברים שוב על העקרון של סידור הצורות. דימה מתקן את הטעות. עכשיו כל אחד מקבל עוד כרטיס כזה, אבל המשבצת הריקה כבר לא בפינה אלא במקום יותר קשה (למשל במרכז). בסבב השלישי, כל אחד מקבל כרטיס שבו מאוירות רק ארבע צורות מתוך תשע, וצריך להשלים את החמש החסרות (איור 12). כולם פתרו יפה את שתי החידות.



איור 12. צריך להשלים את הצורות החסרות, כאשר בכל שורה ובכל עמודה כל הצורות צריכות להיות שונות אחת מהשניה.



איור 11. מהי הצורה החסרה?

תרגיל 4.

אני מציג לילדים משולש מבריסטול, שואל אותם איך קוראים לצורה הזו, ולמה. אחר כך מציג להם מרובע (כל צלע באורך שונה), מלבן, ריבוע ומחומש. הילדים אומרים איך כל צורה נקראת. – איך מזהים מלבן? – כל הזוויות שלו ישרות, – עונה דימה. (אני ודימה קראנו בזמנו "גיאומטריה לקטנטנים", אז הוא כבר יודע מהי זווית ישרה). – ואפשר לקרוא לו מרובע? – לא. – למה? תספור כמה קודקודים יש לו. – ארבעה. – נו, אז הוא מרובע. יש לו שני שמות: מרובע ומלבן. מלבן הוא בעצם מרובע, אבל מרובע מיוחד, כי כל הזוויות שלו ישרות. אחר כך הסיפור חוזר על עצמו עם הריבוע. – אפשר לקרוא לו מרובע? – לא. – למה? – כי הוא לא כזה ארוך, – עונה דימה. אנחנו חוזרים שוב על הדיון: אני מסביר שלריבוע יש שלושה שמות: אפשר לקרוא לו ריבוע, מלבן או מרובע, וכל השמות נכונים. – אז תגידו, מה יש יותר: ריבועים או מלבנים? – ריבועים! – צועקים כולם. – למה? – כי יותר קל לגזור אותם, – מסביר דימה. אני מוותר.

[בשלב הזה הייתי צריך להניח את כל הצורות על השולחן ולבקש מהילדים לספור את המרובעים, את המלבנים ואת הריבועים].

הצורה הבאה שאני מציג להם היא מצולע קעור (איור 13).

יבגני הוא היחיד שסופר נכון את הקודקודים, האחרים לא לוקחים בחשבון את השקעים. אני מסביר שצריך לספור גם אותם. דימה:

— זה בכלל קודקודים? זה חורים... חורים קודקודיים.

אני מחלק לכל אחד מהילדים כמה מרובעים זהים, שכל צלע שלהם באורך שונה. אני נותן להם סדרה של חידות: צריך לגזור את המרובע בקו ישר, כך שהוא יהפוך ל:

(א) שני משולשים,

(ב) שני מרובעים,

(ג) משולש ומרובע,

(ד) מחומש ומשולש.

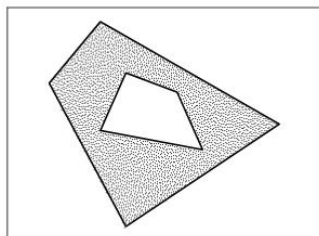
היחיד שפתר נכון את כל ארבעת הסעיפים היה אנדריי. השאר לפעמים טעו, ולפעמים העתיקו אחד מהשני.

בסעיף (ב) דימה מצא פתרון מקורי: הוא גזר מרובע באמצע המרובע, כך שהמרובע החיצוני נשאר כמו שהוא, אבל עם חור במרכזו (איור 14).

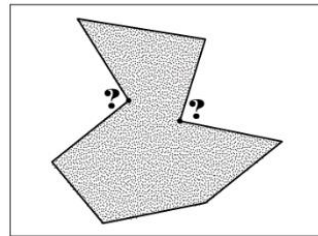
כמעט אמרתי לו שהפתרון שגוי, אבל עצרתי את עצמי בזמן: הרגשתי שעדיף לעודד רעיונות מקוריים. דימה התמלא בהשראה, פתר באותו אופן את סעיף (ג), ואחר כך נאבק הרבה זמן בסעיף (ד), סירב להיפתר באותה דרך. בסוף הוא באמת לא פתר אותו.

בסוף המפגש היה קצת בלאגן, הילדים רבו על המספריים (היו רק שני זוגות), ובכלל המפגש כבר התארך, כך שהפסקתי אותו לפני שהספקנו לדון בסעיפים (ג) ו-(ד).

אנדריי רצה לקחת הביתה את כל הצורות שהוא גזר, ובעקבותיו גם שאר הילדים.



איור 14. האם זה מרובע?



איור 13. האם זה מתומן?

מפגש 23. מגדלי האנוי

שבת, 28 בפברואר 1981. 15:11-10:40. דימה, יבגני, פיטר ואנדריי.

תרגיל 1. שאלות מילוליות על טרנזיטיביות.

אני שואל את אנדריי:

— ילד אחד אוהב גלידה יותר מאגוזים, ואגוזים יותר מתפוזים. מה הוא אוהב יותר: גלידה או תפוזים?

— גלידה.

— למה?

— כי קודם הוא התחיל לאכול גלידה.

— מה זאת אומרת, הרשו לו קודם גלידה?

— כן.

תור דימה:

— לסבא יש יותר כסף מאשר לאבא, ולאבא יותר מאשר לאמא. למי יש יותר כסף, לסבא או לאמא?

— לסבא.

– למה?
 – אני יודע שסבא מרוויח יותר מאמא.
 – מאיפה אתה יודע את זה?
 – אני פשוט יודע.
 – אבל אתה יודע את זה מהשאלה או מהחיים?
 – מהחיים.
 – שאלה ליבגני:
 – האורן יותר גבוה מהברוש, והברוש יותר גבוה מהאשוח. מה יותר גבוה: האורן או האשוח?
 – האורן.
 – למה?
 – אני לא זוכר מה הוא ענה, אבל דימה התערב:
 – כי האורן הכי גבוה, והאשוח הכי נמוך. והברוש הכי בינוני.
 – אנחנו דנים האם זה אכן כך במציאות.
 – (נזכרתי: יבגני ענה ש"האורן התחיל לצמוח לפני האשוח". יכול להיות שהם מפרשים את השאלה "למה?" כבקשה להסביר למה זה קורה – כלומר, להניח בצד את הלוגיקה ולהסביר איך קרה שהאורן יותר גבוה).
 – לסיום, אני שואל את פיטר:
 – בסיר אפשר להכניס יותר מים מאשר בקומקום, ובקומקום יותר מאשר בקנקן. איפה אפשר להכניס יותר מים, בסיר או בקנקן?
 – בסיר.
 – למה?
 – דימה שוב מתערב, והוא ופיטר מסבירים נכון. [צריך לנסות את זה עם משפטים לא נכונים, למשל, "ג'ני גדולה מדימה, ודימה גדול מאבא. מי יותר גדול, אבא או ג'ני?"]

תרגיל 2.

כמו במפגש הקודם, אני מניח על השולחן ריבוע, מלבן ומרובע. אנחנו נזכרים איך כל צורה נקראת ואני מבקש מהילדים לספור כמה ריבועים יש (אחד), כמה מלבנים (שניים) וכמה מרובעים (שלושה). פיטר הוא היחיד שעונה נכון על השאלה האחרונה. אני שואל לסיכום:
 – מה יש יותר, ריבועים או מרובעים?
 – אותה תשובה:
 – ריבועים (כי יש הרבה ריבועים בכתיים, על גגות, בארובות וכד').
 – אני לא מסביר כלום, רק שואל האם ריבועים הם גם מרובעים. התשובה:
 – כן.

תרגיל 3.

אני מוציא מ"ערכת המתמטיקה לכיתה א'" 16 צורות (כמות שתתחלק במספר הילדים המשתתפים): שני עיגולים כחולים, שני ריבועים צהובים, שלושה ריבועים אדומים, ארבעה משולשים אדומים וחמישה משולשים ירוקים. אני לוקח חבל, קושר את קצותיו ומסדר אותו על השולחן בצורת עיגול. כעת, כל ילד בתורו מקבל צורה – צריך להניח את הצורות האדומות בתוך העיגול, ואת הלא-אדומות מחוץ לעיגול.
 אחרי שאנחנו מסיימים, אנחנו חוזרים על התרגיל עם חבל אחר, שבתוכו צריך להניח רק את המשולשים. גם הפעם כולם מבצעים את המשימה בהצלחה (אנדריי עושה טעות אחת).
 כשאנחנו מסיימים גם את משימת המשולשים, אני מניח את שני החבלים על השולחן, אחד לצד השני. עכשיו צריך לבצע את שתי המשימות יחד. אחרי הסבב הראשון אני נותן לדימה משולש אדום. בלי להתלבט, הוא מניח אותו במעגל של הצורות האדומות. אני מפנה את תשומת הלב של כולם

לקונפליקט בין התנאים, ומציע להם לחשוב ביחד מה לעשות. [שוב הייתי נמהר מדי. הייתי צריך לחכות שנסיים ואז לבדוק איתם שכל צורה נמצאת במעגל המתאים].

אנדריי:

– זה בכוונה ככה?

– בטח. עד עכשיו עשינו רק הכנה, ועכשיו זה התרגיל האמיתי. צריך להמציא משהו שיגרום למשולש הזה להיות גם כאן וגם כאן.

דימה מנסה להניח את המשולש כגשר בין החבלים. אני נותן רמז: לנסות להזיז אותם.

אנדריי מנחש ראשון שצריך להניח את החבלים אחד על השני כך שיהיה שטח משותף לשניהם. (נדמה לי שגם דימה חשב על זה, אבל לא הספיק להגיד).

עכשיו החידה פתורה ואנחנו משלימים בקלות את מיון הצורות (כל אחד מקבל משולש אדום אחד, סה"כ יש ארבעה). אני אומר לילדים:

– תראו איזה יופי נראות הצורות הצבעוניות והחבלים הלבנים על השולחן השחור.

– זה היה רעיון שלי! – צועק אנדריי.

– לא, שלי! – צועק בחזרה דימה.

ניסיתי להגיד להם משהו על זה שהמשולשים האדומים שייכים לשתי הקבוצות, אבל הם כבר איבדו אותי.

תרגיל 4. מגדלי האנוי.

כל אחד מקבל עותק של המשחק, אני מסביר את החוקים.

זה משחק מדהים; אפשר לשחק בו עם בני חמש, אבל הוא יכול גם לשמש כבסיס לחידות לסטודנטים בשנה שלישית במדעי המחשב. בתחילת המשחק מסדרים כמות כלשהי של דיסקיות אחת על השניה בצורת פיירמידה. המגדל מושחל על אחד מתוך שלושה מוטות, או מונח על אחת מתוך שלוש עמדות (איור 15).

מטרת המשחק היא להעביר את הפירמידה לאחד משני המוטות האחרים, תוך שמירה על שני כללים:

בכל מהלך מעבירים רק דיסקית אחת, מראש מוט אחד לראש מוט אחר – בפרט, אסור להניח דיסקית בצד ואסור לקחת דיסקית בכל יד;

אסור להניח דיסקית על גבי דיסקית קטנה יותר.

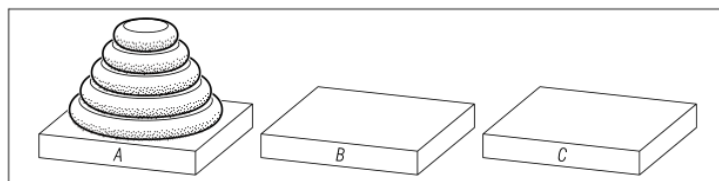
אחד משלבי הביניים במשחק מוצג באיור 16.

את המשחק המציא המתמטיקאי הצרפתי אדוארד לוקה בסוף המאה ה-19, בתוספת האגדה הבאה.

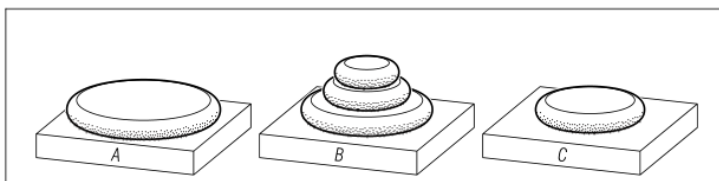
אי שם בג'ונגל, לא רחוק מהאנוי, יש מנזר. כשברהמה ברא את העולם, הוא יצר במנזר הזה שלושה עמודי יהלום גבוהים ועל אחד מהם 64 דיסקיות זהב. הוא ציווה על הנזירים להעביר את מגדל הדיסקיות לעמוד אחר (תוך שמירה על כללי המשחק, כמובן). מאז הם עובדים על המשימה יום וילילה; כשהם ישלימו אותה, יגיע קץ כל הימים.

תרגיל אחר לילדים גדולים יותר – להעריך בקירוב מתי יגיע "קץ כל הימים" הזה.

[הדרכה: כדי להעביר מגדל העשוי מ- n דיסקיות, דרושות $2^n - 1$ פעולות. נניח שפעולה לוקחת שניה אחת. כמה זמן ידרש להעברת המגדל אם $n = 64$?



איור 15. מגדלי האנוי: המצב ההתחלתי.



איור 16. מצב אפשרי של המגדלים במהלך המשחק. בסיום המשחק, הפירמידה אמורה לעבור בשלמותה ל-B או ל-C.

קשה לעקוב אחרי כל הילדים במקביל, מה עוד שהם מפריים את החוקים כל הזמן. דימה כבר שיחק בזה פעמיים, לכן הוא פותר ראשון לפי החוקים. לקראת הסוף, כשכולם תקועים, הם עוקבים אחרי התנועות המהירות והבטוחות שלו בנשימה עצורה. פיטר מפר את החוקים לאורך כל הדרך – הוא לא ממש מבין אותם, למרות שגם אני, גם דימה, וגם נטשה⁶ מנסים לעזור לו. בכל פעם שדימה מנסה לתת לו רמז, הוא מתעצבן. יבגני מבין את החוקים, אבל הוא חסר בטחון. הוא מסיר את שתי הדיסקיות העליונות ושאר הזמן בעיקר בוהה ולא יודע איך להתקדם. נטשה, דימה ואני מנסים לעזור לו. גם הוא מתעצבן על דימה ואומר שהוא לא מצליח בגלל שדימה מפריע לו. דימה צוחק עליו ואומר שהוא עזר לפיטר כדי שפיטר יסיים לפני יבגני ואנדריי, ושכשכולם יסיימו וילכו לשחק יבגני עדיין ישב ינסה לפתור את התרגיל וכו'. אני נוזף בו.

אני לא מספיק לעקוב אחרי אנדריי, והוא מסיים ממש מהר, יותר מהר משאני עצמי מסוגל. אני מבקש שיראה לי איך הוא פתר, אבל הוא כנראה מבין שהוא לא עבד לפי החוקים ומסרב בתוקף. אומר שהוא סיים לפתור ראשון, ושהוא לא מתכוון לפתור שוב.

– אני חושב, אנדריי, שהפרת את הכללים, – אני אומר לו.
– מתי? ! – הוא מתחצף, מבין שלא מצליח להוכיח את אשמתו כי לא ראיתי כלום.
אבל אז לודמילה מסגירה אותו. הוא מתבאס, לודמילה מנסה לעודד אותו ומראה לו איך משחקים לפי החוקים, אבל בסוף פותרת הכל לבד. כשפיטר מסיים, אנדריי אומר:
– לפיטר נתנו המון רמזים, – כשהוא מתעלם מהעובדה שהוא עצמו בכלל לא פתר את התרגיל. הוא גם צוחק על יבגני.

הבעיה שלי היא שאני מגיב להתנהגות כזו כאילו מדובר במבוגר ולא בילד קטן. אני מכיר את העקרון של "לגנות את המעשה ולא את הילד", אבל לא תמיד מצליח ליישם. כמובן שהכעס שלי משפיע על האווירה הרבה יותר מאשר השטריות של הילדים.

חפגש 24. מעט טופולוגיה

שבת, 7 במרץ 1981. 10:11-10:35. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלות בטרנזיטיביות עם נתונים לא הגיוניים.

שאלה לדימה:

– היה היו ילדה בשם ג'ני, ילד בשם דימה, ואבא שלהם. ג'ני הייתה גדולה מדימה (צחקוק), ודימה היה גדול מאבא. מי לדעתך גדול יותר: ג'ני או אבא? (עוד צחקוק).
– ג'ני גדולה יותר, כי היא הכי גדולה. היא יותר גדולה מדימה, ודימה עצמו יותר גדול מאבא, – עונה דימה.

שאלה ליבגני:

– פעם תולעת, אופניים ומטוס התחרו מי רץ הכי מהר. התברר שהתולעת יותר מהירה מהאופניים, והאופניים יותר מהמטוס. מי לדעתך מהיר יותר, התולעת או המטוס?
בסוף יבגני עונה נכון, אבל לפני כן הוא מתנדנד קדימה ואחורה, מצחקק, נופל על הספה. אני מאיץ בו, גם נטשה מתערבת. מתברר שמה שהפריע לו זה שמטוס לא רץ אלא טס.
שאלה לפיטר:

– היה היו שלושה ילדים: דימה, פיטר ואנדריי. דימה היה גדול מפיטר, ופיטר היה גדול מאנדריי. מי יותר גדול: דימה או אנדריי?

⁶ נטשה היא אמה של יבגני; לודמילה שתוזכר בהמשך היא אמה של אנדריי. בגלל שהמפגשים לא היו ארוכים, וההורים היו צריכים להביא ולהחזיר את הילדים, הם כמעט תמיד נכחו בהם. מצד אחד זה גרם לי להרגיש פחות בנוח; מצד שני זה העניק לי איזושהי תהילה: עד אז, ההורים לא חשבו שמתמטיקה יכולה להיות תחום כל כך מעניין.

פיטר עונה ומסביר נכון.

[הערה: אפשר לומר ששאלות כאלו הן דוגמה לקונפליקט קוגניטיבי לפי יאן סמדהסלונד. כלומר, צריך לבחור הסבר אחד מבין שניים סותרים. אם נמלה יותר כבדה מכלב, וכלב כבד יותר מפיל, אז אפשר להסיק מי הכי כבד או על סמך שיקולים יומיומיים (ברור שהפיל כבד מהנמלה, כי הוא ממש גדול והנמלה ממש קטנה); או על סמך טרנזיטיביות, כלומר על סמך תנאי השאלה. אולי ההומור מפתח חשיבה בגלל שהוא יוצר מעיין קונפליקט קוגניטיבי. מצד שני הילדים מבינים מהר מאד ש"פשוט אומרים הפוך", אז יכול להיות שזה לא קשור.]

תרגיל 2. חוקיות טופולוגיות.

אני מזכיר להם את המשחק "מה יוצא דופן?", ומסביר שהפעם, במקום למצוא יוצא דופן, נחלק שמונה כרטיסים לשתי קבוצות בגודל זהה (על הדרך, אני שואל כמה זה 8 חלקי 2).

הקבוצות הן כאלו:

- (1) מצולעים קמורים וקעורים (זו תכונה גיאומטרית ולא טופולוגית);
- (2) צורה אחת ושתי צורות;
- (3) שתי צורות אחת בתוך השניה ושתי צורות אחת ליד השניה;
- (4) 8 מעגלים טופולוגיים שלארבעה מהם יש שתי "אנטנות";
- (5) מעגלים טופולוגיים עם שתי "אנטנות" ועם שלוש "אנטנות";
- (6) שתי צורות, אחת בתוך השניה, שמחוברות אחת לשניה בשני "גשרים" או בשלושה.

חידות (3) ו- (6) היו להם קשות, חידה (5) הייתה בינונית, ואת השאר הם פתרו בקלות.

הבעיה האמיתית הייתה לא מתמטית: ברגע שהייתי מניח את הכרטיסים על השולחן, הבנים ניסו לחטוף כמה שיותר מהם, עוד לפני שהספיקו להבין מה מצויר על כל אחד מהם. הכרטיסים היו מתקמטים, אני הייתי מתעצבן, ואי אפשר היה לפתור את החידות ככה. זה נגמר בזה שלא הרשיתי לאף אחד לגעת בכרטיסים לפני שפותרים את התרגיל.

את החידות הקלות (1, 2 ו-4) פתר בדרך כלל פיטר. הוא ודימה היו המשתתפים הכי פעילים, אבל פיטר היה זריז יותר. דימה היה ממציא הרבה "הסברים", לרוב די מופרכים, ולא תמיד זכר את תנאי השאלה (למשל, היה מציע לחלק את הכרטיסים לקבוצות של 2 ו-6 במקום 4 ו-4).

את חידות 5 ו-6, הקשות יותר, פתר בסוף יבגני. צריך לציין שהוא היה ממש טוב גם בזיהוי יוצאי דופן. היה צריך הרבה סבלנות בשביל להקשיב להסברים שלו (ברגע שתשומת הלב מתמקדת בו, הוא משתק) ותוך כדי זה גם לגונן על הכרטיסים שלו מפני פיטר ודימה.

את חידה 6 דימה פתר בדרך שונה מזו שהתכוונתי אליה: הוא חילק את הצורות ל"ישירות" ו"עקומות". נאלצתי להסכים. אחרי זה הוא התנגד לכל נסיון לפתור את הבעיה בדרך אחרת, כך שנאלצנו לנהל שיחה לא כל כך נעימה על זה שהחוג הוא לא רק בשבילו אלא גם בשביל שאר הילדים.

בחידה 3 נתתי להם רמז. אמרתי שכל החוקיות שהם מציעים (במיוחד דימה) הן מסובכות, ושאפשר לתאר את הפתרון בשתי מילים, מילה לכל קבוצה: "בפנים" ו"בחוץ".

תרגיל 3. מגדלי האנוי (פעם שניה).

דימה סיים ראשון. יבגני סיים שני (נתתי לו חמישה רמזים), והיה מאד מרוצה מזה. פיטר שוב עבד מההתחלה ועד הסוף לפי ההוראות של דימה (משום מה לא הולך לו עם המשחק הזה), ורק את 5-6 המהלכים הראשונים ואת שני האחרונים עשה לבד.

ניסיתי לא לאפשר לו לעשות מהלכים בעצמו, כדי שאוכל להגיד אחר כך שעשיתי במקומו הכל. – דימה.

חוף משלושת התרגילים הנ"ל תכננתי עוד אחד, על קבוצות ותתי-קבוצות, אבל נגמר לנו הזמן. אולי זה לטובה, אחרת היו יוצאים יותר מדי תרגילים עם כרטיסים.

מפגש 25. הילד במעלית

שבת, 14 במרץ 1981. 10:40-11:00. דימה, פיטר, יבגני ואנדריי.

המפגש ארך רק עשרים דקות, כי יבגני איחר ואני הייתי צריך לצאת ב-11:00.

תרגיל 1.

פעם היה ילד קטן שגר בקומה 16. אמא שלו הרשתה לו להשתמש במעלית לבד. אבל הוא היה עושה משהו מוזר: כשהוא היה יורד, הוא היה יורד מקומה 16 לקומת הכניסה, וכשהוא היה עולה, הוא היה עולה רק עד קומה 8, ומשם עולה ברגל. איך אפשר להסביר את זה?

– היה לו הרגל כזה, – ניסה אנדריי.

– הוא התאמן.

וכן הלאה.

– כשהוא גדל קצת, הוא התחיל לעלות עד קומה 10, ומשם להמשיך ברגל.

– כנראה נהיה עצלן יותר, – אמר דימה.

– אבל החידה הרי לא מדברת על האם הוא היה עצלן או חרוץ, והאם הוא רצה או לא רצה להתאמן. היא רק אומרת שהוא היה קטן.

– אז מה?

– פשוט היה לו הרגל כזה, זה הכל, – מסכם אנדריי.

אני אומר להם שיחשבו על החידה הזו בבית.

[קיווייתי שיהיה להם קל לפתור אותה על סמך נסיון החיים שלהם, אבל התברר שלא.]

תרגיל 2.

אני מפזר על השולחן חיילי משחק בארבעה צבעים, 13 מכל צבע (אחד גדול ו-12 קטנים), ומספר: – היה היו ארבעה צבאות: אדום, כחול, ירוק וצהוב. אלה המפקדים שלהם, והשאר חיילים. בואו נסדר אותם.

אנחנו מסדרים כל צבא בטור מאחורי המפקד. הטורים יצאו באורכים שונים. הילדים מתחילים לדון מעצמם, בלי שהעליתי את השאלה, באיזה צבא יש יותר חיילים. אנדריי מחזיק בעמדת-ביניים מעניינת: בהתחלה הוא טען שיש יותר חיילים בטור הארוך יותר, אבל אחר כך, כשריווחתי את הטור הקצר כך שיהיה ארוך, הוא המשיך לטעון שאיפה שהיו יותר חיילים נשארו יותר חיילים. כהרגלי המגונה לא גיליתי גמישות ולא נתתי לדיון להתפתח. המשכתי:

– אז הצבאות האלה כל הזמן נלחמו אחד בשני, ובסוף נמאס להם, והם החליטו לעשות שלום ולכבוד זה הם ערכו משתה. הם ערכו שולחנות (אני מפזר ריבועי בריסטול), וסביב כל שולחן התיישבו ארבעה חיילים, אחד מכל צבע. אבל מסביב לכל שולחן הם היו צריכים לשבת בסדר אחר – זה היה הכלל שהם קבעו – רק כך השלום יהיה אמיתי והם לא ילחמו יותר זה בזה.

אני מושיב את המפקדים, ואז כולם לוקחים חיילים ומתחילים להושיב אותם (אני תכנתי שיעברו לפי התור). הם מחפשים סידורי ישיבה זהים, פיטר מוצא ראשון. הילדים מחליפים ביניהם שני חיילים, בלי לחשוב על זה שאולי עכשיו הסידור יהיה זהה לשולחן אחר. מדי פעם הם מתבלבלים בחוקים (בעיקר כשנטשה מתערבת) ומחשיבים כזהים סידורי ישיבה שהם סיבוב אחד של השני.

[הערה: סך הכל יש $4! = 24$ סידורי ישיבה אפשריים, אבל בשביל ילדים זה יותר מדי. בחרתי 12 חיילים כי ידעתי שבמפגש יהיו שלושה או ארבעה ילדים, ורציתי שלכל אחד תהיה אותה כמות חיילים.]

1. ביום שלישי אלה הציעה לדימה לעלות במעלית לקומה 16. הוא לא הגיע לכפתור, ואז נזכר

בחידה והבין מה הפתרון. אותו דבר קרה לאנדריי – הוא אפילו לא נזקק לרמז, כי הוא גר בקומה 14.

במפגש לא ניסיתי לדמיין איך הילד נכנס למעלית, מושיט את ידו לכפתור וכו'. ובטח שלא ניסיתי לדמיין את עצמי בנעליו של הילד. – דימה.

מפגש 26. חיתוך קבוצות

שבת, 21 במרץ 1981. 10:35-11:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. מיון לקבוצות עם חיתוך לא ריק.

(1) אני נותן לילדים חמישה כרטיסים עם ציורים: פרפר, עורב, מטוס, רכבת ואוניה, ומבקש מהם לשים בצד את הכרטיסים שמצויר עליהם משהו שידוע לעוף. אחר כך אנחנו מחזירים את הכרטיסים לערמה אחת, ואני מבקש מהם להוציא את אלה עם כלי התחבורה (משהו שבעזרתו אנשים עוברים ממקום למקום). מתעורר ויכוח לגבי המטוס. דימה חושב שצריך להשאיר אותו עם המעופפים (כך שהחלוקה תהיה לקבוצות זרות), פיטר מושך לכלי התחבורה. יבגני מכריע: – הוא משותף!

אני משבח את יבגני על המילה המתאימה שהוא בחר ושואל (בלי לקוות שזה יעבוד) לאיזו חידה זה דומה. להפתעתי, דימה עונה: – למשולשים האדומים.

אני משבח את דימה ומוציא את החבלים. יבגני מנסה להניח את הכרטיס עם המטוס על שני החבלים (כמו שדימה ניסה בפעם הקודמת), אבל דימה ופיטר אומרים "לא ככה!" ומסדרים הכל כמו שצריך. את הקבוצות הבאות הילדים ממיינים בעצמם, בלי שאגיד להם מה החלוקה. דווקא ציפתי שהם יודקו לזה. (2) הציורים: ביצה, דג, פטרייה, עץ, פרחים. הילדים פותרים ברגע: "את זה אוכלים; כל זה צומח". פיטר מניח את הפטרייה באמצע.

(3) הציורים: יונה, עורב, יען, ג'ירפה, טאה. בטעות שמתי במקום היען ציור של עגור, וגם אמרתי שזו חסידה. אני קולט את הטעות, מסביר להם אותה, ואנחנו עוברים לקרוא לכרטיס הזה "יען". אלה מנצלת את ההזדמנות ומספרת לילדים על ציפור נפוצה באזורנו בשם מלכישליו, שגם היא לא יודעת לעוף, אבל נודדת ברגל מאות קילומטרים בעונת הנדידה. [בעקרון, לא מומלץ להגדיר קבוצות על דרך השלילה ("לא יודעות לעוף"), אבל לא היו לי מספיק כרטיסים. לקראת הפעם הבאה אבקש מאלה לצייר את מה שאני צריך].

(4) הציורים: ילדה קטנה, שתי ילדות קטנות, ילד קטן, מבוגר וזקן. להפתעתי דימה מתקשה לפתור את החידה הזו: הוא מניח באמצע את האיור של הזקן ומסביר ש"אמנם זה גבר, אבל הוא דומה לאשה" (הזקן קירח ויש לו זקן ארוך). בסוף פיטר פותר את החידה.

תרגיל 2.

הילדים מקבלים כרטיסים עם איורים של כל מיני דברים (פרח, עפרון, האות אל"ף וכד'; יש גם כרטיסים עם כמה איורים ביחד). אנחנו מניחים אותם על דף גדול. אני מבקש מהילדים לצייר ביניהן חצים שיבטאו את היחס "זה חלק ממני" (כלומר, תת-קבוצה). בין הכרטיסים מופיע גם אחד ריק, בלי איורים.

הבעיה העיקרית היא שהילדים לא נזהרים על הכרטיסים ומתעקשים להתחיל את החץ בכרטיס עצמו. למרות כל האזהרות והבקשות, חלק מהכרטיסים מתלכלכים. דימה היה הראשון שחשב למתוח חץ מאחת הקבוצות לקבוצה הריקה, אבל לא חשב למתוח חצים כאלה משאר הקבוצות. למרות שהילדים יחסית הסתדרו עם המשימה, הייתה לי משום-מה תחושה כללית שהם לא ממש מבינים מה הם עושים.

מפגש 27. מרובעים מפסיפס

שבת, 4 באפריל 1981. 10:35-11:10. דימה, יבגני, פיטר ואנדריי.

נדמה לי שלאנדריי נמאס מהמפגשים שלנו. הוא מאד תחרותי ושונא להפסיד, אבל בחוג הוא לא מהמצטיינים. אי אפשר להכריח אותו להשתתף, אבל גם אי אפשר להפסיק להזמין אותו. השאלה היא

איך לחתוך את זה עם טאקט. אני מקווה שלודמילה מבינה את הבעייתיות⁷. כך או אחרת, היום אנדריי די הרס לנו את המפגש.

תרגיל 1.

לפני המפגש הילדים השתוללו, ובנסיון להרגיע אותם, הצעתי להם לספור בלחש עד 10 ובחזרה. הטעות שלי הייתה שאמרתי שמי שיספור הכי בשקט ינצח. כך, במקום שבסוף הספירה כולם יהיו רגועים ומרוכזים, הם התחילו להתוכח מי ספר יותר בשקט.

תרגיל 2.

שוב עסקנו בחלוקה לקבוצות שהחיתוך ביניהן לא ריק. בגלל שהילדים כבר מכירים את התרגיל, ישר הנחתי על השולחן שני חבלים עם אזור משותף ביניהם והתחלתי להסביר: – זוכרים שפתרנו חידות על דברים משותפים, עם המשולשים האדומים, ואחר כך עם הכרטיסים... אבל לא הצלחתי לסיים את המשפט; אנדריי קטע אותי והכריז: – אני לא רוצה לפתור דברים שכבר היו, זה משעמם. – אם משעמם לך אתה לא חייב להשתתף, אתה יכול פשוט לשבת ולהסתכל, – ענית. אבל פיטר הצטרף: – גם אותי זה משעמם.

(והרי רק לפני שבוע הוא אמר לאמא שלו, קטיה, שמתמטיקה זה יותר מעניין מאנגלית ומציור. היה לו גם הסבר מפתיע: בציור ובאנגלית אנחנו משחקים, ובמתמטיקה אנחנו עושים דברים רציניים. מסתבר שלאהבה יש כנפיים...). לא ידעתי מה לומר לו, אז ענית לו את מה שאמרתי לאנדריי. דימה – תקוותי היחידה – חשב קצת ואמר:

– האמת שגם אותי זה משעמם, אבל אני אפתור בכל זאת.

לא חיכיתי לשמוע מה דעתו של יבגני ואמרתי:

– טוב, הנה אוסף הכרטיסים של דימה ויבגני... – ואז אנדריי ראה שהציורים שבכרטיסים הם לא אלה מהשיעור הקודם, כלומר גם המשימה שונה, וצעק:

– אה, אז אני רוצה, אני רוצה! – וניסה לתפוס את כולן בבת אחת, ואז פיטר צעק שהוא גם רוצה, אבל אני כבר הייתי עצבני, מה עוד שאנדריי לא נתן לשאר הילדים את הכרטיסים, רב עם יבגני, וכל הזמן זרק כל מיני הערות טפשיות ולא קשורות והוציא את כולם מריכוז.

הספקנו לעבור על שלוש קבוצות של כרטיסים (מתוך 11 שהכנתי!):

(1) כדור, צמיג של מכונית, מגפי גומי, מעיל, כובע (שלושה חפצים מגומי, שלושה בגדים; המשותף – מגפי גומי);

(2) כדור, צמיג, מגפי גומי, רעשן, ליצן (שלושה חפצים מגומי, שלושה צעצועים; המשותף – כדור);

(3) כדור, צמיג, מגפי גומי, הגה, מושב של מכונית (שלושה חפצים מגומי, שלושה חלקי מכונית; המשותף – צמיג).

בסך הכל, הילדים פתרו את החידות פחות טוב מאשר בפעם הקודמת. לדימה יש בעיה שחוזרת על עצמה: הוא לא יודע להשאר בתוך המסגרת של החידה. בחידה הראשונה הוא התעקש שגם צמיג זה בגד, כי אפשר ללבוש אותו על המותניים. השקענו הרבה זמן בלשכנע אותו שזה לא נכון, ואז הוא הכריז שבכל זאת צמיג הוא בגד, כי מלבישים בו את הגלגל.

את החידה הראשונה הילדים לא פתרו, ונאלצתי לגלות להם את הפתרון. בשתי החידות האחרות דימה סידר את הכרטיסים סופית, אבל יבגני ופיטר אמרו את הפתרון עוד לפניו.

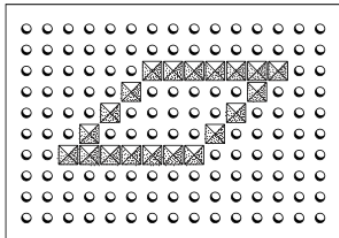
⁷ לודמילה, אמא של אנדריי, היא מורה למוזיקה.

תרגיל 3. חידות בפסיפס.

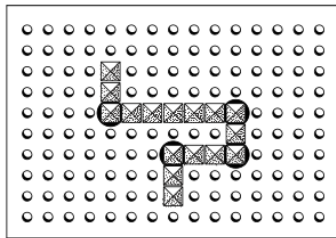
ביקשתי מדימה להרכיב משולש (הצליח), מאנדריי – ריבוע (הצליח), ומיבגני – מלבן (גם הצליח). ואז הכרזתי שהחידה של פיטר הכי קשה: להרכיב מרובע שאינו מלבן. פיטר מרכיב משושה; אני מבקש שיספור כמה פינות יש לו; דימה קובע שיש לו שתי פינות, ומצביע עליהן (אלו שמודגשות באיור 17). יבגני צועק "לא נכון!" ומתחיל לספור את הפינות. הוא מתחיל את הספירה נכון, דימה מביין את הטעות שלו, דוחף את יבגני ומסיים את הספירה עד שש.

דימה מקבל את המשימה של פיטר ושוב הוא מציע פתרון מחוץ למסגרת (איור 18). זה מרובע, כי יש לו ארבע פינות, – הוא מסביר, ומצביע על הפינות שמודגשות באיור 18. אני אומר לו שהפתרון שלו מאד מעניין, ומוסיף שבכל זאת אנחנו רוצים להרכיב מצולע, כלומר, צורה סגורה. אנדריי מקבל את אותה משימה ומרכיב משושה.

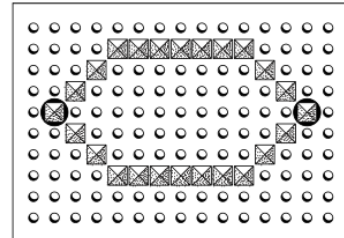
תור יבגני; הוא מרכיב פתרון נכון: מקבילית עם זווית של 45° (איור 19). אנחנו מסיימים את המפגש, אבל פיטר לא רוצה ללכת ומבקש שאפתור את החידה שלו: הוא ירכיב צורה, ואני צריך להרכיב אותה כשהיא מסובכת ב- 90° . אני פותר את החידה והוא הולך הביתה מרוצה.



איור 19. מקבילית עם זווית בסיס של 45°



איור 18. "מרובע".



איור 17. האם לצורה הזו יש שתי פינות?

מפגש 28. מתחילים ללמוד את תורת ההסתברות

שבת, 11 באפריל 1981. 15:11-10:40. דימה, יבגני ואנדריי.

תרגיל 1. ממשיתכים במיון לקבוצות עם חיתוך לא ריק.

אני שוב מניח את שני החבלים ואומר:

– תראו איזה כרטיסים חדשים אלה ציירה לכם, – כשאני מטעים את המילה "חדשים".

לא הייתי היחיד ששינה את הטון. אנדריי, שכנראה קיבל על הראש מלודמילה, שואל בנימוס:

– למה אנחנו תמיד פותרים את אותן חידות?

– מה, בפעם הקודמת פתרת את כל החידות בקלות? – אני עונה בלי רחמים.

אנדריי נושך שפתיים ושותק, לא מביט לכיווני. אני מוסיף:

– אנחנו עושים את זה בשביל שנלמד לפתור חידות כאלו כמו שצריך.

אני מסכם עם הילדים שהפעם נשמור על סדר וכל אחד יפתור את התרגילים בתורו. כל עוד מישהו פותר, השאר לא מפריעים לו. הייתי צריך לשים מההתחלה את המשמעת לפני הכל – זה היה חוסך הרבה חיכוכים.

(1) חידה לדימה: עפרון, עט, מכונת כתיבה, מכונת תפירה, שואב אבק (שלושה כלי כתיבה, שלוש

מכונות; החפץ המשותף: מכונת כתיבה).

– עם כל אלה כותבים, – אומר דימה, אבל מניח את מכונת התפירה בשטח המשותף.

– עם זה כותבים?

– כן.

– וואלה. מה זה בעצם?

– מכונת תפירה. אה-אה, לא כותבים איתה, תופרים איתה!

יבגני מתקן את דימה, אבל דימה, כנראה מתוך תחושת התנגדות, מסדר את הכרטיסים מחדש בצורה לגמרי חסרת הגיון. אנחנו מנהלים דיון ארוך ואז מסדרים את הכרטיסים ביחד כמו שהם אמורים להיות.

הילדים לא יודעים להגיד מה משותף לכל ה"מכונות הביתיות". אני עוזר להם, ואנחנו חושבים על עוד דברים שהיה אפשר לשים בקבוצה הזו (מטחנת בשר, מכונת כביסה, מקרר...) ובקבוצה השניה (גיר, מכחול...).

(2) חידה לאנדריי: שעון חול, שעון יד, שעון מעורר, טבעת, שרשרת (שלושה שעונים, שלושה דברים שאנשים עונדים; המשותף: שעון יד). אנדריי מגדיר נכון את הקבוצות:

— אלה שעונים, ואת זה לובשים, — אבל מניח בשטח המשותף את השעון המעורר. אנחנו דנים בפתרון שלו, ואני שואל האם עונדים שעון מעורר. יבגני שוב מתקן, הפעם את אנדריי. דימה מתערב ומתחיל לסדר מחדש את כל הכרטיסים, בנסיון השלישי או הרביעי הוא מגיע לפתרון הנכון. הפעם יבגני מתנגד ומכריז שהפתרון הזה (שלו עצמו!) לא נכון, ומערבב הכל שוב. אני מסדר את הכרטיסים במקומות הנכונים ומסביר את הפתרון. פתאום אלה מתערבת: היא חשבה על פתרון אחר — חלוקה ל"שעונים" ו"חפצים עגולים" (החפץ המשותף: שעון מעורר). באופן כללי זה טוב להראות שיש כל מיני פתרונות אפשריים, אבל במקרה הזה החלוקה שאלה הציעה היא החלוקה שאליה התכוונתי בחידה הבאה, כך שההתערבות שלה נתנה ליבגני רמז.

(3) חידה ליבגני: שעון חול, שעון יד, שעון מעורר, צלחת, תוף (שלושה שעונים, שלושה חפצים עגולים; המשותף: שעון מעורר). יבגני הגדיר מיד את החלוקה לקבוצות, אבל לקח זמן עד שהעז לסדר את הכרטיסים בהתאם לחלוקה הזו, וגם אז הוא הניח באמצע את הכרטיס עם שעון החול. אם כי, הוא הסביר שהוא עגול אם מסתכלים מלמעלה. נאלצתי להסכים ולשכנע אותו שצריך לשים באמצע גם את השעון המעורר. אחר כך דיברנו על זה שאם גם שעון היד היה עגול, אז קבוצת השעונים הייתה תת-קבוצה של קבוצת החפצים העגולים.

תרגיל 2. מבוא לתורת ההסתברות.

אני מכניס לתוך שקית אטומה שתי קוביות צהובות ושתיים שחורות, ואומר לילדים שזה מחסן חשוך ושיש בו זוג מגפיים צהובים וזוג שחורים. אנחנו רוצים לצאת, ובשביל זה אנחנו צריכים להוציא זוג מגפיים באותו צבע (אסור לנעול מגפיים בצבעים שונים). בגלל שהמחסן חשוך, אנחנו נאלצים להוציא אותם על בליינד, אחד אחרי השני.

הילדים מוציאים קוביות מהשקית בזו אחר זו, וכל אחד זוכר כמה קוביות הוא היה צריך להוציא עד שהיה לו זוג. [היה עדיף לחלק להם דפים ולכתוב עליהם את המספרים].

אנחנו דנים כמה קוביות צריך להוציא כך ש: (א) אי אפשר יהיה לקבל זוג באותו צבע; (ב) יהיה אפשרי לקבל זוג באותו צבע, אבל גם אפשרי שלא; (ג) בהכרח יהיה לנו זוג באותו צבע.

אחר כך אנחנו חוזרים על אותה משימה עם שש קוביות (שלושה זוגות). אנדריי כל הזמן הוסח והיה נראה שההסבר שלי משעמם אותו; לודמילה, לראשונה, העירה לו מול כולם — נראה שהיא עושה לו מעיין "הכנה לכיתה א'".

אחרי המפגש ג'ני עזרה לי להחזיר את הקוביות למקום: היא העבירה אותן מהסלון לחדר העבודה שלי, הניחה אותן על הרצפה, ואני העברתי אותן מהרצפה לשולחן. כשעל השולחן היו שש קוביות ועל הרצפה שלוש, דימה אמר:

— אה, נשאר שם רק שלוש קוביות.

מתברר שבזמן המפגש הוא ספר שיש סך הכל 12 קוביות (זו הכמות שהכנתי, ליתר בטחון), ועכשיו הוא פתר בראש את התרגיל $12 - (6 + 3) = 3$. אני לא מלמד אותו חשבון בכלל, רק עונה לו על שאלות לפעמים. מה שהוא יודע הוא קלט לבד. עוד חודש הוא יהיה בן חמש.

מפגש 29. כשלון חרוץ

שבת, 18 באפריל 1981. 10:30-10:45. דימה, פיטר, יבגני ואנדריי.

חלוקה לקבוצות – סיום.

הכרטיסים שהשתמשנו בהם:

- (1) חלון, גביע זכוכית, משקפיים, טבעת, חגורה (שלושה חפצים מזכוכית, שלושה דברים שלובשים; חפץ משותף: משקפיים);
- (2) פסנתר, כינור, תוף, צלחת, שעון מעורר (שלושה כלי נגינה, שלושה חפצים עגולים; חפץ משותף: תוף) [שימו לב לחידות 3 ו-5];
- (3) פסנתר, כינור, תוף, ספה, ארון (שלושה כלי נגינה, שלושה רהיטים; המשותף: פסנתר);
- (4) חלון, גביע זכוכית, משקפיים, כוס חרסין, בקבוק (שלושה חפצים מזכוכית, שלושה דברים ששותים מהם; המשותף: גביע זכוכית);
- (5) שעון מעורר, צלחת, תוף, כף, קומקום (שלושה חפצים עגולים, שלושה כלי אוכל; המשותף: צלחת).

הילדים פתרו נכון את כל החידות. בחידה האחרונה הם הציעו לשים באמצע גם את הקומקום, כי כשמסתכלים עליו מלמעלה הוא עגול.

אחרי שסיימנו עם החלוקה לקבוצות, תכננתי לעבור לתרגיל הבא, ואז אנדריי שאל: – מתי המתמטיקה תיגמר?

עניתי שבשביל מי שמשעמם לו היא כבר נגמרה, ושהוא יכול ללכת לחדר לשחק אם הוא מעדיף, ואני לא מכריח אף אחד וכו'. אבל ניסחתי את כל זה לא ממש ברור, וראו שאני פגוע. אחרי דקת מבוכה שבמהלכה התעסקתי בשקית עם הקוביות הצבעוניות, אנדריי אמר:

– טוב, אני אלך לשחק, – והלך לחדר הילדים, שבו שיחקו ג'ני, סוניה, ובת הדודה של אנדריי, שגם לה קראו סוניה, בנות השלוש (כל כך נמאס לו שהוא העדיף לשחק עם שלוש ילדות קטנות). פיטר עבר לחדר בעקבותיו, בלי לומר מילה. אחרי זה יבגני מלמל:

– האמת שאני כבר פתיתי הכל, – והלך גם הוא. רק דימה רצה להמשיך (יכול להיות שזה קשור לשיחה שלנו אתמול על ההתנהגות שלו בשיעור אנגלית, ועל כמה חשוב לרצות ללמוד). הוא כמעט בכה כשאמרתי שנמשיך אחר כך.

כמעט בכיתי לא כי השיעור התבטל אלא מתוך רחמים על אבא (הוא היה כל כך עצוב!), וגם בגלל שניסיתי לנחם אותו, והוא לא שם לב. – דימה.

בכל מקרה, דימה פחות הטריד אותנו באותו רגע; היינו עסוקים בלפתור את הבעיה ה"פדגוגית". והבעיה הזו נגעה לא רק לילדים אלא גם אלי. אלה ידעה כמה הייתי מושקע רגשית במפגשים האלה, והיא הייתה צריכה לגייס את כל הטאקט שלה בשביל לעודד אותי. לא ידעתי מה לעשות. לוותר על הכל, או מה? לא היה לי מושג. גם לודמילה הייתה בעמדה לא נוחה: מצד אחד היא רצתה לגונן על אנדריי, ומצד שני היא לא רצתה לפגוע בנו.

בסופו של דבר, אחרי דיונים ארוכים, ביחד ולחוד, גיבשנו את המסקנות הבאות:

(1) לא להזמין יותר את אנדריי⁸. למחרת דיברתי עם לודמילה על זה שאני לא רואה טעם להכריח אותו לעשות דברים שהוא לא אוהב, שהוא ילמד מספיק מתמטיקה בבית הספר, ובחודשים שנשארו עד אז עדיף שיתאווור, מה עוד שהוא יפסיד בסך הכל 3-4 מפגשים. האמת היא שהייתי כן: גם לגבי זה שלא כדאי להכריח, וגם לגבי זה שהוא ילמד מספיק מתמטיקה בבית הספר. בספטמבר הוא כבר יעלה לכיתה א', וחוג הבית שלנו הוא לילדי גן⁹. חבל לי שניהלנו את השיחה הזו אחרי הסיפור ולא לפני – זה גרם לטיעונים שלי להשמע צבועים. מה עוד שהיא לא הייתה בעמדת מיקוח, כי היה ברור שאני פגוע.

(2) לא לכעוס על הילדים בשום פנים ואופן.

(3) לעשות הפסקה. חלקית מתוך תקווה שהם ישאלו בעצמם מתי כבר יהיה מפגש (זה קרה בעבר, אפילו עם אנדריי). בהתחלה התעקשתי שלא אקיים מפגש עד שהילדים יבקשו מיוזמתם. זו גישה

⁸ הדמות של אנדריי, כפי שמצטיירת מהשורות האלו, לא נאמנה למציאות. הכל בגלל שלא מתועדים פה עשרים המפגשים הראשונים, שבהם הוא היה משתתף פעיל בדיוק כמו כל השאר.

⁹ כעבור שנה פיטר ויבגני עלו לכיתה א', אבל המשכנו את החוג שנה נוספת, עד שגם דימה התחיל ללמוד בבית הספר.

מטופשת, כמובן. ילדים חיים בכאן ועכשיו, ולא שואלים את עצמם מה אמור לקרות בשבת ב-11. אם בשבת ב-11 לא יקרה כלום, הם כנראה לא ישימו לב. בסופו של דבר, ההפסקה נמשכה שלושה שבועות. (4) לעשות את המפגש הבא שונה מהותית מהקודמים (עצתה של ריטה פרומקין¹⁰).

אני דווקא הייתי מעדיף שיעור רגיל. אני לא זוכר האם התגעגעתי לחוג, אבל אם כן, אז למפגשים שהיו קודם, ולא למשהו חדש. לכל הפחות, הופתעתי לרעה כשבמקום להתיישב במקום הרגיל התיישבנו במסדרון. – דימה.

במבט לאחור, מפתיע אותי עד כמה התגובה שלי הייתה מוגזמת. הגבתי כאילו הייתי מהפכן שחלם להפוך את האנושות למאושרת, והאנושות, במקום להודות לי, המשיכה לחיות את חייה כרגיל. והנה אני כבר מוכן לערוף ראשים...

מפגש 30. מוזגים מים

שבת, 9 במאי 1981. 10:10-10:40. דימה, פיטר ויבגני.

ניסויים במזיגת מים מכלי לכלי (חוק שימור החומר).

אנחנו יושבים במסדרון – גם בשביל לא להרוס את השטיח, וגם בשביל ליצור אווירה של "משהו חדש".

הציוד: שני סירים – באחד מים צבועים בתמצית תה, ובשני מים צבועים בדיו; שני ספלים למזיגה; שני בקבוקי זכוכית; שני גביעים צרים; כוס אחת רחבה; ארבעה גביעי יין. אני מבקש מהילדים שישתדלו לא לשבור כלום.

שאלה ראשונה. אני מוזג לבקבוקים כמות זהה של מים כחולים וצהובים. הילדים מוודאים שהכמויות זהות. לאחר מכן, אני מחלק את המים הצהובים בין שני גביעי היין ושואל איזה מים יש עכשיו יותר: צהובים או כחולים? בניגוד לכל הציפיות שלי, דימה עונה נכון, ואפילו מסביר: – אלה אותם מים, רק העברת אותם. לא הוספת ולא הפחת כלום.

אני לא נכנע: מחלק את המים הצהובים לשלושה ואחר כך לארבעה גביעים (בניסויים של פיאז'ה היו ילדים ששינו את עמדתם כשכמות הכלים גדלה). אבל דימה מתעקש: זו אותה כמות מים. אני שואל את פיטר מה דעתו. למרבה הצער, פיטר מסכים עם דימה, וגם יבגני.

אני נבוך. ראשית, בניתי את כל התכנית של היום על הקונפליקט הקוגניטיבי שהגדיר סמדרסלונד, ומסתבר שזה היה מיותר, כי הילדים כבר עברו את השלב הזה. שנית, המפגש שתליתי בו כל כך הרבה תקוות נמצא עכשיו תחת איום: עוד לא חלפו חמש דקות, וכבר מיצינו את רוב מה שתכננתי. אני עובר בחשש לשאלה הבאה: אם גם עכשיו הם יענו נכון, המפגש שוב יכשל, ומה אעשה אז?

שאלה שנייה. אני מוזג לכוס רחבה מעט נוזל ומבקש מהם שימזגו אותה כמות לכוס הצרה. פיטר מוזג מים עד אותה גובה (איור 20).

אני חש הקלה. אני שואל מה יקרה אם נמזוג את המים מהכוס הרחבה לכוס צרה אחרת (ריקה). האם יהיו יותר מים או פחות? התשובה:

– אותה כמות.

– אז בשני הגביעים הצרים תהיה כמות זהה של מים?

– כן.

אני מוזג את המים. הילדים מתפלאים מאד שבכוס אחת יש יותר מים, אבל מנחשים די מהר שזה קשור לרוחב של הכוסות. מתפתח דיון ארוך על איך הגובה והרוחב משפיעים על כמות הנוזלים.

אחרי זה במשך עוד איזה זמן אנחנו מוזגים מים מכלי לכלי. הילדים מבינים שאם רוצים למזוג כמות זהה של מים לשני כלים שונים אז צריך קודם למזוג לשני כלים זהים, ואחר כך להעביר את המים מאחד מהם לכלי אחר. חוץ מזה, אפשר למזוג לשני כלים זהים כדי לבדוק איפה יש יותר.

¹⁰ היינו מתייעצים איתה הרבה, וגם במקרה הזה.

הם מעט מבוטלים מהעובדה שכשאנחנו מוזגים כמות זהה (באמת) של מים לכוס צרה ולגביע של יין, גובה פני המים זהה, למרות הבדלי הרוחב (איור 21).

אחר כך אנחנו מנסים למזוג כמות זהה של מים לבקבוק ולגביע היין. לצורך הבדיקה אנחנו רוצים להעביר את המים או מהבקבוק לגביע זהה או מהגביע לבקבוק זהה, ויבגני מציע להשוות את גובה המים כשמרימים את הבקבוק כך שהתחתית שלו תהיה בגובה של תחתית הגביע (איור 22). הוא מסביר שהרוחב של גביע היין זהה לרוחב הבקבוק (מה שנכון).

בעקבות ההסבר הזה, אני מאלתר את השאלה הבאה. אני מעמיד כוס צרה על ספל הפוך (איור 23). תחתית הכוס נמצאת עכשיו באותו גובה של תחתית גביע היין. אני מבקש מהילדים למזוג כמות זהה של מים בשני הכלים. יבגני מוזג, ועושה את אותה טעות שפיטר עשה בהתחלה. ברגע שאני מוריד את הכוס מהספל, הוא מביץ את הטעות ומתקן אותה.

שאלה אחרונה. השאלה האחרונה לא קשורה לחוק שימור החומר, אלא לבקבוקים ולמים.

כל אחד מהילדים מקבל דף עם ציור של שני בקבוקים. אחד מהם עומד, והשני נטוי. בבקבוק העומד מסומן גובה פני המים (איור 24), וצריך לסמן אותו בבקבוק הנטוי.

פיטר צייר את הקו הנכון. יבגני הציץ בציור של פיטר וצייר גם הוא את הקו הנכון (במקרה הזה זה לא משנה שהוא הציץ; אם הוא צייר נכון, אז לפי פיאה'זה זה מראה שבמוח שלו כבר התעצב המבנה המתאים). דימה מצייר לא נכון – הקו מקביל לתחתית הבקבוק.

לא ניסיתי לדמיין את המים בבקבוק, אלא לנחש את התשובה. חוץ מזה, נדמה לי שהיה לי קשה לדמיין בקבוק אנכי בציור אופקי. – דימה.

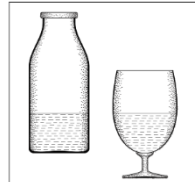
אנחנו מוזגים מים לבקבוק, מטים אותו, ומראים לדימה את הקו. דימה מנסה לתקן את הציור, אבל הפעם מצייר קו אנכי, ואחר כך קו עקום (איור 25).

(לא מזמן הוצאתי מים מהאמבטיה בעזרת קנקן, ודימה שאל איך זה שאני כל פעם לוקח מים מצד אחד של האמבטיה, אבל לא נוצר שם בור והמים נשארים ישרים).

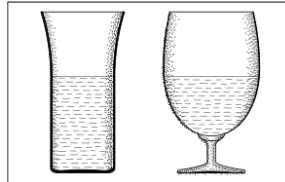
אם היו שואלים אותי האם יוצר ככה בור, אני חושב שהייתי עונה שלא. אבל לא הבנתי בשביל מה צריך להוציא מים אם לא בשביל שיווצר בור. ואם אבא חופר באמבטיה, אז זה אמור לעבוד. האמנתי לאבא יותר מאשר לנסיון החיים שלי. – דימה.



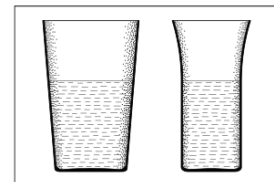
איור 23. שוב אותה טעות: לכאורה, כמות המים בכלים זהה. אבל הפעם הטעות תוקנה מהר.



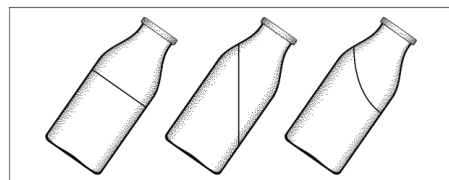
איור 22. כדי לברוק אם כמות המים בכלים זהה, אפשר להגביה את הבקבוק כך שתחתיתו תהיה בגובה תחתית פני הגביע.



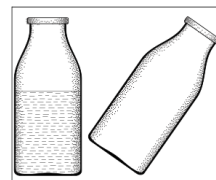
איור 21. במקרה יצא שבכוסות האלו באמת יש כמות זהה של מים.



איור 20. ילדים חושבים שבכוסות האלו יש כמות זהה של מים.



איור 25. נסיונות לצייר את גובה פני המים בבקבוק הנטוי.



איור 24. המשימה: לצייר את גובה פני המים בבקבוק הנטוי.

אני לא מסביר כלום. לסיום אני מספר על רו, ששנא שמן דגים, אבל אמא קננה הייתה צריכה לגרום לו לשתות כוס שלמה (מצביע על הכוס הצרה) כל יום, כי ככה הרופא אמר. אז היא העבירה את שמן הדגים לכוס רחבה, ואז רו חשב שאחרי שהיא מעבירה יש פחות שמן (הרי בכוס הרחבה זה נראה כמו חצי כוס, פני השמן נמוכים יותר), והסכים לשתות. ככה הוא החלים.

מההתרשמות הלא-בהכרח-מייצגת שלי, ילדים מופנמים נוטים יותר לחשיבה לוגית, וילדים מוחצנים מצליחים יותר בגיאומטריה. לקבוצת המופנמים אני משייך את דימה ויבגני, ולמוחצנים את פיטר ואנדריי (לא עשיתי להם מבחן מופנמות, כמובן, הכל מבוסס רק על ההתרשמות שלי).

דימה הרבה פעמים שופך בטעות דברים (תה מכוס, מים מצנצנת כשהוא מצייר, וכד'), הוא לא מספיק עוקב אחרי האופקיות של פני הנוזל. אנחנו כועסים על המגושמות ועל חוסר תשומת הלב שלו, אבל יכול להיות שהסיבה היא בכלל מתמטית.

מפגש 31. שוב תורת ההסתברות

שבת, 16 במאי 1981. 10:35-11:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1.

אני מקדים שכבר שיחקנו במשחק הזה, אבל פיטר לא נכח באותו מפגש, ולכן אסביר שוב. אני מספר על האיש שחיפש זוג מגפיים במחסן חשוך, ומכניס לשקית ארבעה זוגות של קוביות – שתיים צהובות, שתיים אדומות, שתיים כחולות ושתיים שחורות. כל אחד מאיתנו מוציא קוביות בזו אחר זו עד שאנחנו מקבלים זוג באותו צבע. כל אחד לוקח כרטיס עם מספר שמציין כמה מגפיים הוא הוציא עד שזה קרה.

גם אני משתתף במשחק. יצא שהוצאתי קוביה אחת מכל צבע. אני מסביר לילדים שלא משנה איזו קוביה אוציא הפעם, בהכרח יהיה לי זוג.

לפיטר היה מזל: הוא הוציא על ההתחלה שתי קוביות באותו צבע. זו הייתה הפעם היחידה מתוך שני המפגשים שבה זה קרה.

תרגיל 2.

אותו סיפור, אבל עם איש בעל שלוש רגליים. אנחנו מניחים בשקית שלוש קוביות צהובות, שלוש אדומות ושלוש כחולות; המטרה היא אותה מטרה: להוציא שלושה מגפיים באותו צבע. (נטשה מנסה "לעזור" לי ומציעה שאלה יהיו כפפות וכובע, אבל אני מתעקש על הגרסה שלי).

אני נופל שוב על מקרה הקיצון: אני מוציא שש קוביות, שתיים מכל צבע. אני שוב מנצל את ההזדמנות ומדבר עם הילדים על זה שכל קוביה שאוציא עכשיו תשלים שלשה באותו צבע.

תרגיל 3.

אחרי שכל אחד הוציא קוביות בתורו, אני מניח את השקית בצד ומפזר את הקוביות על השולחן. אנחנו מדגימים איך אפשר להוציא שלשת נעליים באותו צבע ואיך אפשר להוציא אוסף שלא כולל שלשת נעליים באותו צבע – עבור שלוש קוביות, ואז עבור ארבע, חמש ושש.

אני מציע להם להדגים את אותו הדבר עבור שבע קוביות. אחרי כמה נסיונות הילדים מכריזים שכשמוציאים שבע קוביות בהכרח יהיו שלוש באותו צבע. אני מנסח ומסביר להם משהו מעיין הוכחה.

תרגיל 4.

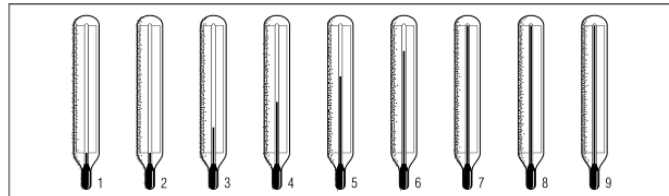
במקביל לדיון מתרגיל 3, אני מוציא דף כחול ואנחנו מניחים עליו את הכרטיסים עם המספרים 0, 1 ו-2 ("אי אפשר לקבל שלשת נעליים"). אחר כך אני מוציא דף ירוק, ועליו אנחנו מניחים את המספרים 3, 4, 5 ו-6 ("אפשר, אבל לא בהכרח נקבל שלשת נעליים"). לבסוף, אנחנו מניחים את המספרים 7, 8 ו-9 ("בהכרח נקבל שלשת נעליים") על דף אדום. (מעניין לציין שאני ואלה בחרנו את אותם צבעים של הדפים ואת מה שכל צבע מייצג, באופן בלתי תלוי אחד בשני, מה שאולי מצביע על זה שהבחירה "נכונה" באיזשהו מובן. משהו בסגנון "קר, מתחמם, רותח").

תרגיל 5

אני מספר להם שמדחום הוא מכשיר שמוודד מה החום ("חם או קר"), ושהמצאתי מדחום אחר, שמוודד את הסיכוי להצליח. אני מראה להם חמישה ציורים של מדחומים: אחד שבו גובה הכספית הוא 0 ("בלתי אפשרי"), אחד שבו הגובה הוא מקסימלי ("בהכרח"), ועוד שלושה שמציינים סיכויים שונים להצליח. אנחנו דנים איזה מדחום מצביע על סיכוי גבוה יותר להצליח ואיזה על נמוך יותר, ומה המדחום יראה בתרגיל על האדם בעל שלוש הרגליים. אני שולף דף שמצוירים עליו תשעה מדחומים, כאשר מתחת לכל מדחום מופיעה ספרה בין 1 ל-9. אני מבקש מהילדים לצייר את גובה פני הכספית שמייצג, עבור כל מספר, את הסיכוי להוציא שלושה מגפיים באותו צבע, כשמוציאים כמות כזו של מגפיים. בשלב הזה אני ודימה כבר מיהרנו לרופא שיניים, ולכן אני הראיתי להם את הפתרון עבור 1, 2 (הסיכוי הוא 0), 7, 8, ו-9 (הסיכוי הוא 1), והשארתי להם לפתור את החידה רק עבור 3, 4, 5 ו-6. הם אכן ציירו את העמודות כך שהסיכוי להצליח עולה ממספר למספר, ודיברנו על זה (איור 26).

[הייתי צריך גם להראות להם מדחום אמיתי ולהסביר איך הוא עובד, כי לא בטוח שהם יודעים].

בזה סיימנו את המפגש, ואני ואלה רצנו לארגן את דימה.



איור 26. מדחום שמוודד את הסיכוי להוציא שלוש קוביות בצבע זהה.

מפגש 32. תעודות

שבת, 23 במאי 1981. 10:40-11:15. דימה, פיטר ויבגני.

אני אומר לילדים שזה המפגש האחרון לשנת הלימודים הזו, ושהם צריכים להשתדל לפתור נכון את התרגילים היום.

תרגיל 1

אני מזכיר לילדים מה המשמעות של פעולת החיבור ושל סימן השוויון, ואנחנו פותרים מספר תרגילים בחיבור.

תרגיל 2

את התרגיל הזה לקחתי מספר לימוד א"ב בולגרי. כל אחד מקבל דף עבה שמחולק בקווים ישרים ל-20 ומשהו משבצות. בכל משבצת יש תרגיל בחיבור, למשל, $3+2=$ (כל התרגילים הם בתחום ה-7, כלומר, הסכום הגדול ביותר הוא 7). הילדים פותרים את כל התרגילים וכותבים את הפתרונות בעפרון. אני בודק את הפתרונות, מתקן את הטעויות (מוחק אותן, והם מחשבים את הסכום מחדש), ומראה להם משבצות שהם פספסו.

דימה כותב את המספרים 3 ו-4 בכתב מראה. אני כותב על דף את כל הספרות ומניח לידו. פיטר סיים ראשון, בלי אף טעות (אם כי הוא דילג על שתי משבצות). דימה סיים שני, עם טעות אחת שהוא מצא לבד. להפתעתי, היה לו קושי מסוים עם התרגיל $0+2$, הוא התלבט האם זה 0. יבגני עבד לאט יותר מהאחרים, אבל גם הוא עשה רק טעות אחת. הוא התקשה בתרגילים $2+5$ ו- $3+4$; הבאתי לו בדידים והוא הצליח. הבנים שכבר סיימו הפריעו לו – הסיחו את דעתו ונתנו לו רמזים. תוך כדי העבודה, ויטלי, אבא של פיטר, צילם אותנו.

תרגיל 3

התרגיל הבא: למצוא את כל המשבצות שסכומן 7 ולצבוע אותן בטוש אדום. אני שוב מזכיר לכולם לדייק, ומציע להם לשים קודם נקודות אדומות במשבצות המתאימות ואז לבדוק ביחד (כל אחד פספס

כמה משבצות, אני מראה להם), ורק אז לצבוע. אחרי שהם צובעים מתקבל בגדול המספר 115, אבל הילדים שמים לב לזה רק כשאני שואל אותם במפורש ומראה להם את הדף מרחוק. דימה מאד התפלא שיצא ככה.

תעודות.

אני מראה לילדים את תעודת הסיום של התואר שלי, מסביר להם מה זו תעודה, מה היא אומרת, מה כתוב עליה. אני מראה להם גם את הנספח שכתובים בו הציונים, ומסביר להם מהו "ציון שנתי". אחרי זה אנחנו מתחילים בטקס הענקת התעודות.

הכנו את התעודות מתעודות מוכנות שקנינו שהיו מיועדות למדריכים בתנועת הנוער. גזרנו את השוליים שלהן (כולל הסלוגן "עובדי העולם, התאחדו!") על הפטיש והמגל הדבקנו ציור צבעוני (שלוש קבוצות נחתכות וגרף עם חצים צבעוניים), את המילה "תעודה" השארנו, ועל המילה "למדריך" הדבקנו דף עם המילים "של החוג למתמטיקה". תחת הכותרת הזו כתבנו: *תעודה זו מוענקת לדימה זבונקין על כך שבמשך שנה שלמה הוא למד מתמטיקה ונהיה מאד חכם. 23 במאי, 1981* (כמוכן ששאר הילדים קיבלו טקסט דומה).

אני מסביר להם שהציון 5 שהם ציירו הוא הציון השנתי שלהם, ושהדף הזה הוא הנספח לתעודה שלהם. דימה שואל:

– למה כולנו קיבלנו 5 ?

אני עונה:

– כי כולכם למדתם ממש טוב השנה. חוץ מזה, אני חושב שהרווחתם את הציון הזה ביושר היום: אם הייתם מחשבים משהו לא נכון, והייתם צובעים משבצות אחרות, אז לא הייתם מקבלים 5.

הטיעון האחרון מצית דיון ביניהם: רק עכשיו נפל להם האסימון שהתוצאה הייתה תלויה בכך שיפתרו נכון. אחר כך כל אחד בתורו מקריא את מה שכתוב בתעודה שלו. נראה לי שהם באמת האמינו שהם נהיו חכמים יותר.

אני מברך את כולם לכבוד סיום השנה. קטיה מצלמת כל אחד עם התעודה. אחר כך הם מתיישבים ומשוויצים אחד בפני השני:

– אני קיבלתי 5 !

– גם אני קיבלתי 5 !

– גם אני קיבלתי 5 !

– ואני חכם !

– גם אני חכם !

– ואני קיבלתי 5 !

וכן הלאה, עד שדימה מכריז:

– אין לנו מה להשוויץ, כולנו קיבלנו אותו דבר.

כמה תרגילים נוספים

בחלק הזה אני עובר ברפרוף ובלי הרחבות על עוד רשימה של תרגילים מעשרים המפגשים הראשונים – אלה שהצלחתי להזכר בהם (ולא מוזכרים במקומות אחרים).

זיהוי כמות החפצים בלי ספירה.

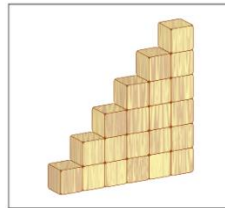
1. בונים מדרגות מקוביות (ראו איור 27) ועל כל מדרגה שמים מספר (לפי הסדר). בודקים האם במדרגות העליונות המספר תואם לכמות הקוביות מתחתיו.

2. בונים מגדל קוביות. מנסים להעריך כמה קוביות יש בו על ידי הצמדה שלו למדרגות.

¹¹ בברית המועצות, סקאלת הציונים הייתה 5-2, ולא 100-0. – ר.פ.

3. ילד אחד לוקח שלוש קוביות פעמיים, וילד שני לוקח שתי קוביות שלוש פעמים. למי יש יותר? דנים למה יש להם אותה כמות.
4. בדומה ל-1: מניחים שורה (שטוחה) של קוביות, ומעליהן מספרים. אפשר לזהות את מספר הקוביות בשורה אחרת על ידי הצמדה לשורה הזו.
5. חלוקת מכתבים למעטפות: מנסים לחלק מכתבים בין כמות קטנה יותר של מעטפות. כשהמעטפות נגמרות, מנסים לחלק את המכתבים אחרת, ומגלים שעדיין חסרות מעטפות.

איור 27. מדרגות מקוביות.



קומבינטוריקה.

1. לסדר משולש, עיגול וריבוע בדרכים שונות (סדרים שונים).
2. אותו דבר אבל עם שלושה צבעים.
3. אותו דבר אבל עם שני ריבועים ושני עיגולים.

מיון.

נתונה טבלה בגודל 4×4 . ליד כל שורה מצוירת צורה: ריבוע, עיגול, משולש וחצי-עיגול. מעל כל עמודה מצוירים צבעים: אדום, כחול, צהוב, ירוק. צריך לשים בכל משבצת את הכרטיס המתאים (למשל, כרטיס עם ריבוע כחול בשורה של הריבוע ובעמודה של הכחול).

לוגיקה: כימות אוניברסלי.

- על השולחן מונחות מספר צורות. האם נכון ש:
- א. כל המשולשים אדומים?
 - ב. כל הצורות הכחולות הן עיגולים?
 - ג. כל הצורות הן מלאות, בלי חור באמצע?

טו

1. מכניסים לתוך גליל שלוש כדורים: אדום, כחול וצהוב. באיזה סדר הם יצאו ממנו בחזרה?
2. יחס סדר חלקי: מציירים מספר פרטי לבוש. באיזה סדר לובשים אותם? שאלות לדוגמה:
 - (א) מה אפשר ללבוש לפני שלובשים מעיל?
 - (ב) מה חייבים ללבוש לפני שלובשים מעיל?
 - (ג) איזה בגדים אפשר ללבוש אחרונים?
 - (ד) איזה בגדים אפשר להוריד ראשונים?
 - (ה) מה אפשר להוריד רק אחרי שמורידים מעיל?
 - (ו) מה אפשר להוריד גם לפני המעיל וגם אחרי?
 - (ז) מה חייבים להוריד לפני שמורידים מעיל?
3. אני נוסע לעבודה באוטובוס, אחר כך ברכבת קלה, ואז ברכבת, ואז ברכבת תחתית. באיזה סדר אני חוזר מהעבודה?

סימטריה

1. מותחים קו ישר באמצע דף ואומרים שזו מראה. מציירים משהו בצד אחד של הקו ומבקשים מהילד לצייר את ההשתקפות שלו. אפשר לבדוק את הפתרון בעזרת מראה אמיתית. אחר כך אפשר להראות לילד ציורים של פרפרים, פרחים וכו', ולשאול איפה ציר הסימטריה שלהם.
2. כמו 1 אבל קצת יותר קשה: הציור נמצא במקום צדדי בדף, או להפך – חוצה את ציר הסימטריה. אפשר גם להשתמש בכמה צבעים.

3. את אותה משימה אפשר לעשות גם על לוח פסיפס.

ס'ב'ב

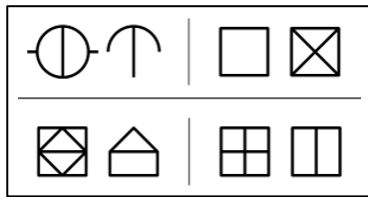
1. מציירים צורה. הילד צריך לצייר את אותה צורה, אבל "שוכבת" במקום "עומדת" (ראו דוגמאות באיור 28). אפשר להדגים קודם בעזרת כרטיסים עם צורות שונות.
2. וריאציות נוספות: אותו תרגיל אבל על לוח פסיפס; אותו תרגיל אבל נגד כיוון השעון.

שונות

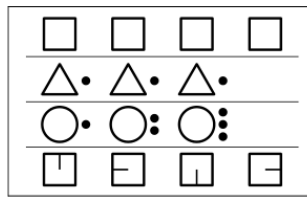
1. להמשיך את הסדרה – איור 29.
2. נתונים זוגות של ציורים (איור 30). לכל זוג, צריך לצייר את "ההפרש" ביניהם, כלומר את הקווים שמופיעים באחד הציורים אבל לא בשני.
3. מרכיבים על לוח הפסיפס צורה עשויה מאבנים אדומות וצהובות. המשימה: לבנות צורה זהה, אבל עם אבנים צהובות במקום אדומות ואדומות במקום צהובות.
4. נתונה צורה. המשימה: לצייר אותה הפוכה, כלומר מסובכת ב- 180° .
5. להמחיש בעזרת צורות מנייר שאלכסון מחלק הן מלבן והן מקבילית לשני משולשים זהים.
6. חידה: זהה לתרגיל 3 במפגש 22 (ר' עמ' 33), כאשר הצורות צבועות בשלושה צבעים.
7. למשולש יש שלוש פינות. גוזרים אחת מהן. כמה נשארו? (התשובה: ארבע. כשגוזרים פינה של משולש מקבלים מרובע).
8. להגיד מה יהיה צבע החצאית וכיוון הידיים של הדמות הרוקדת במשבצת החסרה (איור 31). אפשר לצבוע את החצאיות מראש, או לבקש מהילדים לצבוע אותן בסוף (ולחקיד שבכל שורה ובכל עמודה כל החצאיות יהיו בצבעים שונים).
9. שאלות על ציור שמכיל הרבה צורות צבעוניות, בסגנון של זה שמופיע באיור 32 – כמה

מופיעים בו מכל אחד מהבאים:

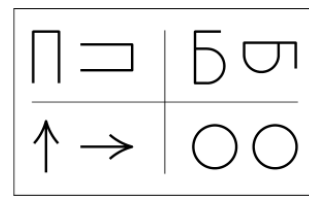
- (א) עיגולים?
- (ב) צורות אדומות?
- (ג) מצולעים?
- (ד) צורות קמורות?
- (ה) מרובעים?
- (ו) מלבנים?
- (ז) מצולעים אדומים?
- (ח) צורות?



איור 30. המשימה: לצייר את "ההפרש" בין כל זוג צורות.



איור 29. הסדרות מצויירות משמאל לימין. צריך לנחש מה החוקיות ולצייר את הצורה הבאה.



איור 28. צורות מסובכות ב- 90° .

איך מציירים קוביה?

- זה סיפור שכמעט אבד. תיעדתי אותו על דף נפרד ובלי תאריך.
- פעם דימה אמר לי:
- אני יודע איך מציירים קוביה. הראו לי.
- נו, איך?

הוא צייר את הציור הסטנדרטי שמתאר היטל אקסונומטרי של קוביה (איור 33 משמאל). קראתי איפשהו בזמנו שילדים נוטים יותר לצייר בפרספקטיבה הפוכה, אז התחלתי להציג לו עם שאלות:

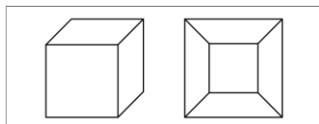
- מה זה?
- זו הפאה העליונה שלו.
- ואיפה התחתונה?
- לא רואים אותה.
- למה רואים את העליונה ואת התחתונה לא?
- הממ...
- דימה שקע בהרהורים ואז הוסיף,
- גם רואים את הצד הזה, ואת הצד השני לא.

אחרי זה הוא לקח קוביה, לקח טוש, התיישב על הרצפה עם ערימת דפים לידו, והתחיל לחשוב. הוא עבד לפחות שעה, ואז ניגש אלי:

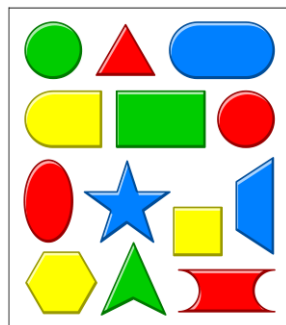
– הנה, אבא, הבנתי.

והראה לי את מה שמתואר באיור 33 מימין, דהיינו, קוביה בפרספקטיבה הפוכה, כשהוא מסביר לי איפה הפאה העליונה, איפה התחתונה, איפה הימנית ואיפה השמאלית. שיבחתי אותו על הציור. אני מודה שאני קצת דוגמטי בסיפור הזה. אם כבר החלטתי שלא כדאי למשוך ילדים לשלב התפתחותי מתקדם יותר, ומישהו העז לעשות את זה במקומי, אני אפילו אמשוך אותם בחזרה אחורה. לא צריך להפריז בחשיבות של אף אחת מהגישות האלו. מה שכן, אני בהחלט זוקף לזכותי את השעה שבה דימה ישב ועבד עצמאית – שעה שלמה שבה הוא חקר את השאלה איך אנחנו רואים קוביה ואיך אמורים לצייר אותה.

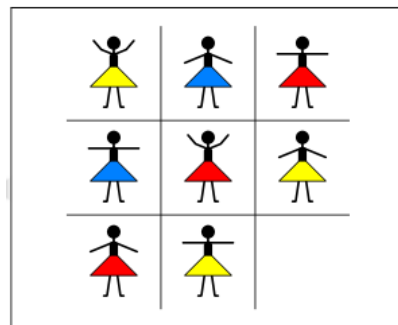
אני רוצה להוסיף גם שהחוקר ב. ראושנבך מראה במונוגרפיות שלו "מבנים מרחביים בציור" (1980) ו"מערכות של פרספקטיבה באמנות חזותית. תיאוריית הפרספקטיבה הכללית" (1986) שלאמיתו של דבר יש הרבה מערכות פרספקטיבה שונות, ולכל אחת מהן יש יתרונות וחסרונות. פרספקטיבה הפוכה היא לא טובה יותר או פחות מזו הקלאסית של הרנסנס. היא מתאימה יותר לתיאור חפצים קרובים אלינו, וזו של הרנסנס מתאימה יותר לתיאור חפצים רחוקים מאיתנו.



איור 33. משמאל: כך מבוגרים מציירים קוביה. מימין: איור אופייני יותר לילדים.



איור 32. צורות צבעוניות.



איור 31. "הדמויות הרוקדות". צריך להשלים את הדמות החסרה.

3 ילדים ו- $\binom{5}{2}$: סיפורה של חידה אחת

פרק זה עושה שימוש בחומרים מהמאמר שלי "ילדים ו- $\binom{5}{2}$ ", שפורסם בכתב העת "ידע הוא כח", גליון מס' 2 לשנת 1986.

הקוראים ודאי כבר שמו לב שבמפגשים שלנו על תורת ההסתברות, למשל, אין לא הגדרות, לא משפטים, לא נוסחאות, ואפילו לא חישובים אריתמטיים. המושג "תורת ההסתברות" נבחר פשוט בהיעדר כותרת מתאימה יותר. אז מה יש שם, אם כל הרכיבים המתמטיים הסטנדרטיים אינם? כדי לענות על השאלה הזו, צריך לשאול שאלה אחרת: איך בכלל הופיעה תורת ההסתברות? מה המקור שלה? כמו הרבה מדעים אחרים, אפילו כמו האריתמטיקה, תורת ההסתברות צמחה מתצפיות על תופעות מסויימות שקורות בעולם האמיתי – ספציפית, תופעות מקריות או בלתי צפויות. ובכן, את התצפיות האלו, שקדמו למדע שעוסק בהן, אפשר לעשות עם ילדים. לא כל הצפית כמוכן, רק את הפשוטות ביותר. ילדים מתעסקים בזה גם מעצמם – למשל, כשהם משחקים במשחקים שכוללים קוביות. אנחנו יכולים להדגיש ולהבליט מעט את טבען ההסתברותי של התצפיות שלהם, וגם להראות להם שהעולם ההסתברותי הוא עולם מגוון. אפשר, למשל, להציע לילדים להחליף את הקוביה בפאון עקום, כך שהם יראו שהמשחק הופך ל"לא הוגן": מספרים מסויימים מתקבלים בתדירות גבוהה יותר מאחרים. אפשר גם להמציא משחק שבו צריך לספור את סכום המספרים שמתקבלים בהטלת שתי קוביות. גם כאן, הילדים ישימו לב בשלב מסוים שהסכום 7 הרבה יותר נפוץ מהסכום 2. בפעילות מהסוג הזה אין שום מגבלות מלבד הדמיון שלנו והאפשרויות העומדות בפנינו. אם ילדים הבינו משהו, אם נשתל איזה זרע של תובנה בראש שלהם – טוב מאד. אם לא – לא נורא; סתם שיחקו.

אנסה לנסח שוב. מעניין אותנו לא המדע בפני עצמו, כמוצר מוגמר של עבודתם של הדורות שקדמו לנו, אלא התצפיות ששימשו כבסיס להתפתחותו.

בפרק הזה אני רוצה להרחיב אודות דוגמה אחת. בפרק 1 סיפרתי על מפגש אחד; בפרק הזה אספר על תרגיל אחד. תרגיל אחד בלבד – וכל כך הרבה נקודות למחשבה.

תרגיל בקומבינטוריקה

החידה שלנו לקוחה מתחום הקומבינטוריקה. בזמנו למדו את התחום את הזה בבית הספר, בכיתה ט' (בבתי ספר עם עשר שנות לימוד). אחר כך החליטו שזה קשה מדי (נסו רק להזכר בבינום ניוטון הנורא!) והוציאו את הנושא מתכנית הלימודים. אבל כל הקשיים של התיכונים נבעו בכלל מזה שהם נאלצו להתחיל ישר מהנוסחאות, בלי למשש בידיים שום דבר. ואני מתכוון ל"למשש בידיים" במובן המילולי. הרי בקומבינטוריקה מדובר בספירה של כמות של קומבינציות כאלו ואחרות של פריטים. רק שהפריטים לא פיזיים, צריך לדמיין אותם, וכך גם את הקומבינציות. היה עדיף, אולי, לו היינו מתחילים מקומבינציות של חפצים אמיתיים, כמו קוביות או אסימונים, אבל מי יתעסק בדברים האלה בכיתה ט'?

אנחנו מתיישבים סביב לוח הפסיפס. המשימה היא כזו: צריך "להרכיב שרשרת" – סדרה של חמש אבנים, שתיים מהן אדומות והשאר כחולות. יש, כמוכן, הרבה דרכים לעשות את זה. ובכן, המשימה שלנו היא לגלות כמה דרכים כאלו יש. אנחנו רוצים לעבור על כולן, ולהמנע מחזרות על אותה סדרה. טכנית, הסדרות האלו נקראות *קומבינציות של שני אלמנטים מתוך חמישה*; הכמות שלהן מסומנת ב-

$\binom{5}{2}$, ושווה ל- $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$. כמוכן שהילדים לא יודעים את כל זה, וגם לא ילמדו את זה במפגשים שלנו.

הם פשוט מרכיבים שרשראות – לפי התור, אחד אחרי השני. כל שרשרת נבחרת על ידי כולם – האם היא אכן חדשה או שהיא תואמת לאחת שכבר הורכבה לפני כן. מדי פעם אנחנו גם מתווכחים. למשל, האם באיור 34 מתואר פתרון אחד או שניים שונים? האמת היא שזו שאלה של מוסכמה: אנחנו יכולים לסכם שהפתרונות האלה שונים, ויכולים לסכם שהם זהים. נקבל שתי חידות שונות, שתיהן מעניינות למדי. החידה הקלה יותר היא זו שבה השרשראות האלו נחשבות שונות, וכך אנחנו מסכמים.

בסופו של דבר אנחנו מגיעים לעשרה פתרונות.

השאלה המרכזית בקומבינטוריקה היא כמה פתרונות יש בסך הכל. אבל הילדים עוד רחוקים מזה. הם עוד לא מכירים בכלל בהבדל בין "זה בלתי אפשרי" ל"אני לא מצליח", והם בטוחים לחלוטין שאני דווקא מסוגל להרכיב גם את הפתרון האחד-עשר, וגם את השנים-עשר, ובכלל כמה פתרונות שארצה. אני ניגש לעניין. הילדים הרכיבו פתרונות באופן אקראי למדי, בלי סדר מסוים. אני מציג להם שיטתיות אפשרית – עובר על הפתרונות לפי סדר מוגדר. ראשית אני מניח ריבוע אדום אחד במקום הראשון, ואת השני – במקום השני, ואז בשלישי, וברביעי, ובחמישי. אחרי שאני ממצה את הסדרה הזו, אני מניח את הריבוע האדום הראשון במקום השני, וכן הלאה. אתם חושבים שזה מרשים אותם? בכלל לא. הדבר היחיד שהם הבינו מזה הוא שגם אני לא מצליח להרכיב עוד פתרון. (רק שהסמכותיות שלי לא תיפגע). הם כבר יודעים להבחין בין פתרון לפתרון, אבל לא בין סדר לבלאגן. צריך לחכות עם החידה הזו עוד חצי שנה. (ובינתיים אולי להרגיל אותם להחזיר את הצעצועים למקומם. מעניין האם סדר בחפצים קשור לסדר במחשבות).

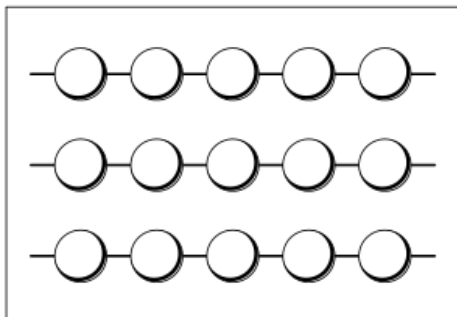
תרגילים שקולים

חלפה חצי שנה, אולי יותר, והחידה צצה שוב. כמוכן שאני משנה את הניסוח שלה. הפעם כל אחד מקבל דף שמצוירות עליו שורות של עיגולים מחוברים זה לזה, חמישה עיגולים בכל שורה (איור 35). יש כ-15 שורות כאלו, למקרה של טעויות וחזרות. המשימה היא לצבוע בכל שורה שני עיגולים. המנצח הוא מי שימצא הכי הרבה פתרונות. ועוד פרט אחד שולי: אני נותן לילדים טושים בצבעים שונים, ובהמשך הדיון מתעלם מהצבעים: בכל פעם אפשר לצבוע שני עיגולים בכל צבע שהוא. ילדים לא תמיד מבינים מה מהפרטים חשוב ומה טפל, ואני מנסה להדגיש את טבעה הקומבינטורי של החידה. בקבוצה אחרת, במקום לגוון בצבעים, גיוונתי בצורות – בכל שורה ה"חרוזים" היו בצורה שונה. אחרי כמה דקות של עבודה עצמאית (שמראה, אגב, שהחידה הזו קשה יותר על הדף מאשר בפסיפס, וזה למרות חצי השנה שחלפה) אנחנו דנים בתוצאות. כעת לכולם יש עשרה פתרונות.

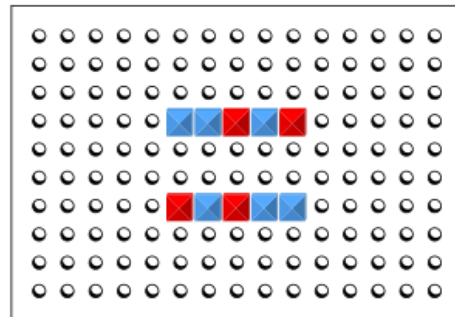
– אתם זוכרים שהייתה לנו חידה מאד דומה לזו?

כמה קל לפספס כשמתמקדים בנקודת המבט שלנו ולא של הילדים. מה זה אומר, "דומה"? אני משום מה חשבתי שמוכן מאלי שחידה דומה היא חידה שגם בה היה צריך לבחור שני דברים מתוך חמישה. הילדים חשבו שחידה דומה היא חידה שגם בה הם צבעו בטושים. אני לא אוהב לרמוז, אבל הפעם אין לי ברירה. הילדים לוקחים את הפסיפס בהתלהבות, מרכיבים שרשראות ואפילו משווים ביניהן לבין הפתרונות שלהם על הדפים. מישהו נזכר שגם בפעם ההיא היו עשרה פתרונות. זה, סוף-סוף, מעלה ספק ראשון:

– מה, באמת אי-אפשר להרכיב עוד פתרונות?
אני מחייך במסתוריות ועובר לתרגיל אחר.

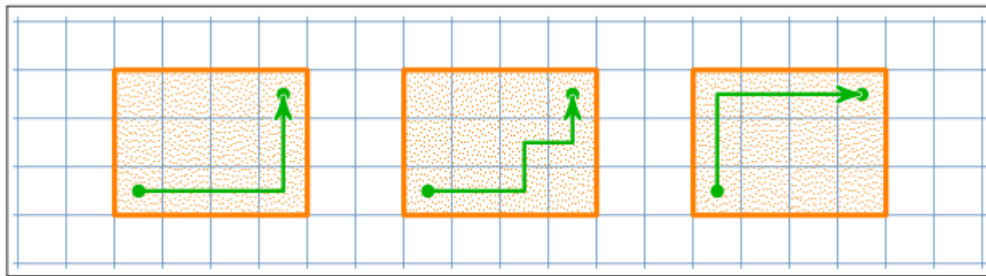


איור 35. מציירים על דף את השרשראות האלו; צריך לצבוע שני חרוזים בכל שרשרת כך שכל השרשראות יהיו שונות זו מזו.



איור 34. האם השרשראות האלו זהות?

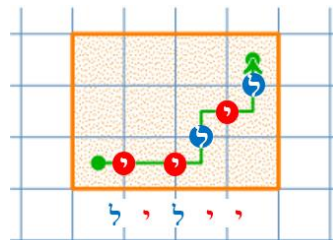
אני חושב שמצאתי מכרה זהב, איזה סוג של פרוטאוס. החידה הזו יכולה להופיע במגוון עצום של תחפושות; לכן אפשר לחזור אליה שוב ושוב. הנה עוד גרסה של החידה הזו. כל משתתף בתורו מקבל דף משבצות ועליו מלבן בגודל 3×4 . (אחרי שהילדים מתווכחים האם זה ריבוע, אני יכול להגדיר את תנאי התרגיל). ובכן, צריך לצייר את כל המסלולים האפשריים מהפינה השמאלית התחתונה לפינה הימנית העליונה, כאשר הצעדים המותרים הם ימינה או למעלה (איור 36). אם אתם לא בטוחים איך החידה הזו קשורה לחידה הקודמת, התאזרו בסבלנות: תכף הכל יתבהר.



איור 36. המשימה: למצוא את כל המסלולים האפשריים מהפינה השמאלית התחתונה לפינה הימנית העליונה.

העבודה בעיצומה – רואים שה"מתמטיקאים" שלי בגרו: הם טועים פחות, ומוצאים די מהר את כל 10 הפתרונות האפשריים. (מפה לשם, אנחנו עלולים להתקל בעוד מכשול: הם מתחילים להתרגל לזה שבכל התרגילים בקומבינטוריקה הפתרון הוא 10. הייתה פעם אחת – לא זו – שמישהו מהם קרא לזה בדיוק כך: "החידה של ה-10". צריך לתת להם גם תרגילים עם כמות אחרת של פתרונות). לבסוף, אני שואל אותם את השאלה החשובה באמת: *כדי לעבור מפינה לפינה, כמה צעדים צריך לעשות למעלה וכמה ימינה?* אני נתקל בבעיה. אני מחשיב כצעד מעבר ממשבצת למשבצת סמוכה, והילדים מחשיבים כל קטע ישר כצעד אחד. אני מסביר להם את ההגדרה שלי. האם עכשיו התשובה ברורה? לא! אני לא מצליח להבין מה הסיפור. אחרי המפגש אני חושב על זה, ומבין שכנראה החידה נראתה לי פשוטה רק כי לא חשבתי עליה מספיק. הרי ייצוג של וקטורים על ידי קוארדינטות (כלומר, העובדה שבחיבור וקטורים אפשר לחבר את הקוארדינטות שלהם) מבוסס בדיוק על העקרון הזה – שבכל מסלול יש את אותה כמות צעדים למעלה ואת אותה כמות צעדים ימינה. אני זוכר בבירור איך הייתי המום מהתכונה הזו של וקטורים, וכבר הייתי די גדול. אפשר לעשות סדרה טובה של תרגילים על בסיס התכונה הזו, ואפילו להשתמש בה כמבוא לעובדת קיומם של מספרים שליליים, אם מאפשרים לעשות צעדים לאחור ולספור אותם עם הסימן מינוס. (נדמה לי שהרעיון הזה לא הגיע לכדי יישום).

בינתיים, בשיעור, אנחנו סופרים צעדים. מתברר שכל מסלול מורכב משלושה צעדים ימינה ושני צעדים למעלה. לכן במפגש הבא אנחנו פותרים "תרגיל חדש": כותבים סדרות של אותיות משתי אותיות למ"ד ושלוש אותיות יו"ד – לליי, ליליי, ליילי וכו'. הרעיון הוא שכל יו"ד מסמלת צעד ימינה, וכל למ"ד מסמנת צעד למעלה (איור 37).



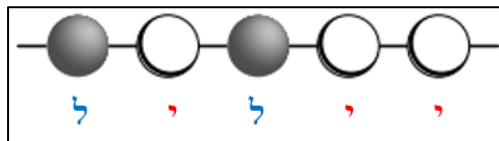
איור 37. כל צעד ימינה מסומן באות יו"ד, וכל צעד למעלה מסומן באות למ"ד.

מדהים לראות כמה הילדים מתרגשים כשאני מראה להם את הקשר הזה! הם דורשים מיד שנגזור את הדף שעליו כתבנו את סדרות האותיות, ומניחים כל סדרה ליד המסלול המתאים. אני בינתיים צופה מהצד, ומנסה לזרוק להם עוד רעיון.

– אולי נמצא על הדרך עוד פתרונות, – אני אומר. – הפתרון האחד-עשר, השנים-עשר...

רק יבגני מגיב לדברים שלי:
 – לא, – הוא עונה, – פה יש עשר וגם שם יש עשר.
 – ואם הם שונים? אולי פה יש עשרה פתונות, ושם יש עשרה אחרים?
 בשלב הזה כל הדפים כבר מוצמדים למסלולים, ותקוותנו מתבדות: כל עשרת הפתונות תואמים אחד לשני, או, כמו שאומרים המתמטיקאים, יש ביניהם התאמה חד-חד-ערכית ועל. אבל חשוב להטיל ספק בתוצאה, ולו לרגע – כך מעריכים אותה יותר.
 עכשיו, על גלי ההתרגשות, אפשר להתקדם עם זה עוד קצת.
 – תגידו, ילדים, היה אפשר לסמן את הצעדים לא באותיות יו"ד ולמ"ד אלא באותיות אחרות?
 – ברור! היה אפשר לסמן באיזה אותיות שרוצים.
 – איזה, למשל?
 – למשל אל"ף ובי"ת, – מציע פיטר.
 – או חי"ת וגימ"ל, – מוסיף דימה.
 – או למשל, – אני אומר, – אפשר לסמן צעד ימינה בסימן פלוס, וצעד למעלה בפיסק.
 הילדים צוחקים.
 – או, – אני ממשיך בטון אדיש, – לסמן צעד ימינה בעיגול לבן, וצעד למעלה בעיגול צבעוני.
 – איך?
 – הנה, ככה.
 אני לוקח את המסלול שבאיור 37, לוקח את הסדרה המתאימה לו ייליל – ומצייר לידם את ה"שרשרת" שבאיור 38.

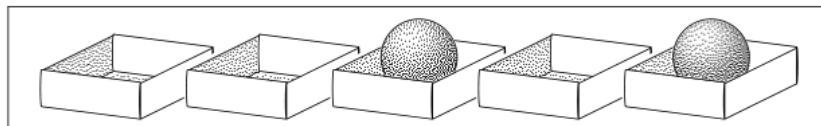
איור 38. מחליפים את האות יו"ד בחרוז לבן, ואת האות למ"ד בחרוז ירוק.



בשקט שהשתרר לרגע – השקט שלפני הסערה – אני מספיק לחבר את העיגולים אחד לשני, כך שכעת הם תואמים בדיוק לחידה השניה. הילדים זיהו! אי אפשר לטעות בזה: ההארה מלווה בצעקות של שמחה, כמעט בריקודים. הכל מתערבב על השולחן, וכבר אי אפשר להמשיך במפגש. הגיע הזמן לסיים. עכשיו אפשר לעזוב את הנושא לאיזה חודש, להתעסק בדברים אחרים, ולתת לרעיון לשקוע ולהכות שורשים. מה עוד שחידות מאתו סוג ממצות את עצמן.

לסמן...

אנחנו מתקרבים לקו הסיום. על השולחן מונחות חמש קופסאות גפרורים ושני כדורים: צריך להניח את הכדורים בשתי קופסאות, ולהשאיר את השלוש האחרות ריקות (איור 39). ושכל פתרון יהיה שונה.



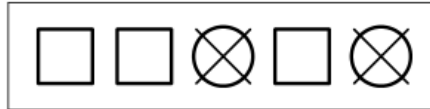
איור 39. צריך להניח שני כדורים בשתיים מתוך חמש הקופסאות בדרכים שונות. הבעיה העיקרית היא לזכור את כל הדרכים שכבר ניסו, כשהן כבר לא נמצאות מולנו פיזית.

בהתחלה הם עובדים יפה, אבל כבר בפתרון הרביעי או החמישי הם מתחילים להתווכח האם כבר היה פתרון כזה או לא. הם מבקשים שאכריע, אבל אני עושה את עצמי כאילו גם אני שכחתי. כמובן שהבעיה הייתה מכוונת: הייתי יכול להכין מספיק קופסאות וכדורים, לשים חמש קופסאות בכל שורה, והיינו מקבלים בדיוק את אותו תרגיל שפתרנו קודם. ועכשיו צריך להשוות כל פתרון עם פתרונות שהורכבו קודם וכבר לא נמצאים מולנו. מה עושים?

זו בעיה שלא כל ילד מסוגל להתמודד איתה. צריך לסמן בסימן אחד קופסה ריקה ובסימן אחר קופסה עם כדור, ולרשום את כל הפתרונות. אבל מאחורי המילה הקטנה הזו, "לסמן", מסתתר רעיון חשוב שהתפתח ביחד עם האנושות. מספיק להזכר בהיסטוריה ההתפתחות של הפיקטוגרף לכתב החרטומים, ושל כתב החרטומים לאלפבית. המתמטיקה מאז ומעולם עסקה בהמצאה וליטוש של מערכות סימונים – ראשית של מספרים, אחר כך של פעולות אריתמטיות, בהמשך של משתנים, וכן הלאה עם אובייקטים יותר ויותר מופשטים. כבר במאה העשרים חקר מערכות הסימונים הפך למדע בפני עצמו – סמיוטיקה. עוד נחזור לדיון רציני יותר בשימוש בסימונים בפרק 5. בינתיים רק אגיד שבחוג שלנו תמיד השתדלתי לא רק לפתור תרגילים, אלא גם לנסות, ולו ביני לבין עצמי, איזשהן מטרות כלליות יותר. ההיכרות עם הרעיון של הסמיוטיקה הייתה אחת ממטרות העל האלו. דנו לא מעט בכך שבעזרת ספרות מסמנים מספרים, בעזרת אותיות – מילים, ומוזיקה למשל ניתן לסמן בעזרת תווים. דיברנו גם על מערכות סימון נוספות, כמו תמרוקים למשל. כך שהרעיון הזה לא ממש חדש לילדי החוג. ובכן, הילדים מציעים לצייר את הפתרונות. בהתחלה הם באמת מנסים לצייר משהו ריאליסטי; נראה שהם בשלב הפיקטוגרפי כרגע. אבל קשה לצייר כך, ודי מהר אנחנו עוברים לשלב כתב החרטומים: הציורים הופכים לאבסטרקטיים יותר – עכשיו ריבוע מייצג קופסה ריקה, וריבוע עם עיגול בתוכו מייצג קופסה מלאה. אני מציע להם להחליף את הריבוע עם העיגול בעיגול. עוד מכשול שצץ: הילדים לא מציינים מדויק, ולא תמיד קל להבדיל בין הריבוע לעיגול שלהם. אני מציע עוד הצעה: לצייר את העיגול עם איקס בתוכו. עכשיו, אחרי כל הגלגולים האלה, אחד מהפתרונות נראה כמו באיור 40.

– למה עם איקס?
 – מה זה משנה איך מסמנים? – אני עונה במשיכת כתפיים, מנסה לרמוז שוב למה שבסמיוטיקה היו מגדירים כ"עצמאיות ושרירותיות (עד גבול מסוים) של הסימון ביחס למסומן".

איור 40. סימון: הכדורים מונחים בקופסה הימנית ובקופסה האמצעית.



אגב, במובן מסוים התרגיל הזה יותר קשה מהקודמים: צריך להשוות כל פתרון לא לפתרונות הקודמים, אלא לסימונים שלהם. הפעם הילדים מוצאים רק תשעה פתרונות, ואחרי עוד כמה נסיונות כושלים מגיעים למסקנה שאין פתרונות נוספים. עכשיו, סוף סוף, מגיעה דקת התהילה שלי, זו שחיכיתי לה והתכוננתי אליה כל כך הרבה זמן. פיטר מצביע על הדף וצועק:
 – היי, תראו! יו"ד, למ"ד, יו"ד, למ"ד, יו"ד!
 – כן, אבא, כבר מזמן רציתי להגיד לך את זה! – קופץ דימה.
 – אז אמור להיות עוד פתרון, – מצטרף יבגני.
 – בואו נביא לפה את הפתרונות של החידה ההיא, ונבדוק מה חסר, – מציע דימה.
 דימה כבר רץ לחדר העבודה לחפש את הפתרונות הרלוונטיים, אבל לא היה צריך ללכת רחוק: המעטפה עם הפתרונות כבר חיכתה לכולם על השולחן.

הייתי מאד מבואס ש"לא היה צריך ללכת רחוק". גם כי סתם רצתי לחדר אחר לחפש את הפתרונות, ובעיקר, כי הבנתי שלא הייתה פה שום תגלית מרעישה: אבא הכין הכל מראש. – דימה.

בחרנו את גרסת החידה שנראתה לנו הכי נוחה: זו עם השרשראות. בזמן העבודה חל בלבול מסוים: כשהנחנו על השולחן את הדפים עם הפתרונות, אחד מהם הסתובב ב-180°. כך פתרון אחד נעלם לנו, ופתרון אחר, הסימטרי לזה שנעלם, הופיע פעמיים. בסוף גילינו וסידרנו את זה.
 רציתי להגיד שהדף מסובך, אבל לא אמרתי, חשבתי שאולי זה לא משנה. – דימה.

משום מה כל הילדים היו בטוחים שהפתרון שחסר לנו יהיה האחרון. למעשה הוא היה רביעי, אבל זה ממש לא הפריע להם. הם הניחו את הכדורים בהתאם לפתרון החדש, הכתיבו לי את הציור המתאים,

והתאימו את שאר הפתרונות של השרשראות לפתרונות שכבר רשמנו קודם לכן. יצאתי מהתרגיל בתחושת נצחון.

בעיני, קרה היום משהו חשוב מאד. לא סתם פתרנו תרגיל. פתרנו אותו על ידי רדוקציה לתרגיל אחר, איזומורפי לו, שכבר פתרנו בעבר. זה רעיון מתמטי חשוב ביותר. מדהים שקיים חומר שאפשר להדגים בעזרתו את הרעיון הזה לבני שש, לא? והם עוד חשבו עליו בעצמם!

הוכחות

דברים קורים בחוג שלנו במהירות מסחררת. בקושי הספקנו להבין רעיון חשוב אחד, וכבר צץ לפתחנו משהו חדש. איכשהו עולה מאלה השאלה: למה בכל פעם יוצאים לנו דווקא עשרה פתרונות? האם באמת אין יותר פתרונות, או שפשוט לא מצאנו אותם? איך מוכיחים שיש רק עשרה?

ובכן, הוכחה. מונח מרכזי במתמטיקה, הייתי אומר אפילו מכונן, מייחד את המתמטיקה מכל שאר המדעים. ההבנה מה נחשב הוכחה ומה לא התפתחה במשך מאות שנים, וקיבלה את צורתה הנוכחית רק איפשהו בתפר בין המאה ה-19 למאה ה-20. טיעונים שהיום כל מורה בבית ספר ידחה על הסף נחשבו מספיק משכנעים בעיני מתמטיקאים במאות המוקדמות יותר, אפילו בעיני הגדולים שבהם. אם חושבים על זה לעומק, יש פה תופעה מוזרה מאד. למה כל מיני טיעונים מופשטים, לעתים אפילו תלושים, הופכים טענה כזו או אחרת ליותר משכנעת בעינינו? תיכונסט חכם אחד שאל את המורה שלו כך: ברור לגמרי שבמשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות – אפשר להשתכנע בזה על סמך דוגמאות – ולמרות זאת, מוכיחים לנו את זה. מצד שני, בכלל לא ברור שמתח חשמלי שווה לזרם כפול ההתנגדות. אבל את העובדה הזו לא מוכיחים לנו אלא רק מדגימים בניסויים. למה?

זו שאלה נדירה. רוב התלמידים מתייחסים להוכחות כאל טקס מסוים שנהוג לעשות במתמטיקה. ככה עושים וזהו. מה שמזכיר את הבדיחה מהמאה ה-18, נדמה לי, על המתמטיקאי שניסה להוכיח ללא הצלחה משהו לדוכס שכר את שירותיו כמורה למתמטיקה, עד שהתייאש ואמר:

– טוב, אני נשבע לך בהן צדקי שזה נכון!

– נו, היית אומר מההתחלה, – ענה הדוכס.

האם זה לא מה שקורה גם לנו, כשאנחנו קוראים, למשל, ספר היסטוריה? אין שם שום הוכחות, רק "תיאוריות": היה כך וכך, במקום כזה וכזה, בתקופה כזו וכזו. נקודה. והנה מסתבר ש"שבועה בהן צדק" – במקרה הזה, בהן צדקו של מחבר הספר – מספיקה לנו בהחלט בשביל להאמין להכלל. למעשה, העבודה היומיומית של המתמטיקאי לא שונה בהרבה מזו של ההיסטוריון. המחשבה שהמתמטיקאי מוצא הוכחה ונרגע היא אשליה, כי ברוב המקרים ההוכחות שלו לא נכונות. אבל אז הוא שם לב שבאותה דרך אפשר להוכיח גם טענה אחרת, שברור שהיא שגויה, וממשיך לחפש – הוא מחפש טעויות, סתירות, דרכים אחרות להגיע למטרה. הוא כובש תחום חדש. והוא נרגע רק כאשר כל חלקי הפאזל מתחברים לתמונה אחת קוהרנטית. גם ההיסטוריון מחפש הרמוניה דומה בין הפרטים, ובעצם גם כל חוקר אחר. אחר כך, בספר, יראו לנו רק דרך קצרצרה מנקודה A לנקודה B. ברגע שהתלמיד קצת תועה בדרך, "פונה ימינה צומת אחד מוקדם מדי", הוא מגיע לאזור לגמרי לא מוכר ולא יודע איך להיחלץ משם. בעוד שהמומחה מכיר לא רק את הדרך הקצרצרה אלא גם את כל הסביבה – הרי הוא כבש אותה.

הדיון הזה קצת מרחיק אותנו מהנושא. נחזור לילדים. אין הרבה חומר שמאפשר להנגיש לילדים את מושג ההוכחה, אבל אפשר למצוא כמה דוגמאות. למשל, המשחק "מה יוצא דופן?", כאשר הפתרון לא מובהק. במקרה הזה, חשוב לא רק להגיד מה יוצא דופן, אלא גם לתת הסבר נכון. פתרנו גם חידות כמו "להוכיח שאנחנו שומעים עם האזניים ורואים עם העיניים, ולא להפך" (הוכחה: אם עוצמים את העיניים לא רואים, ואם אוטמים את האזניים לא שומעים); להוכיח שהעננים קרובים יותר לאדמה מהשמש (הוכחה: הם מסתירים את השמש); להוכיח שאנחנו חושבים עם הראש ולא עם הבטן. לטיעון

האחרון לא הצלחתי למצוא הוכחה משכנעת¹²; בחוג הצעתי את ההוכחה הבאה: אם כורתים למישהו את הראש, הוא כבר לא יכול לחשוב. הם לא קיבלו אותה, אבל אף אחד מהם לא אמר שאת אותו טיעון אפשר לטעון גם לגבי הבטן.

אז איך אפשר להוכיח את נכונות הפתרון של החידה הקומבינטורית שלנו? זה צריך להיות, מן הסתם, איזשהו מעבר סדרתי על האפשרויות, כלומר, מעבר שיאפשר לנו להיות בטוחים לחלוטין שלא פספסנו אף פתרון. לפני שנה הילדים עוד לא היו בשלים לרעיון הזה. אולי עכשיו הם כבר בשלו? נחזור לדיון שהתחלתי לספר עליו. ובכן, איך אפשר להשתכנע שאין עוד פתרונות חוץ מהעשרה שמצאנו? דימה:

– צריך לנסות הרבה שנים, ואם לא מוצאים כלום, סימן שאין.
– ואם יש? – אני מקשה.

– אני לא אצליח למצוא שום פתרון נוסף, – מכריז יבגני בפסימיות.

פיטר שואל אותי האם אני באמת לא יודע כמה פתרונות יש, או שאני יודע ושואל סתם בשביל שנדבר על זה. אני מודה ביושר שאני יודע. בשלב הזה הילדים כבר מפסיקים להבין מה אני רוצה מהם. דימה הציל אותי. הוא אמר איזה משפט... האמת היא שלא לגמרי הבנתי למה הוא מתכוון, וגם לא התעמקתי בזה, כי באותו רגע חשבתי על דברים אחרים. אבל הוא אמר איזה משפט עם המילים "הקופסה הכי שמאלית". נאחזתי במילים האלו ומיהרתי לפרש את כל המשפט בכיוון שאני צריך. ובכן: ניקח את הכדור הראשון ונשים בקופסה הכי שמאלית. איפה אפשר להניח עכשיו את הכדור השני? בכל אחת מהקופסאות האחרות, כמובן, כלומר בשניה, בשלישית, ברביעית או בחמישית משמאל. עד כאן ארבעה פתרונות. אחרי שמיצינו את כל הפתרונות שבהם הכדור הראשון בקופסה הכי שמאלית, נשים אותו בקופסה השנייה משמאל. שוב נשארים ארבעה מקומות אפשריים לכדור השני. עכשיו נשים את הכדור הראשון בקופסה השלישית, וכן הלאה. לסיכום, אנחנו מקבלים חמש פעמים ארבעה פתרונות, סך הכל... עשרים פתרונות! וואו. הילדים בהלם, ואני ממחר לקפל הכל ולסיים את המפגש.

הפעם אני בטוח שכולם ינסו להבין למה בשביל לקבל את הפתרון הנכון צריך לחלק את ה-20 ב-2. [אוף. דימה הישר להחריד הזה (של היום) מכריח אותי להודות שאני בודה פה ממשאלת הלב שלי. מאד הצטערתי אחר כך שלא השכלתי לעשות בחוג את מה שמתואר פה למעלה. במציאות, הסברתי לילדים למה באמת יש עשרה פתרונות ולא עשרים, ולמה, כשמניחים את הכדור הראשון בקופסה השנייה משמאל, כבר לא צריך לשים את הכדור השני בקופסה הכי שמאלית. חבל, היה יכול להיות סיפור יפה. אחרי זה היה לי ויכוח ארוך עם דימה. אני לא זוכר אותו ולא רשמתי אותו ביומן, אבל הנה מה שהוא הוסיף בעצמו:

בהתחלה המעבר הסדרתי של אבא על הפתרונות האפשריים לא שכנע אותי. בסוף המפגש, או אולי כבר אחריו, שאלתי:
– ואם בכל זאת שכחת איזה פתרון?

– איזה, למשל?

– איזשהו.

– באיזו קופסה למשל יהיה הכדור הראשון בפתרון הזה?

– לא יודע; איזושהי.

– בוא נניח שבשניה?

– אוקיי, נניח.

– אבל אז הכדור השני יכול להיות או בקופסה השלישית, או ברביעית, או בחמישית, וכבר עברנו על כל הפתרונות האלה. בשלב הזה הרגשתי (אם כי כנראה לא הודיתי בזה) שבאמת לא נשאר שום מוצא לפתרון ה-11: איפה שלא נשים את הכדור הראשון, בהכרח נקבל פתרון שכבר עברנו עליו. – דימה.

אז יכול להיות שסתם הצטערתי. גם בלי זה היה קשה להבין את הטיעונים שלי, וככה הייתי מעמיס עוד קושי על הקושי הקיים].

¹² לא בטוח שקיימת הוכחה כזו. לא מזמן גיליתי שבמצרים העתיקה, כשהכינו מומיות, שמרו בקפידה על כל האיברים הפנימיים בשביל החיים שאחרי המוות, ורק את המוח, שנראה להם מיותר לגמרי, זרקו.

פיזיקה ולוגיקה

אני רוצה לספר על שיחה שניהלתי עם דימה. הוא בן 5 ותשעה חודשים. במאמר מוסגר, קצת מוזר שעם ילד כל כך קטן אפשר לנהל שיחות על נושאים כל כך רציניים. אבל עובדה, זה מתועד ביומן. (באיזשהו שלב התחלתי לרשום ביומן לא רק את מה שקרה בחוג הבית אלא גם סיפורים קשורים).

הכל התחיל מנושא קצת מפתיע וזר לענייננו: האם יש אלהים? לרוב התחמקתי מתשובה ישירה (מה עוד שאני לא יודע מה היא), חשבתי שעדיף שיגדל ויחליט בעצמו מה הוא חושב על זה. אסטרטגיה לא כל כך מוצלחת, שכן הוא שוחח על זה לא רק איתי. זה מה שקרה עכשיו – מישהו אמר לו ש"אין אלהים, כי אף אחד לא ראה אותו". אני, כמו תמיד, לקחתי את השיחה לכיוון משלי. אמרתי שאם כך, הוא לא יכול לשכנע אותי שקיימות משאלות (הרי אף אחד לא ראה אותן). דימה ניסה לגשת לזה מכמה כיוונים.

– איזו משאלה יש לך?
אני עונה שאין לי שום משאלה.
– אוקיי, ומה אתה הכי רוצה בעולם?
אני אומר שכלום.
– אבל אתה רוצה למשל שאני אגדל להיות חכם, נכון?
זה כבר היה לחץ פסיכולוגי בלתי מתון, אבל התעקשתי שאני לא רוצה כלום וזהו.
הוא עוצר לחשוב, ואז שואל את השאלה שבגללה בעצם אני מספר פה את הסיפור הזה: הוא שואל איך אפשר לשכנע אנשים בדברים.
– יש כל מיני דרכים, – אני עונה, – במתמטיקה, למשל, ממציאיים הוכחות.
– איך? – הוא שואל.
אני מזכיר לו את הסיפור האז-עוד-טרי על עשרת הפתרונות וכל איך שניסינו לעבור על כל הפתרונות באופן סדרתי, כדי להיות בטוחים שלא פספסנו כלום.
– ובפיזיקה, – אני מוסיף, – עושים ניסויים.
– אהה, אוקיי.
(קראנו אז את הספר "פיזיקה לקטנטנים" של סיקורוק, ועשינו כמה ניסויים שמתוארים בו).
– בוא ניקח למשל את השאלה הבאה: איזה חפצים נופלים מהר יותר, כבדים או קלים?
– ברור שכבדים נופלים מהר יותר.
– ככה אתה חושב. מישהו אחר יכול להגיד שכל החפצים נופלים באותה מהירות.
– מה פתאום!
– למה לא?
– אם למשל ניקח אבן ודף נייר, האבן תיפול מהר יותר.
– רואה? בשביל לשכנע את האיש הזה שהוא טועה, אתה תעשה ניסוי: אתה תיקח אבן ודף נייר ותבדוק מה נופל קודם.
– נכון.
– ועכשיו בוא נעשה ניסוי אחר.
על הניסוי הזה שמעתי מחבר. אנחנו לוקחים שני דפים והם נופלים, מן הסתם, באותה מהירות. אחר כך אני מקמט אחד מהדפים לכדור. אני רוצה לשאול את דימה איזה מהדפים יפול מהר יותר, אבל הוא מקדים אותי:
– עכשיו הדף הזה (מצביע על הכדור) נהיה כבד יותר.
– למה? !
– כי הוא יפול מהר יותר.
ככה זה. בשביל שניסוי פיזיקלי יוכל לשכנע אתכם במשהו, אתם צריכים קודם שהלוגיקה שלכם תהיה מספיק מפותחת בשביל לזהות, ולפסול, טיעונים מעגליים. בלי לוגיקה אי אפשר להסיק שום דבר מתצפיות. מה מגיע קודם? אין לי מושג. אני מניח שהם מתפתחים ביחד באיזושהי סימביוזה.

אני לא עוזב את זה. אנחנו ממשיכים להפיל כל זוג חפצים שאנחנו מוצאים: כפתור ודף בריסטול עבה במיוחד; כפתור ומשקולת; קוביית פלסטיק חלולה וקוביית עץ באותו גודל, וכן הלאה. דימה מבולבל מהתוצאות. הוא רוצה לטעון שהכפתור כבד יותר מדף הבריסטול, אבל מיד מבין שזו שטות.

– אז יש כל מיני מקרים. לפעמים חפצים כבדים נופלים מהר יותר, ולפעמים קלים.

הוא כבר כמעט מסתפק בקוואזי-תיאוריה הזו, ואז – אאוריקה:

– אה, אני יודע, אבא. האוויר מפריע לו ליפול.

– למי?

– הדף גדול, והאוויר מפריע לו ליפול. והכפתור קטן, האוויר פחות מפריע לו.

– נכון! ואם לא היה אוויר, מה היה קורה?

– אז הכל היה נופל באותה מהירות.

– כל הכבוד. אז כשכיווצ'תי את הדף לכדור, מה קרה?

דימה בורר מילים, מנסה לנסח תשובה. אני לא מתאפק ועונה במקומו:

– האוויר מפסיק להפריע לו.

– לא, לא מפסיק, – מתקן אותי דימה, – רק מפריע פחות.

הקוראים כבר יודעים שאחד מהעקרונות שמנחים אותי הוא לעולם לא "להשריש" בילד את נקודת המבט שלי, אפילו ברמז. אבל בהיררכיית העקרונות שלי יש עוד עקרון, חשוב אפילו יותר: שום עקרון אינו קדוש. אולי עכשיו זה זמן טוב להתגמש? אני שואל בטון שרומז שיש רק תשובה אחת נכונה:

– אז מה, הדף המקומט באמת נהיה כבד יותר?

דימה צוחק ועונה:

– ברור שלא! אולי רק טיפונת יותר כבד.

בערב, כשאני מתעד את השיחה הזו ביומן, אני חושב עליה שוב. פתאום אני שם לב למשהו שחמק ממני קודם. מה שעשינו הוא לא בדיוק ניסוי פיזיקלי. ניסוי הוא שאלה שאנחנו שואלים את הטבע בלי לדעת מראש את התשובה. במקרה שלנו, דימה ידע את כל התשובות מראש. לא באמת היינו צריכים לזרוק את הכפתור והמשקולת – נסיון החיים של הילד מספיק בשביל לחזות מה תהיה תוצאת הניסוי הזה. אפשר לומר שאף אחד מהניסויים לא נתן לו מידע חדש, אם מדברים רק על העובדות היבשות. החידוש היחיד היה ההשוואה והסידור של העובדות שהוא כבר יודע. למעשה, ההוכחה שלנו היא אותה הוכחה שעשינו עם הכדורים והקופסאות: הוכחה בעזרת מעבר על אפשרויות לוגיות. הסיפור הזה שופך אור נוסף על השאלה למה כשלוומדים כל כך חשובות השאלות. בעזרת שאלות אנחנו עוזרים לילד לצרף חלקים מנסיון החיים שלו שלפני כן התקיימו בנפרד זה מזה – שכבו במחסן הזכרונות שלו על מדפים נפרדים ומעולם לא נגעו זה בזה.

* * *

בקיץ שכרנו בית נופש בפרברי מוסקבה, ופיטר בא לבקר אותנו. הילדים דיברו על הביקור האחרון שלהם בגן החיות ועל הקופים שהראו להם שם. התערבתי בשיחה ואמרתי שלא הראו להם קופים, אלא הראו אותם לקופים. בתגובה הם מחו, אבל לא ממש היו להם טיעוני נגד.

– אבל הסתכלנו עליהם.

זה טיעון שקל מאד להתמודד איתו:

– אז מה שהסתכלתם עליהם, אפשר לחשוב. גם הם הסתכלו עליכם.

הטיעון השני היה רציני יותר:

– אנחנו יכולים להסתובב איפה שאנחנו רוצים, והקופים לא, הם בכלוב.

אבל מצאתי מה לענות גם על זה.

– לא, אתם לא מסתובבים איפה שאתם רוצים. למשל, אסור לכם להסתובב בתוך הכלוב. ולקופים אסור להסתובב מחוץ לכלוב. פשוט יש גדר, אתם מסתובבים איפה שאתם רוצים מצד אחד שלה, והקופים מהצד השני.

המשכנו להתווכח עוד זמן מה, כשפתאום דימה קרא בהתלהבות, כאילו תפס אותי על חם:
– היי, אבא, גם עכשיו אנחנו לומדים מתמטיקה!
אבולוציה מעניינת: בשיעור הראשון הילדים התעסקו בלספור כפתורים. ככה הם תפסו אז את
המתמטיקה – מתמטיקה זה כשופרים. עכשיו המתמטיקה הפכה עבורם לסוג של משחק הגיון, בסגנון
לואיס קרול.

* * *

קצת חבל שהשתמטתי מהפרק הבא כמה מהאנקדוטות הכי מעניינות. אבל ראשית, רציתי להציג את
החומר מזווית אחרת: הקוראים היו עלולים להתקשות לעקוב אחרי התפתחות העלילה לאורך המפגשים
השונים. ושנית, מה שאני מספר בתחילת הפרק הזה שייך לתקופה שעוד לא כתבתי את היומן, כך שאם
לא הייתי מקדיש לנושא הזה פרק נפרד, החלק ההוא היה הולך לאיבוד. נקווה שנשארו מספיק דברים
מעניינים לפרק הבא.

4 החוג של הבנים – השנה השניה

מפגש 33. דמיון

שבת, 19 בספטמבר 1981. 11:05-11:50. דימה, פיטר ויבגני.

הצלצול הראשון.

הילדים היו מגיעים אלינו אחד-אחד. כשהראשון היה מגיע, הוא היה מתחיל לשחק עם דימה, ואז השני שהגיע היה מצטרף אליהם, והיה קשה להפסיק אותם. הפתרון הגיע מכיוון לא צפוי: נשברה לנו בובת נחום-תקום ונשאר לנו ממנה פעמון שהשמיע צלצול נעים מאד לאוזן. מאז היה מספיק לצלצל בו והילדים היו מפסיקים את המשחק ובאים לשולחן. מדי פעם הם היו מבקשים רשות לצלצל בו בעצמם. ובכן, השמעת את הצלצול הראשון. בירכתי את כולם לרגל תחילת שנת הלימודים, וסיפרתי שבכית הספר תמיד חוגגים את הצלצול הראשון.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

(1) שני אחים יצאו לרכוב על האופניים. לאופניים היו חמישה גלגלים סך הכל. איך זה ייתכן? להפתעתי, לקח הרבה זמן עד שהילדים חשבו על התשובה הנכונה. הם התחילו להמציא אופניים ארבע-גלגליים; בסוף דימה ניחש.

האמת היא שניחשתי עוד קודם, אבל לא אמרתי את התשובה, כי אף פעם לא ראיתי ברחוב ילדים על תלת-אופן. לכן פסלתי את התשובה הנכונה, ואז בעקבות כל השאר התחלתי להמציא פתרונות עם חד-אופן. אחר כך נזכרתי שראיתי חד-אופן רק בקרקס, כך שזה אפילו פחות סביר מאשר תלת-אופן, ואמרתי את הפתרון שחשבתי עליו בהתחלה. – דימה.

(2) גרסה פשוטה יותר של "הטריק המטופש" של סמליאן (שנתן לחידה הזו את שמה): אני מראה לילדים אגרוף קפוץ ואומר:

– יש לי פה שני מטבעות, ששווים ביחד שלוש קופייקות, אבל אחד מהם הוא לא קופייקה. מה הם? [הפתרון הוא שאמנם אחד מהמטבעות הוא לא קופייקה, אבל השני הוא כן].

התוצאה שוב מאכזבת. זה מתחיל מזה שהילדים לא מצליחים למצוא קומבינציה של מטבעות שתיתן סכום של 3 קופייקות. אחר כך, כשדימה מציע סופסוף את הפתרון $1+2$, כולם כבר מספיקים לשכוח מהתנאי השני. אני מנסה להתקיל אותם:

– אבל נתון שאחד מהם הוא לא קופייקה.

– נכון, – אומר דימה, – לא קופייקה אלא מטבע.

אני פותח את כף היד ושואל:

– האם נכון שאחד מהמטבעות האלה הוא לא קופייקה?

– כן.

– איזה?

הם מצביעים באדישות על המטבע של שתי הקופייקות. אני נאלץ לסגת.

תרגיל 2. פעולות על קבוצות.

על שני כרטיסים גדולים, A ו- B , מצוירות קבוצות של חפצים. על חמישה כרטיסים קטנים יותר מצוירות הקבוצות $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.¹³ בכל פעם אני מבקש מהילדים שימצאו את אחת מהקבוצות. למשל, "איפה מצויירים החפצים שיש בכרטיס A ואין בכרטיס B ?", "איפה מצויירים החפצים שמופיעים בשני הכרטיסים?", וכו'. הילדים עונים נכון ובזריזות. קצת קשה לנסח את ההבדל בין קבוצת האיחוד לקבוצת החיתוך; שתייהן הן "החפצים שמופיעים בשני הכרטיסים".

¹³ $A \cap B$ מסמן את קבוצת החיתוך – החפצים ששייכים גם ל- A וגם ל- B ; $A \cup B$ הוא האיחוד – חפצים ששייכים לפחות לאחת מהקבוצות; $A \setminus B$ היא קבוצת החפצים ששייכים ל- A אך לא ל- B ; $A \Delta B$ היא קבוצת החפצים ששייכים ל- A או ל- B , אך לא לשניהן. – ר.פ.

דימה מעיר:

— אני בכלל לא מבין למה כל החפצים האלה מצוירים על אותו כרטיס, — כלומר, הוא לא מבין מה משותף ביניהם.

אני מסביר שאין ביניהם שום דבר משותף.

תרגיל לעתיד.

(1) הגרסה הפעילה: הילדים לא צריכים לחפש את הכרטיס המתאים, אלא לצייר בעצמם (אפשר להרכיב את הקבוצות מצורות פשוטות).

(2) כנ"ל, אבל כשהחפצים מונחים על השולחן בתוך שני מעגלים. (אפשר שאיברי הקבוצות יהיו מספרים, והחפצים על השולחן יהיו לוחיות שכתובים עליהן המספרים).

תרגיל 3. דמיון.

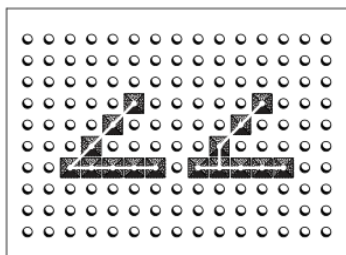
אני מצייר על דף משבצות מספר צורות, ואז את אותן צורות אבל מוגדלות פי שניים (איור 41).

אני מסביר להם שזה מה שנעשה על לוח הפסיפס. אני מרכיב צורות ומבקש מהילדים לבנות כאלו אבל גדולות פי שניים. הם פותרים את התרגילים בקלות, אבל תוך כדי העבודה אני מבין פתאום שלא חשבתי על התרגיל עד הסוף. ספציפית, אני שם לב לשתי בעיות (הילדים לא שמים לב אליהן):

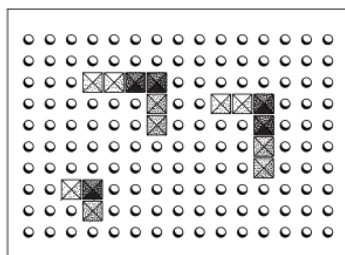
(1) באופן טבעי, הם מחליפים כל אבן בשתי אבנים; אבל מה עושים עם אבנים פינתיות? הילדים מכפילים גם אותן, אבל התוצאה תלויה בצד שממנו הם מתחילים (איור 42).

(2) הנקודות-אבנים יכולות להתאים לצורות קוויות שונות; כך, הרכבתי ליבגני צורה מ-8 אבנים כמו זו שמתוארת באיור 43 משמאל, אבל יבגני הבין אותה אחרת (כמו באותו איור מימין), והכפיל בגודל את הצורה שהוא הבין ולא את זו שהתכוונתי אליה.

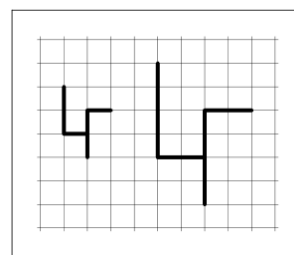
דיברתי עם הילדים על שתי הבעיות האלו, ואמרתי להם שבפעם הבאה נפתור את אותו תרגיל על דף משבצות, כך שלא יהיו כפלי-משמעות כאלה.



איור 43. הפסיפס הוא אוסף של "נקודות", אבל כשמגדילים צורה פי שניים, מגדילים "קווים", ויש דרכים שונות לחבר את הנקודות בקווים.



איור 42. איך מגדילים פי שניים פינה בפסיפס?



איור 41. הצורה הימנית גדולה פי שניים מהשמאלית.

תרגיל 4. סביר יותר וסביר פחות.

אני מכריז:

— ובכן, נעבור לתרגיל האחרון...

— למה אחרון? ! אנחנו רוצים עוד! — הילדים קוטעים אותי.

המילים האלו הן כמו מים קרים על נפש עייפה. אחרי המכה שחטפתי במפגש ההוא, כשהם נטשו, אני כל כך זקוק לחיזוקים האלה!

על השולחן מונח "לוח" — דף נייר מחולק ל- 15×7 משבצות. מתחת למשבצות כתובים בשורה המספרים 1-15. אני משחק עם הילדים, כך שסך הכל אנחנו ארבעה שחקנים. כל אחד מקבל שלושה חיילים באותו צבע — אחד גדול ושניים קטנים. אנחנו מעמידים את החיילים בשורה הראשונה. אחר כך כל אחד בתורו מטיל שתי קוביות, סוכם את תוצאות ההטלה (תרגיל בחשבון על הדרך), והחייל שמספרו תואם לסכום הקוביות עושה צעד אחד קדימה. המנצח הוא החייל שמגיע ראשון לשורה השביעית. אם חייל גדול של שחקן ניצח, השחקן מקבל שתי קופייקות, ואם חייל קטן — קופייקה אחת.

מטרת התרגיל: (א) להזכיר לילדים על קיומם של אירועים בלתי אפשריים (הסכומים 1, 13, 14 ו-15 לא יתקבלו לעולם); (ב) להראות להם שמבין האירועים האפשריים יש סבירים יותר וסבירים פחות (סכומים מסויימים הם בעלי סיכוי גבוה יותר לנצח מאחרים).

שיחקנו פעמיים; הילדים רצו עוד. הם לא הצליחו לנחש בעצמם לגבי הסכומים הבלתי-אפשריים, אבל מתישהו במהלך המשחק שאלתי למה החייל הזה (מס' 1) לא מתקדם, והם הסבירו (דימה היה הראשון שענה נכון). התעניינתי האם יש עוד קומבינציות בלתי אפשריות, והם שוב ענו נכון. לא דיברנו בכלל על סבירויות שונות, כי לא נשאר זמן – החלטתי לדחות את זה לפעם הבאה. אחרי המשחק הראשון דימה אמר שהוא רוצה להעמיד את החייל שלו במספר 6 (המספר שניצח במשחק הקודם), אבל העמיד שם חייל קטן. יבגני ניצח בשני המשחקים – בראשון עם המספר 6 ובשני עם המספר 7.

מפגש 34. בלי אירועים מיוחדים

שבת, 3 באוקטובר 1981. 11:05-11:35. דימה ויבגני.

פיטר חולה בסקרלטינה; לכן ביטלנו את המפגש בשבת שעברה. בשביל שמצד אחד לא נעשה הפסקה של חודש ומצד שני פיטר לא יפסיד יותר מדי חומר (מה עוד שפחות כסף לעשות מפגש עם שני ילדים מאשר עם שלושה), החלטנו לעשות מפגש אחד באמצע, כך שנקבל שתי הפסקות של שבועיים. כך שאנחנו מתכננים את המפגש הבא ל-17 באוקטובר.

תרגיל 1. שאלות מילוליות (מתוך הספר של ו. לויין).

שאלות בסגנון: לאדם יש יד, ולתרגולת – ? היו מעט שאלות, ובלי קשר ביניהן.

תרגיל 2. דמיון (הכפלה של צורות).

הפעם אנחנו עובדים על דף משבצות: אני מצייר צורה בסגנון של זו שב איור 44, והילדים צריכים לצייר כזו אבל גדולה פי שניים. בסך הכל הם מסתדרים לא רע, אם כי יש טעויות פה ושם. מדי פעם אנחנו מוחקים ומתקנים. דימה הכפיל שלוש צורות, ויבגני שתיים.



איור 44. המשימה: לצייר צורה גדולה פי שניים.

תרגיל 3. שוב משחקים במשחק ההסתברות.

בסבב הראשון דימה ניצח (עם המספר 5), בשני אני (גם עם 5). הפעם פירטנו יותר אילו סכומים הם בלתי אפשריים, איזה מספרים יותר כדאיים, ואפילו למה. הראיתי להם שאת הסכומים 2 ו-12 אפשר לקבל רק בדרך אחת, וסכומים אחרים ביותר דרכים. סיכמנו שבפעם הבאה נסכם את מספרי הדרכים בטבלה (טבלת סכומים עד 6+6) ושנמשיך לשחק עוד. אנחנו מתקרבים לחישובי הסתברויות.

מפגש 35. כמעט חישובי הסתברויות

שבת, 24 באוקטובר 1981. 11:10-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

ב-17 באוקטובר דימה היה חולה, כך שעשינו הפסקה של שלושה שבועות במקום השבועיים שתכננו.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

אותן שאלות כמו בפעם הקודמת (בגלל שפיטר עוד לא מכיר אותן). הפעם עברתי על כל רשימת הדוגמאות מהמאמר של ו. לויין¹⁴.

¹⁴ כל כך אופייני לי: לא רק שאני לא זוכר באיזה מאמר מדובר, אני אפילו לא זוכר איפה הוא פורסם. הקוראים צריכים לקחת בחשבון שמעולם לא החשבתי את עצמי למומחה להוראה לגיל הרך, כך שעסקתי בנושא באופן מזדמן ולא מסודר.

תרגיל 2. פעולות על קבוצות.

על כרטיס אחד מצוירים ריבוע, איקס, עיגול, כוכב וירח; על השני – משולש, חץ, איקס וירח. לכל ילד יש דף ועפרון. אני מבקש מכל אחד בתורו לצייר את החיתוך, שני ההפרשים, האיחוד וההפרש הסימטרי בין הקבוצות.

הילדים פותרים יפה. אני שוב מתמודד עם אותו אתגר כמו בפעם הקודמת: קשה מאד להבחין בכיור בין איחוד לחיתוך קבוצות בשפת הדיבור: "הצורות שמופיעות בשני הכרטיסים" זה איחוד או חיתוך? בגלל שההוראה לא מספיק ברורה, הילדים הרבה פעמים פותרים הפוך מהכוונה. כשציירנו את ההפרש הסימטרי, פיטר צייר את איחוד הקבוצות, ואז מתח קו על החיתוך וסימן בחץ שצריך להוציא אותו מחוץ לדף.

תרגיל 3. מלבנים.

שאלתי אותם כמה מלבנים יש בצורה שמתוארת באיור 45. הילדים ענו, כצפוי, ששניים. הראיתי להם ששלושה. אפשר לפתח את הנושא הזה.

תרגיל 4. המשחק עם החיילים וכמעט חישובי הסתברויות.

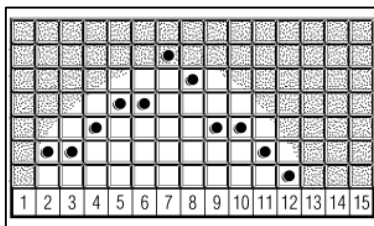
שיחקנו שוב במשחק עם החיילים. יבגני ניצח עם המספר 7. היה איזה רגע במהלך המשחק שבו החיילים היו מסודרים כמו גבעה (איור 46), ואמרתי לילדים שישימו לב שככל שהחייל קרוב יותר לאמצע כך הוא התקדם יותר.

כשסיימנו את המשחק, הרכבנו את הטבלה: כתבנו את כל האפשרויות שיכולות לצאת בכל קוביה, וחישבנו את הסכומים (טבלה 1). כמעט מיד הילדים גילו את החוקיות והכתיבו לי את המספרים שצריך למלא בטבלה בלי לחשב. כשהטבלה הייתה מוכנה, אמרתי שלא חישבנו כלום אלא רק ניחשנו חוקיות, ושיהיה מעניין לבדוק האם הכל נכון. חישבנו מספר תאים והשתכנענו שהמספר שכתוב בהם נכון. במהלך מילוי הטבלה פיטר שם לב שלאורך האלכסונים מופיעים מספרים זהים. דנו בזה. – איזה מספר מופיע פה יותר מכולם, איזה אלכסון הכי ארוך? – שאלתי. – שש, – ענו כולם.

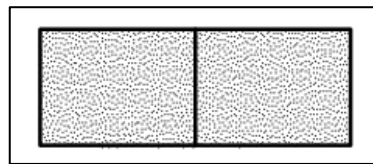
כלומר, הם לקחו בחשבון גם את המספרים שב"כותרות" העמודות והשורות – לא רק את הסכומים אלא גם את הנסכמים.

רציתי לשאול האם הם נחשבים, אבל לא הספקתי. – דימה.

כמובן שהייתי צריך לצפות את זה, ולשים בכותרות את פאות הקוביה במקום מספרים, כמו בטבלה 2.



איור 46. מיקום החיילים במהלך המשחק.



איור 45. כמה מלבנים יש פה?

	.	°	°	::	⊗	⋮
.						
°						
°						
::						
⊗						
⋮						

טבלה 2. אם היינו כותבים את הסכומים בטבלה כזו, היה ברור איזה מספר הכי נפוץ.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

טבלה 1. טבלת הסכומים עד 6.

נאלצתי למתוח קו עבה יותר ולהסביר שבתוך הטבלה מופיעים הסכומים של שתי הקוביות, ובצידי הטבלה – תוצאות ההטלה, ולכן המספרים שבצדדים לא נחשבים. לאט לאט אנחנו מתעמקים בהכל ואפילו מגלים את החוקיות שאומרת כמה פעמים מופיעים הסכומים 2, 3, 4, ..., 12. התוצאה מוצגת בטבלה 3.

(כמובן, במעבר מ-7 ל-8 הילדים קודם טעו ואמרו שיש 7 ולא 5) דרכים לקבל את הסכום 8). לבסוף, שאלתי:

– עכשיו אתם יודעים אילו מספרים מופיעים יותר ואילו פחות. איך הייתם ממקמים את החיילים שלכם אם הייתם יכולים לבחור?

דימה בתגובה העמיד את החייל הגדול במשבצת של ה-7, ואת הקטנים לידו, על 6 ו-8. שיבחתי אותו והסברתי למה הוא צודק.

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	סכום
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	מספר הדרכים לקבל אותו

טבלה 3. הסכומים האפשריים ומספר הדרכים לקבל כל סכום.

מפגש 36. משחק בשלוש קוביות

שבת, 31 באוקטובר 1981. 11:05-11:50. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. משחק שרשרת המילים (על פי ו. לזין).

אני מסביר את החוקים: כל אחד בתורו אומר מילה, וכל מילה צריכה להיות קשורה למילה שלפניה בקשר כלשהו: אסוציאציה, נושא משותף, דמיון, ניגוד, או אפילו חריזה. הנה דוגמה לשרשרת שקיבלנו: פטיפון – מחט – חוט – סליל – צליל – מעיל – מים – קרקעית – חול – אבן – למעור – ללכת – לקפוץ – לשחות – בועה – סבון – תפוח אדמה – שמן – מרגרינה.

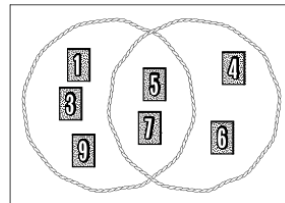
גם אני השתתפתי במשחק, ואלה רשמה את המילים.

תרגיל 2.

אני מניח על השולחן 10 לוחיות עם כל הספרות, מתוך "ערכת המתמטיקה לכיתה א'", ושני דפים – על אחד מהם רשומים המספרים 1,3,5,7,9, ועל השני 4,5,6,7. אני מבקש מהילדים לקחת את כל הלוחיות שאנחנו זקוקים להן (דהיינו, את איחוד הקבוצות), ואת השאר להניח בצד. אחר כך כל ילד בתורו מקבל משימה: לבחור מאוסף הלוחיות את $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. אחרי ששלוש הקבוצות האלו מונחות אחת בנפרד מהשניה, אני מניח על השולחן שני חבלים בצורת דיאגרמת ון (איור 47) ומניח בהם את הלוחיות. אנחנו דנים בכך שחבל אחד מתאים לדף אחד, וחבל שני מתאים לדף השני, וכך יוצא שבאזור המשותף נמצאים בדיוק המספרים המשותפים לשני הדפים, ו"כאן" (אני מצביע) רק המספרים שמופיעים בציור הראשון אבל לא מופיעים בציור השני, וכו' וכו'.

[הייתי צריך לעשות את אותו הדבר עם הכרטיסים הקטנים עם הציורים, מהפעם הראשונה שתרגלנו פעולות על קבוצות – עם החתול, התפוח, האגרטל וכו'].

איור 47. קבוצות שהחיתוך ביניהן לא ריק.



תרגיל 3.

– היום נשחק במשחק חדש, שבו צריך להטיל שלוש קוביות בכל פעם. תגידו, מה הסכום הכי קטן שאפשר לקבל? – שלוש!

אנחנו בודקים איך אפשר לקבל שלוש.

– ומה הסכום הכי גדול?

– שלוש פעמים שש!

אנחנו מחשבים כמה זה יוצא.

אני מוציא לוח משחק שכתובים עליו בגדול המספרים 3 עד 18, כמו באיור 48. צבעתי את הצד של ה-8-3 בצהוב, את הצד של ה-12-9 באדום, ואת ה-18-13 בירוק. בכוונה בחרתי לצבוע את הצד המנצח באדום (ראו מפגש 31, תרגיל 4), ובכוונה נמנעתי מלהשתמש בכחול. אני רק לא בטוח לגבי הסינסטזיה של הצבע הצהוב.

אני מתחיל להסביר את החוקים: כל אחד מתיישב באחד מצידי הלוח (הם מתיישבים – יבגני בצד של ה-8-3, דימה בצד של ה-12-9, ופיטר בצד של ה-18-13); כל אחד מקבל את אותה כמות אסימונים (אנחנו השתמשנו בתשעה לכל אחד); בכל צעד כל שחקן מוציא אסימון, זורקים את שלוש הקוביות, ומי שהסכום נמצא בצד שלו זוכה בשלושת האסימונים. המשחק מסתיים כשאחד השחקנים זוכה בכל האסימונים.

אני עובר איתם על המספרים שיש לכל אחד, ואומר:

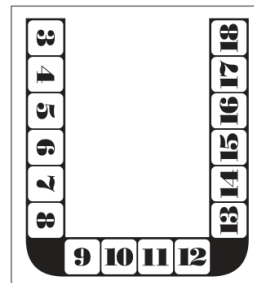
– ליבגני יש ששה מספרים, לפיטר גם ששה, ולדימה יש רק ארבעה...

– בסדר, לא נורא, – אומר דימה.

רציתי להתחיל לשחק כבר, ולכן לא ממש הקשבתי לאבא. רגע לפני שהתחלנו לשחק (וכבר אחרי שאמרתי "לא נורא"), הבנתי שיש לי פחות מספרים ואני עלול להפסיד. אבל אז התחלנו לשחק ושוב שכחתי מזה. – דימה.

כל אחד הטיל את הקוביות בתורו (כולל אותי); מי שהטיל אותן היה צריך לחשב את הסכום. מעניין שהילדים חישובו ברצון סכומים שלא קלים להם, ושהם מתעצלים לחשב בסיטואציות אחרות. המשחק נמשך ונמשך, ולא רואים את הסוף. לכן אנחנו מסכמים שנזכור כמה אסימונים יש לכל אחד, ושנמשיך בפעם הבאה. ליבגני נשארו שני אסימונים, לפיטר 11, ולדימה 14. [תרגיל מעניין בשבילי: למצוא את תוחלת משך המשחק, ואת ההסתברות שהשחקן האמצעי יפסיד].

איור 48. משטח למשחק עם שלוש הקוביות.



מפגש 37. כמה מרובעים?

שבת, 14 בנובמבר 1981. 11:05-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

על המפגש הקודם דילגנו בגלל החג¹⁵.

תרגיל 1. שרשרת מילים (תרגיל חימום).

תמונות – צבעים – מכחולים – עץ – שורש – עשב – מים – קרח – מחלקיים – להחליק – איש – מגף – איטליה – מפה – קיר – בית – מאורה – אוגר – חיה – עין – משקפיים – זכוכית מגדלת – זכוכית – מסגרת – אופניים – גלגל – צמיג – מעצורים – רכבת – עשן – ארובה.

¹⁵ מדובר בבדיחה: החג המדובר הוא יום השנה למהפכת אוקטובר של ברית המועצות (שצוין ב-7 בנובמבר עקב שינוי לוחות השנה). – ר.פ.

מעניין שגם אחרי 20 שנה קל לזהות את האסוציאציות של פיטר. מגף – איטליה! מזהים מיד שהוא ממשפחה של מדעי הרוח.

תרגיל 2. חיתוך קבוצות.

השלמה מהפעם הקודמת. אני מניח על השולחן שני כרטיסים גדולים (ממפגש 33, תרגיל 2) ואת הכרטיסים הקטנים מאותו תרגיל. על הכרטיסים הקטנים מצוירים החיתוך, האיחוד, והפרשי הקבוצות שמצוירות על הכרטיסים הגדולים. אני מניח שני חבלים עם שטח משותף ביניהם ומבקש מהילדים להניח את הכרטיסים כך שבתוך חבל אחד יהיו כל החפצים שמופיעים בכרטיס הגדול הראשון, ובתוך השני החפצים מהכרטיס הגדול השני. כך, כשהם יסיימו, בחבלים יהיו מונחים רק הכרטיסים של החיתוך ושל הפרשי הקבוצות.

בתחילה, כרגיל, יש בלאגן: כל אחד מניח מה שיוצא, הם מתווכחים, חוטפים את הכרטיסים אחד מהשני. אחר כך אנחנו מתחילים לעבוד בצורה יותר מסודרת. מהדיון נראה שדימה לא מבין כלום; לגבי יבגני קשה לומר, כי הוא רק זורק הערות פה ושם; פיטר מניח מיד כל כרטיס במקום הנכון. אנחנו בודקים את הפתרון ומדברים על המשמעות של איחוד קבוצות.

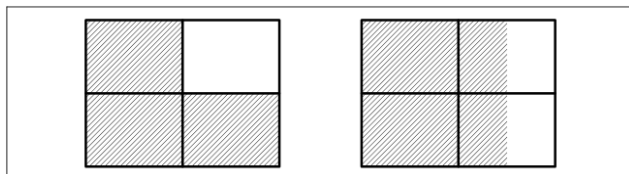
תרגיל 3. למצוא את כל המלבנים.

כל ילד בתורו מקבל דף עם מלבן מחולק לארבעה חלקים (איור 49). המשימה היא למצוא ולסמן את כל המלבנים המופיעים בציור (סה"כ 9 מלבנים).

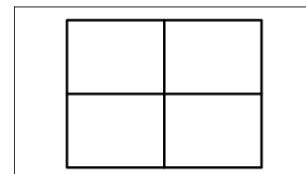
הילדים פותרים יפה, כמעט בלי טעויות. יבגני היה הראשון שמצא פתרון "מקורי": הוא צבע את המלבן הגדול עוד לפני שהשתמש בכל המלבנים הקטנים, והיה גם הראשון שצבע עמודה של שני מלבנים. דימה, שראה שאני משבח את יבגני על הפתרון המקורי שלו, התחיל לחפש פתרונות עוד יותר מקוריים: קודם הוא צבע שלושה מלבנים (איור 50 משמאל), ואחר כך מלבן שהגבול הימני שלו בכלל לא מסומן בציור (איור 50 מימין).

דחיתי את שני הפתרונות: לגבי הראשון אמרתי שזה בכלל לא מלבן (ספרנו את הפינות וראינו שיש שש), ולגבי השני הסברתי שיש אינסוף כאלה.

אחרי שמיצינו את כל האפשרויות ניסיתי לגרום לילדים להבין שאין יותר פתרונות, אבל זה לא כל כך עבד. הסברתי להם את זה בעצמי, והוספתי שהחלק הכי מעניין בתרגיל הוא להסביר למה מצאנו את כל הפתרונות האפשריים.



איור 50. פתרונות שגויים.



איור 49. המשימה: למצוא את כל המלבנים (יש תשעה סך הכל).

תרגיל 4. סיום המשחק עם שלוש הקוביות.

יבגני קיבל את שני האסימונים שלו, פיטר – 11, דימה – 14, והמשכנו במשחק. די מהר יבגני פשט את הרגל. דימה ופיטר המשיכו לשחק, כשבכל תור כל אחד הניח אסימון אחד, והזוכה קיבל שני אסימונים, ולא שלושה. (כשהסכום היה יוצא "של יבגני", לא החשבנו אותו). עם זאת, המשחק התחיל להתקדם מהר יותר, כי כעת היתרון של דימה היה משמעותי יותר. יבגני המשיך להשתתף בהטלת הקוביות וחישבו הסכומים. כשנהיה ברור שפיטר עומד להפסיד, דימה התחיל "להשתדל" שהסכום יצא מספר "של פיטר". זה נתן לי עוד הזדמנות לציין שהתוצאה של מאורע הסתברותי לא תלויה בהשתדלויות שלנו. לבסוף, דימה ניצח.

– איך זה ייתכן? – שאלתי, – אם דימה ניצח, זה אומר שהסכום נפל הרבה יותר על המספרים שלו מאשר של אחרים. אבל יש לו רק ארבעה מספרים, ולאחרים היו שישה.

התחלנו לרדוף. הילדים הגיעו די מהר למסקנה שיש מספרים משתלמים יותר מאחרים, ואפילו הסבירו שזה בגלל שיש "יותר קומביניציות". בחנו לצורך הדוגמה כמה קומביניציות נותנות את המספר 3 וכמה את המספר 10. אבל בשלב הזה הילדים כבר איבדו קשב, כך שסיימנו את המפגש, למרות שפיטר ביקש להמשיך והציע לשחק בפסיפס.

מפגש 38. הכל קורס

ראשון, 29 בנובמבר 1981. 17:20-17:50. דימה, פיטר ויבגני.

זה היה אחד המפגשים הכי פחות מוצלחים שלנו. על השבת הקודמת שוב דילגנו, כי הייתי בעבודה כל השבוע, וביום שישי היה לי שיעור¹⁶, כך שגם לא ישנתי מספיק וגם לא הספקתי להתכונן. בשבת, ב-28 לחודש, לדימה היה תור לרופא שיניים, כך שנאלצנו להפסיד עוד מפגש, אז סיכמנו שניפגש ביום ראשון ב-17:00. יבגני איחר, והם לא ענו לטלפון. חשבתי שבטח הם כבר לא יגיעו והצעתי לדימה ופיטר לשחק שוב במשחק עם שלוש הקוביות (ר') שני המפגשים הקודמים). כשכבר היינו בשיאו של המשחק יבגני הגיע, ונאלצנו לקטוע את המשחק. דימה ופיטר התלוננו; אני התעצבנתי. בתחילת המפגש דימה לא ישב יפה – זה היה קורה לו הרבה – הוא כל הזמן התנדנד מצד לצד ונשכב על השולחן. הערתי לו פעמיים, ובפעם השלישית כבר התפוצצתי:

– עוד הערה אחת ואני מוציא אותך מהמפגש (גם בארוחת הצהריים רבנו על זה). דימה החוויר והשתתק. גם אני הייתי במצב רוח גרוע: הרגשתי שלא הייתי הוגן (יותר באינטונציה מאשר במילים), וחזן מזה, התייסרתי מהמחשבה שבתת-המודע שלו הוא יקשר מצבים לא נעימים כאלה לחוג הבית, למתמטיקה באופן כללי, וכו'. ניסיתי להתאפס, לנשום נשימות מרגיעות, לקחת הפסקות קצרות, אבל זה לא ממש עזר.

תרגיל 1. המשחק "מה הקשר?" (שוב בהשאלה מו. לוינ).

נתונות שתי מילים משרשרת, וצריך למצוא מילה שמחברת ביניהן. נתתי דוגמה¹⁷: רגל – ? – עט (מילה מקשרת: כדור). אבל הילדים לא הבינו וניסו להציע כיוון משלהם: "אפשר לצייר בעט עם הרגל". ככה זה המשיך. שאלה: "כר – ? – ירוק" (דשא); תשובה: "למישהו יש כרית ירוקה". שאלה: "חורף – ? – מיטה" (קר/כר), תשובה: "בחורף לא רוצים לצאת מהמיטה". שאלה: "דג – ? – חתול" (זנב); תשובה: "הדג חי וגם החתול חי" (טוב, זו באמת חידה לא מוצלחת). אמרתי להם שצריך למצוא פתרון שהוא מילה אחת, בתגובה הם היו משתתקים. בקיצור, היה משעמם.

תרגיל 2. לאילו חלקים אפשר לגזור, בקו ישר, מרובע קעור?

קיימות 15 אפשרויות:

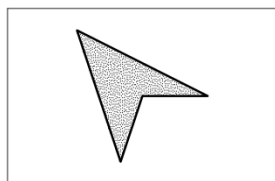
- (א) שני משולשים – שלוש דרכים;
- (ב) שלושה משולשים – דרך אחת;
- (ג) משולש ומרובע – שש דרכים;
- (ד) משולש ומחומש – חמש דרכים;
- (ה) שני מרובעים – שתי דרכים.

בהתחלה ציירנו על דף כל מיני מצולעים וספרנו כמה פינות יש להם. דימה, כהרגלו, צייר "מצולע" לא סגור. הסברתי שלצורה כזאת לא קוראים מצולע, אבל ההסבר שלי היה קצת מקרטע, ולא הצלחתי למצוא מילה נרדפת פשוטה ל"סגור".

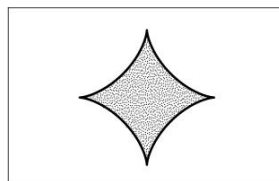
¹⁶ התקופה היא מתחילה להשכח. עבדתי שלושה ימים בשבוע, והיומיים הנותרים היו מה שנקרא "ימי ספריה". אבל לפעמים היו תקופות של לחץ בעבודה – במיוחד לקראת סוף השנה, כשהיה צריך לכתוב דו"חות שנתיים. חוץ מזה, כמו רבים אחרים, השלמתי הכנסה כמורה פרטי.

¹⁷ הדוגמאות המקוריות לא עובדות בתרגום, כך שהדוגמאות המובאות כאן הן פרי המצאתי. דוגמאות נוספות, "מעוברתות": לוי – ? – ענבים (אשכול), שיער – ? – תשעה באב (צמה). – ר.פ.

אחר כך שאלתי האם הצורה שבאיור 51 היא מרובע (הרי יש לה ארבע פינות!), והסברתי למה לא. נתתי לילדים מרובע קעור מקרטון (איור 52); הם היו אמורים להשתמש בסרגל מתכת בשביל לתאר את הישר שגוזרים לאורכו, ואני ציירתי כל פתרון שהם הציעו. בהתחלה לא הצלחתי להשליט סדר ולגרום להם להקשיב להוראות; הם חטפו את המרובע זה מזה, ניסו לצייר עליו, וכשלקחתי להם את העפרונות – ניסו לחרוט עליו עם הסרגל. אחר כך לפתע העניינים התחילו לזרום. כשהילדים הבינו סוף סוף את התרגיל, הם התחילו להמציא כל מיני דרכים מקוריות לגזור בלי לחזור על פתרונות קודמים, ובכל פעם זיהו נכון אילו צורות יתקבלו כתוצאה מהגזירה. עלינו על המסלול. אבל אז פתאום התקשר א"צ, איש שאני מאד מכבד, ולמרות שהוא שאל האם אני פנוי לדבר, לא העזתי להגיד לו שלא. הילדים חיכו לי עשר דקות והתחרפנו משעמום, ואז האמהות שחררו אותם לשחק בחוץ.



איור 52. מרובע קעור.



איור 51. זה אינו מרובע.

מפגש 39. ירידה לצורך עליה

שבת, 5 בדצמבר 1981. 11:20-12:20. דימה, פיטר ויבגני.

המפגש הזה, בניגוד לקודם, היה אחד המוצלחים שהיו לנו, כפי שאפשר לראות אפילו ממשכו. חוץ מזה, הייתי נרגש מאד מההשקה של הפרויקט שעבדתי על פיתוחו במשך כל כך הרבה זמן: שפת התכנות "ילדון".

תרגיל 1. הוכחות.

- (1) להוכיח שאנחנו שומעים בעזרת האזניים ולא בעזרת העיניים.
 - (2) להוכיח שאנחנו רואים בעזרת העיניים ולא בעזרת האזניים.
 - (3) להוכיח שהעננים קרובים אלינו יותר מהשמש.
- דימה ענה ראשון על כל השאלות. לא אפרט כאן, כי כבר כתבתי על זה בפרק הקודם.

שיעורי בית.

להוכיח שאנחנו חושבים בעזרת הראש.

תרגיל 2.

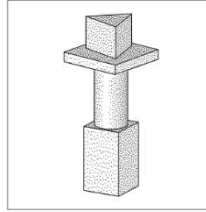
אני וסטפן¹⁸ המצאנו שפת תכנות לילדי גן (נראה לי ש"ילדון" הוא שם מתאים בשבילה). חלק משלבי הפיתוח שלה קשורים למפגשים קודמים, שלא כתבתי עליהם ביומן, וגם השפה עצמה דורשת תיאור נפרד, ולכן אני פותח פה מאמר מוסגר ארוך.

מסע קצר אל העבר

באחד מעשרים המפגשים הראשונים, אלה שלא תיעדתי ביומן (אני לא זוכר איזה בדיוק מהם, נדמה לי שפחות או יותר מפגש מס' 15), בניתי על השולחן מגדל קוביות (איור 53) וביקשתי מהילדים לבנות מגדל באותו גובה, אבל על הרצפה.

¹⁸ סטפן פאצ'יקוב, חבר טוב שלנו; בהמשך הוא ארגן את מועדון המחשבים לילדים במוסקבה והקים את חברת פרה-גרף. חי בארה"ב.

איור 53. המגדל הזה עומד על השולחן.
איך אפשר להרכיב מגדל באותו גובה,
אבל על הרצפה?



כשדימה היה בן שלוש, נתתי לו משימה דומה על המדרגות של בית הקיץ ששכרנו. אז הוא חשב שהמטרה היא שראשי המגדלים יהיו באותו גובה. עכשיו, כמו שאר הילדים, הוא כבר ידע שגובה הוא שמורה של העתקה. לכן הוא בנה מגדל בגובה הנכון, פחות או יותר, ואז תפס אותו משני הצדדים וניסה להצמיד למגדל שעל השולחן. לצערו, ולשמחתי, בכל פעם שהוא ניסה להרים את המגדל לשולחן, המגדל התפרק. אחרי הנסיון הכושל השלישי הגדרתי חוק חדש: לא נוגעים במגדלים ולא מזיזים אותם. אחרי דקה של שקט, דימה צעק פתאום:

— אה, הבנתי, הבנתי! — ובנה על הרצפה מגדל מאותן קוביות ובאותו סדר כמו במגדל שעל השולחן. משום מה לא צפיתי את הפתרון הזה. למרות שבדרך כלל אני לא מתגמש, הפעם אמרתי לילדים כל הכבוד ושהם פתרו את התרגיל (מה שנכון; הרי לא אמרתי להם באילו קוביות להשתמש ובאלו לא).
— עכשיו נעבור למשימה אחרת, קשה יותר, — אמרתי. — צריך לבנות מגדל באותו גובה, אבל מהקוביות האלו, — והצבעתי על קוביות פלסטיק צבעוניות בגודל אחד.
שוב השתרר שקט, הפעם ממושך יותר. לא רציתי לסיים את המפגש באווירה כזו, ולכן, למרות שאני לא נוהג לעשות את זה, נתתי לילדים רמז. כבדרך אגב הנחתי על השולחן חבל ואמרתי:

— תחשבו, תחשבו. הם תפסו מיד את החבל, אבל לא ממש ידעו איך להיעזר בו; הם בעיקר מתחו אותו בין ראשי המגדלים. הבאתי מקל ואמרתי שינסו להיעזר בו. אבל גם אותו הם הצמידו לראשי המגדלים, באופן שיצר קו אלכסוני, ולא ממש ידעו מה לעשות הלאה. נאלצתי לתת להם עוד הדרכה:
— תגידו, מה גבוה יותר — המקל או המגדל הזה?
התברר שהמקל גבוה יותר, אבל שיש בו חריץ בדיוק בגובה המגדל. זה, סוף סוף, נתן להם כיוון לפתרון, והם בנו את המגדל השני על הרצפה עד לגובה של אותו חריץ.
כעבור בערך שלושה מפגשים, חשבתי על רעיון מעולה: לנסח את תהליך בניית המגדל כאלגוריתם. כך זה נראה בפועל.
ראשית, נתתי להם שוב משימת בניית מגדל. הפעם הם פתרו אותה בקלות, מה שמראה שהם הפנימו את החומר.

— עכשיו, — אמרתי, — בואו נחשוב אילו פעולות אנחנו עושים, ובאיזה סדר.
— אנחנו שמים כמה קוביות, ואז מודדים, ואז מוסיפים קוביה או מורידים קוביה, — הם ענו. (מה שהיה נכון: בהתחלה הם היו בונים מגדל "לפי העין" ואז בודקים; הם היו מפספסים בקוביה אחת לכל היותר). דיברתי על זה שצריך לחלק את המשימה לתתי-משימות קטנות, למשל, לשים קוביה אחר קוביה ולא הרבה קוביות בבת אחת, וכו', ואז הראיתי להם את הכרטיסים שאלה ואני הכנו מראש:

- (1) כרטיס מלבני: ילד מניח קוביה;
- (2) כרטיס מלבני: ילד מודד את גובה המגדל (על הרצפה);
- (3) כרטיס בצורת מעוין: סימן שאלה גדול (הכוונה היא לשאלה: האם הגובה זהה?);
- (4) כרטיס מלבני קטן יותר: "סוף";
- (5) בנוסף לכרטיסים, גזרתי אוסף חצים — כמה חצים קטנים ועוד אחד גדול; על שניים מהחצים הקטנים כתבתי את המילים "כן" ו"לא".

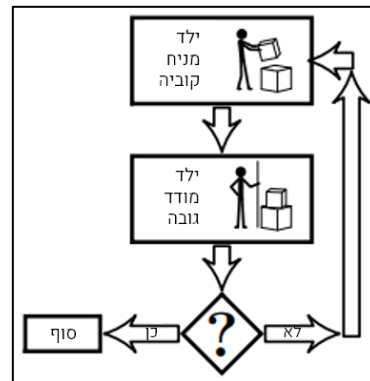
אחרי שהראיתי להם את כל זה, שאלתי באיזה סדר צריך לעשות את הפעולות שמצוירות על הכרטיסים. הילדים כבר הכירו שאלות בסגנון הזה, כי לפני כן הם פתרו את שני התרגילים הבאים:

א. להגדיר את סדר הפעולות שעושים בבוקר (התלבשות, רחיצת ידיים ופנים, התעוררות, ארוחת בוקר, רכיבה על אופניים, התמתחות במיטה וכד') – מתוך ספרו של טאמאס ורגה "תרשימי זרימה, כרטיסי ניקוב והסתברויות".

ב. להגדיר באיזה סדר לובשים בגדים שונים (תחתונים, גופיה, גרביים, מגפיים, חולצה, מכנסיים, סוודר, מעיל, צעיף, כובע).

במקרה הראשון מקבלים סדר לינארי, "תכנית בלי הסתעפויות", ואילו במקרה השני מדובר ביחס סדר חלקי, או, לחילופין, באלגוריתם לא דטרמיניסטי.

לכן גם במקרה הזה הילדים ידעו להסביר מה סדר הפעולות הנכון, וכשהיה צריך לחזור לכרטיסיית "הילד מניח קוביה", שלפתי את החץ הארוך וקיבלנו את תרשימי הזרימה המתואר באיור 54.



איור 54. אלגוריתם לבניית מגדל בגובה המתאים. הכרטיסים עם הציורים היו בלי טקסט – הסברתי בעל פה את המשמעות שלהם. את המילים "כן", "לא" ו"סוף" הם כבר היו מסוגלים לקרוא בעצמם.

בדיעבד, נראה לי שהרעיון לא היה כל כך מוצלח. יש ביישום שלו שתי בעיות: ראשית, בדיקת התנאי לא מומחשת כמו שצריך; שנית, מדידת המגדל שעל השולחן לא מופיעה בתרשימי (היה צריך לשים אותה לפני הכרטיס הראשון). ובעיקר, יש משווא לא טבעי בבניה הזו. הילדים הבינו מצוין מה אני עושה, אבל ממש לא הבינו למה דווקא ככה. כמו שכבר הזכרתי, בעולם האמיתי הם נהגו אחרת: הניחו כמה קוביות בבת אחת, ואחרי זה הסתפקו במדידה או שתיים.

ואף על פי כן, הרעיון הכללי נשאר: להמציא חידות באלגוריתמים. נשאר גם מספר עקרונות שהשתמרו בגרסה הסופית של הפרויקט הזה.

עקרון ראשון: לתאר את האלגוריתמים בעזרת תרשימי זרימה, ולא בעזרת שפה כתובה, בין אם זו שפת תכנות או שפת דיבור, שכן למעט מספר מילים בסיסיות, הילדים לא יודעים לקרוא ולכתוב.

עקרון שני: להרכיב את תרשימי הזרימה מכרטיסים מוכנים מראש ולא לצייר אותם – הילדים עוד לא פיתחו אחיזת עפרון מספיק טובה. (ההשלכה הכי מעיקה של העקרון הזה היא הצורך לגזור הרבה חצים במגוון אורכים).

עקרון שלישי: הכרטיסים צריכים לבטא אופרטורים ותנאים לוגיים בעזרת ציורים פשוטים וברורים, ולא במילים. הכי טוב לבטא אותם, במידת האפשר, בעזרת סמלילים.

חוץ מזה, הכרטיסים הלבנים יפים מאד על רקע השולחן השחור המבריק, כך שהחוויה האסתטית נעימה.

במשך תקופה ארוכה לא הצלחתי להמציא אף תרגיל. היו לי כל מיני רעיונות – למשל, איך לעלות במעלית לקומה הנכונה, או להוציא כדורים משקית ולמיין אותם בקופסאות. אבל כולם היו או לא מתאימים לפתרון אלגוריתמי, או לא מעניינים ולא אינטואיטיביים. הרעיון של שפה אלגוריתמית נראה לי בלתי מושג: אם אני לא מצליח להמציא תרגיל אחד, מה יש לדבר על משפחה של תרגילים. חוץ מזה, דיכאה אותי המחשבה שאפילו אם אמציא כמה תרגילים, אצטרך להכין כרטיסים חדשים לכל אחד מהם. אחרי אינספור דיונים עם סטפן על תכנות בכלל ועל משחקים עם ציפים מובנים בפרט, הצלחתי סוף סוף לנסח לעצמי (ולסטפן) מה המכשול העיקרי בדרך ליצירת שפת תכנות לילדים.

ברור ששפה כזו צריכה להיות דלה בפונקציות, ולכן גם ממוקדת. כל השפות שאני מכיר מתמקדות או במספרים (fortran, algol), או בעיבוד נתונים (cobol), או בעיבוד טקסטים (lisp, snobol); חוץ

מזה, יש שפות אוניברסליות שמאפשרות את כל השלושה (pl, algol-68)¹⁹. אבל שלושת התחומים האלה לא מובנים לילדים ולא מעניינים אותם (המספרים הכי קרובים לתחומי העניין שלהם, אבל כדי להבין חידות מהתחום הזה שאפשר להמציא אלגוריתם שפותר אותן הם צריכים לגדול לפחות בחמש שנים). לכן, הבעיה היא להמציא תחום שבו תעסוק השפה. והשפה עצמה היא הבעיה המשנית. יומיים אחרי שיחת הטלפון שבה הסברתי לסטפן את הבעיה, הוא המציא פתרון גאוני בפשטותו: שפה שתעסוק בתנועת אובייקטים במבוך. המבוך יצויר על דף משבצות. הוא הציג גם להתחיל, לצורך פשטות, ממבוך בלי מכשולים: חדר מלבני פשוט. אחר כך כל אחד מאיתנו, באופן בלתי תלוי, המציא את אותה שפת תכנות בדיוק – אפילו הסימונים, למעט אחד, היו זהים; צירוף מקרים כזה מהווה הוכחה לטבעיותה של השפה.

שפת התכנות "ילדון"

אז, ב-1981, כבר הייתה קיימת שפת התכנות לילדים Logo. היא הייתה מבוססת על אותו עקרון – תנועת אובייקט (צב) במרחב – אבל הרבה יותר מפותחת, והעיקר, ממומשת במחשב. לכן הפיתוח שלנו נראה היום קצת כמו המצאה של אופניים מעץ. אפילו התלבטתי אם להשמיט את כל החלק הזה מהספר. בסוף החלטתי להשאיר. היה לי חבל לזרוק לפח גם אוסף שלם של חידות וגם את אוירת ההתלהבות שהפרויקט שלנו הוליד – קודם בנו, המבוגרים, ובהמשך ההתלהבות הזו עברה באופן טבעי גם לילדים. מה עוד שבאותה תקופה לא ידענו כלום על Logo, לא היו לנו ולא חלמנו שיהיו לנו מחשבים; ולבסוף, המצאה של אופניים מעץ היא דבר לא עד כדי כך טפשי, כשחושבים על זה.

אעבור לתיאור השפה עצמה. ראשית אתאר את השלד שלה, ואחר כך הרחבות אפשריות.

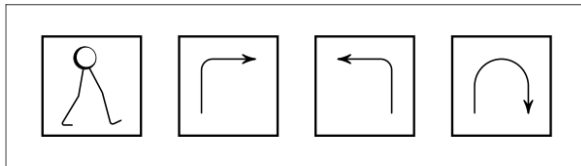
1. **אובייקט נע.** לקחתי קוביות עץ של דימה ויצרתי מהן חץ, כמו זה שמתואר באיור 55. לחץ הזה קראנו "רובוט". הרובוט הזה מתאים למשבצת בגודל 8 ס"מ × 8 ס"מ.
2. **חדר.** דף גדול, מהסוג שמיועד לסקיצות, הספיק לחדר בגודל 7×5 משבצות; כמוכן שאפשר לשנות את החדר בהתאם לתרגיל.
3. **האופרטורים.** בינתיים יש ארבעה: "צעד קדימה", "סיבוב ימינה", "סיבוב שמאלה", "סיבוב של 180°". הסיבובים מתבצעים בתוך המשבצת. האופרטורים מתוארים באיור 56.
4. **תנאים לוגיים.** גם ארבעה: "קיר מלפנים", "קיר מימין", "קיר משמאל", "קיר מאחור". הם מתוארים באיור 57. (כמעט בכל התכניות השתמשנו רק בתנאי הראשון).
5. **חצים.** צריך שיהיו חצים בכל האורכים שמתחלקים בס"מ וחצי. על חלק מהחצים באורך ס"מ וחצי כותבים את המילים "כן" ו"לא". כל אחת מהמילים האלו צריכה להיות כתובה על חצים בארבע דרכים שונות: מראש החץ לזנבו, מהזנב לראש, ובמאונך למעלה ולמטה (באיור 58 מוצגים שלושה חצים מתוך השמונה שצריך).
6. **התחלה וסיום.** כל תכנית מתחילה בחצי עיגול שהחלק השטוח שלו פונה כלפי מטה, ומסתיימת בחצי עיגול שהחלק השטוח שלו פונה כלפי מעלה (איור 59). בהמשך, כשיהיה לתכניות קלט ופלט, נניח אותו על חצאי העיגולים האלה.
7. **תתי-תכניות.** בינתיים לא השתמשנו בקריאה לפונקציות. בהמשך אני מתכנן להשתמש בהן כך:
 - א. נחזיק מחברת שאליה נעתיק את כל התכניות שכבר בנינו. כל תכנית תקבל מספר סידורי. נכתוב שם גם את התרגיל המתאים – עדיף בקצרה ובאותיות דפוס (כדי שהילדים שיודעים לקרוא יוכלו לקרוא אותו בעצמם).
 - ב. לפי הצורך, נשתמש כפונקציה באחת מהתכניות שכתבנו במחברת: נכניס לתרשים הזרימה ריבוע בגודל 6 ס"מ × 6 ס"מ עם שני חצאי עיגולים; בתוך הריבוע נרשום את המספר של התכנית מהמחברת (איור 60). אם יהיה צורך בקלט ופלט, נרשום אותו בחצאי העיגולים.

¹⁹ אזכיר שהטקסט הזה נכתב ב-1981.

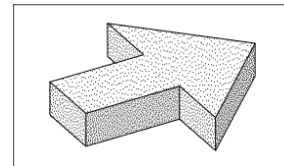
הצורה שמייצגת פונקציות צריכה להביא לידי ביטוי את העובדה שמדובר בתכנית בפני עצמה, שיש לה התחלה וסוף (חצאי עיגולים), ושעושה אוסף של פעולות, ולא רק פעולה אחת (ריבוע גדול). בכלל, כדאי לשים לב לגודל היחסי של הרכיבים בתרשים הזרימה. חשוב לשמור על הפרופורציות הנכונות ביניהם בשביל שהתרשימים יראו הגיוניים.

8. **מונים.** בעתיד, התכנון הוא להרחיב את השפה על ידי הוספת מונים. סטפן הציע שהמונה יהיה כלי שאפשר לשים בו כדורים. עוד לא החלטנו איך נסמן אותם בתרשים הזרימה. אני לא רוצה להשתמש באופרטורים בסגנון $i = 1$. בהתחלה חשבתי לסמן מונה על-ידי משולש עם אות; בתרשים הזרימה, כשמגיעים למשולש עם האות "A" המשמעות תהיה "להניח כדור אחד בכלי המסומן באות A". סטפן אמר שבמקום משולש עדיף לצייר צורה שמזכירה את הכלי ששמים בו את הכדורים. מחשבה יפה, אבל לכלים היחידים שמתאימים יש צורה של צילינדר, מה שמביא אותנו שוב למלבן. עכשיו אני נוטה לאפשרות שלישית: לצייר על ריבוע רגיל בגודל $3 \text{ ס"מ} \times 3 \text{ ס"מ}$ צנצנת עם הכיתוב "A", כדור, וחץ שמתאר איפה צריך לשים את הכדור. אם יהיה צורך במונה יורד (הוצאת כדור מהצנצנת), יהיה קל לתאר אותו באותה דרך (קודם חשבתי להפוך את המשולש). שתי הגרסאות מוצגות באיור 61.

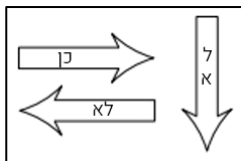
השימוש במונים דורש גם הוספה של תנאים לוגיים: $A > B$, $A = 4$ וכו'. קודם אצטרך להסביר לילדים את הסימונים $>$, $=$, $<$ וכו'. אין צורך בשום פעולה חשבונית נוספת, אפילו לא חיבור.



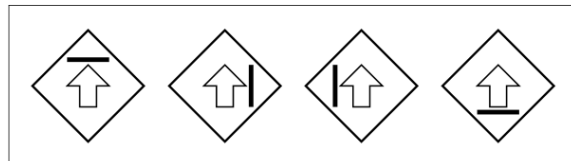
איור 56. גזרים כרטיסים ומציירים עליהם את האופרטורים האלה, גודל כל ריבוע - $3 \text{ ס"מ} \times 3 \text{ ס"מ}$.



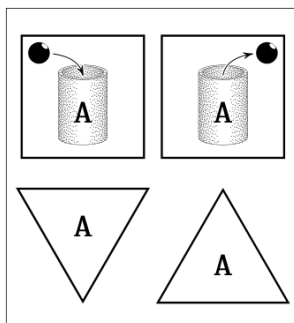
איור 55. החץ הזה נקרא "רובוט". מזיזים אותו ברחבי ה"חדר".



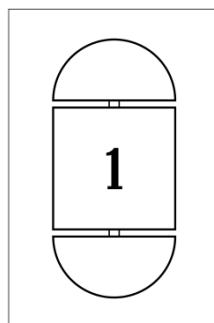
איור 58. החצים היוצאים מהמעיינים.



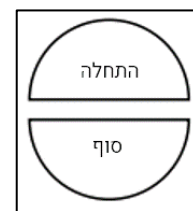
איור 57. מעיינים לבדיקת התנאים. אורך כל אלכסון - 6 ס"מ .



איור 61. צורות אפשריות של מונים.



איור 60. כך נראית "תת-תכנית מס' 1" במחברת כתוב מה היא עושה.



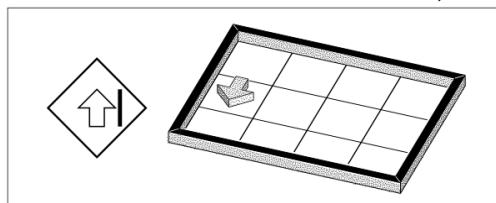
איור 59. מרכיבים את כל התכנית בין חצאי העיגול האלה.

* * *

עכשיו אפשר, סוף סוף, לחזור לסיפור שקטעתי על המפגש. בהתחלה, כשהנחתי על השולחן את הקופסה עם כל הכרטיסים והחצים, הילדים הציפו אותי בשאלות ובקושי הצלחתי להשחיל מילה. לאט לאט הם נרגעו והצלחתי להסביר להם את הדברים הבאים.

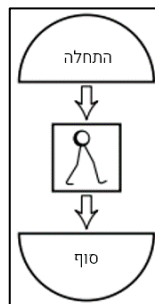
בהתחלה הסברתי להם שרובוט הוא אדם מכני; הוא יכול לעשות כל מיני פעולות, אבל בניגוד לאדם אמיתי אין לו שכל; לכן, הוא עושה רק מה שאומרים לו וזהו, והוא מאד ממושע. אחר כך הראיתי להם את הפעולות שרובוט יכול לעשות. התברר שהם לא כל כך מבחינים בין סיבובים ימינה ושמאלה לסיבוב של 180° . העמדתי אותם בשורה ותרגלנו קצת, ואז התברר שהם גם מתבלבלים בין ימין לשמאל. אבל עם הרובוט הם התבלבלו פחות, כי החצים הראו את כיוון הסיבוב. אחר כך הסברתי להם שלרובוט אין עיניים (כי קשה מאד לעשות עיניים מכניות), ולכן הוא יכול רק להושיט יד ולמשש האם יש לידו קיר. לקחנו את המעוינים עם התנאים והתחלנו לבדוק, עבור מנחים שונים של הרובוט, האם התנאי שמצויר על המעוין מתקיים. דימה העיר שהתנאי "יש קיר מימין" מתקיים גם כשהקיר נמצא בצד השני והרובוט מסובב לכיוון השני יחסית למעוין (איור 62). מעניין: זה אומר שהוא כבר מבין שהמושגים "ימין" ו"שמאל" הם שמורות של סיבוב, אבל עדיין לא מצליח לזכור איזה צד הוא ימין ואיזה שמאל.

איור 62. הקיר נמצא מימין לרובוט.



לבסוף, ניסחתי את המשימה של הרובוט: להגיע לקיר ולעצור. התחילה מהומה: אחד לקח את הרובוט והתחיל להצעיד אותו על לוח המשחק; השני התחיל למקם על לוח המשחק את הכרטיסים; השלישי לא הפסיק לשאול אותי למה צריך חץ כל כך ארוך; בקיצור, אף אחד לא הבין מה צריך לעשות. בקושי רב הצלחתי להשליט שוב סדר, ולהסביר שאת תרשים הזרימה צריך לבנות בנפרד מלוח המשחק, לידו, שהחצים נועדו לסמן את סדר הפעולות, ושצריך להתחיל מ"התחלה" ולסיים ב"סוף". הם בנו את תרשים הזרימה המתואר באיור 63, כשהכוונה שלהם היא "להתחיל וללכת עד הסוף". הראיתי להם שכך הרובוט לפעמים מגיע עד הקיר, לפעמים לא מגיע אליו, ולפעמים מתנגש בו.

איור 63. נסיון ראשון לכתוב תכנית שמביאה את הרובוט עד הקיר.



דימה צעק:

— אני יודע, צריך להשתמש באלו (הצביע על הכרטיס של הצעד) לפי כמות הצעדים שצריך; שניה, אני אגיד לכם: אחת, שתיים, שלוש... — חמש כאלו! כאן עשיתי לצערי את הטעות הפדגוגית הרגילה שלי. הייתי צריך לפתח את הרעיון הזה בהדרגה, בלי למהר: לגזור ריבועים מנייר, לצייר אנשים ולבנות את כל תרשימי הזרימה שהם מציעים. כך הם היו מגלים את הלולאה בעצמם. אבל במקום זה — גם מכוח האינרציה וגם מהלחץ שאין לי מספיק אופרטורים "צעד קדימה" — נפנפתי את הרעיון הזה בטענה שעבור משבצות שונות נקבל תרשימי זרימה שונים, ושעבור חדר גדול נקבל תרשים זרימה ענק. אחרי זה בדקנו האם אפשר להסתפק באופרטור צעד אחד, שחוזרים אליו שוב ושוב בעזרת החצים. גילינו שהרובוט תמיד מתנגש בקיר ושובר את האף. בשלב הזה, לקחתי כל ילד בתורו, קשרתי לו את העיניים, סובבתי אותו בחדר עד שהוא איבד אוריינטציה, וביקשתי ממנו לו לעשות את מה שרצינו שהרובוט יעשה: להגיע לקיר ולעצור. אמרתי להם

שישימו לב שלפני שהם התחילו ללכת הם הושיטו ידיים קדימה, כדי לבדוק שאין מלפניהם קיר. כך הגענו למסקנה שהרובוט צריך קודם כל לבדוק שאין מלפניו קיר, ובנינו את תרשים הזרימה המתאים. לסיום, כל אחד מהם הצעיד את הרובוט בחדר בהתאם לתרשים הזרימה (אם מישהו התחיל להשתולל, הדגשתי שרובוטים, בניגוד לבני אדם, הם ממושמים לחלוטין).

מפגש 40. מפגש ראשון עם הלוחיות של דיינש

שבת, 12 בדצמבר 1981. 11:10-11:55. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1.

דומקוש סאאס²⁰ הביא לי מתנה מהונגריה: אוסף של צורות פלסטיק ששונות אחת מהשניה בארבעה פרמטרים: צבע (אדום, כחול, צהוב, ירוק), צורה (עיגול, ריבוע, משולש), גודל (גדול וקטן), והיעדרו או נוכחותו של חור באמצע – סך הכל $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ צורות. נדמה לי שאלו בדיוק הצורות שנקראות "הלוחיות הלוגיות של דיינש"²¹. התרגיל הראשון עוסק בהן.

התחלנו מזה שדיברנו על כל הפרמטרים. אחר כך נתתי להם משימה: להרכיב שרשרת של צורות כך שכל שתי צורות סמוכות יהיו זהות בשלושה פרמטרים ושונות באחד. הילדים הסתדרו עם המשימה בקלות, ואם טעו מדי פעם, אז גילו את הטעות בעצמם – לפעמים זה שטעה ולפעמים האחרים. די מהר נוצרה שרשרת כמעט באורך השולחן.

תרגיל 2.

פתאום עלה לי רעיון: לעשות תרגיל דומה ל"מה הקשר?" של ו. לויין. הנחתי על השולחן שתי צורות ששונות זו מזו בכל הפרמטרים, ואמרתי שהן ההתחלה והסוף של שרשרת, וצריך להרכיב ביניהן שרשרת לפי אותו כלל כמו בתרגיל הקודם.

להפתעתי, הילדים פתרו בקלות רבה גם את התרגיל הזה, והרכיבו שרשרת כשבכל צעד הם מפחיתים את "מרחק המינג" ב-1.

אחרי זה יבגני הציע לפרק את השרשרת הארוכה ולחבר את שני הקצוות הנותרים ע"י שרשרת קצרה. עשינו את זה. דימה הציע לחבר גם את הקצוות של שתי השרשראות שקיבלנו. גם את זה עשינו. – קיבלנו ריבוע, – אמרו הילדים.

הסברתי שזה לא ריבוע אלא מרובע, כי כל צלע שלו היא באורך שונה (לקצוות של שתי השרשראות היו תכונות משותפות). אחר כך הראיתי להם איך אפשר לסדר את הלוחיות בעיגול. הם מאד התלהבו מזה משום מה. דימה רצה גם לבנות את הקוטר של העיגול הזה, אבל עצרתי אותו.

הילדים התחילו להתווכח מה נעשה עכשיו עם הלוחיות. ניסיתי לשכנע אותם שאם נשחק בכל המשחקים האפשריים עם הלוחיות אז לא ישאר לנו כלום לפעמים הבאות, אבל הם רצו עוד. כמעט הסכמתי, אבל אז פיטר שאל:

– מה, אחרי זה נשחק ברובוט?

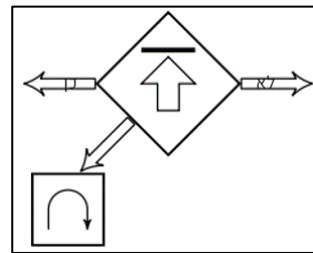
אמרתי שכן. הדעות שוב היו חלוקות: חלקם רצו להמשיך לשחק בלוחיות ועכשיו שינו את דעתם ורצו לעבור לרובוט; חלקם היו מוכנים לסיים אבל התחרטו, כי לא אהבו את הרובוט. יבגני אמר שהוא פחות אוהב את הרובוט כי זה קשה (בהמשך התברר שהוא מסתדר מצוין, כך שהוא כנראה פשוט חזר אחרי דברים שנטשה אמרה). אמרתי שנורא קשה לשלושתם להסכים על משהו, אז צריך שאחד יהיה המחליט, ומה שהוא יחליט זה מה שיהיה. הם בחרו בי להיות המחליט, ועברנו לתרגילים בתכנות.

²⁰ מתמטיקאי הונגרי, מומחה לתורת ההסתברות. עשה את הדוקטורט במוסקבה. אני אסיר תודה על המתנה שלו.
²¹ זולטן דיינש – ממובילי הלמידה המתמטית ה"פעילה", כלומר כוונתו שמבוססת על פעילות קונקרטית. ממציא הבדידים. כיום אפשר להזמין את הלוחיות של דיינש באינטרנט.

²² מרחק המינג מוגדר בדרך כלל על שתי מחזורות של אותיות, ושווה למספר העריכות המינימלי שיש לבצע כדי לקבל אחת מהשניה. למשל, מרחק המינג בין "שלום" ל"חלון" הוא 2. – ר.פ.

תרגיל 3.

ניסחתי את התרגיל: להגיע עד הקיר ולהסתובב עם הגב אליו. התוצאות היו מדהימות. בהתחלה, דימה ביקש שארכיב להם את התרשים מהפעם הקודמת. לא הספקתי לענות: יבגני ופיטר כבר תפסו כמה חלקים, ודימה נלחץ שלא ישאר לו כלום והצטרף אליהם. תוך רגע הם הרכיבו תרשים זרימה (לא לתרגיל הישן, כמו שדימה הציע, אלא לחדש) – בהתחלה עם שתי טעויות, אבל הם מיד תיקנו אותן: (1) הם שכחו להוסיף את חיצו החזרה מה"צעד" לבדיקה "האם יש מלפניך קיר?", אבל יבגני נזכר והוסיף; (2) דימה רצה להוסיף חץ שלישי שיוצא מהמעוין ומוביל ל"סיבוב ב-180°", כמו באיור 64; שאלתי למה החץ "כן" תלוי סתם כך, ומתי צריך ללכת לחץ השלישי, אבל עוד לפני שסיימתי לנסח את השאלות האלו פיטר אמר: – את זה צריך לשים כאן, – והצביע על המיקום הנכון של אופרטור הסיבוב. אחרי זה כל אחד מהם "הריץ" את התכנית, כשהוא עוקב עם האצבע אחרי ה"קוד" ומוליך את הרובוט על לוח המשחק. שכחתי לציין: בתחילת התרגיל הם דרשו ששוב נלך עם עיניים קשורות. אמרתי שאם נצטרך אז נעשה את זה, אבל אם לא, אז בשביל מה? הילדים התחילו לקטר, – נו, אבל אנחנו רוצים... אבל במהלך העבודה אף אחד לא נזכר בזה.



איור 64. שימוש לא חוקי בבדיקת תנאי: לא ברור מתי אמורים ללכת לפי החץ השלישי – אם זה "לא כן ולא לא", או מה זה?

מפגש 41. אותו דבר: הלוחיות של דיינש והרובוט

שבת, 19 בדצמבר 1981. 11:10-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

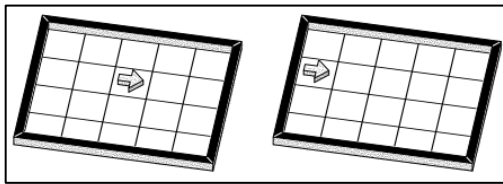
תרגיל 1. המשחק ההונגרי.

הזכרתי לילדים את התרגיל שבו כל צורה הייתה שונה מהקודמת בפרמטר אחד, והצעתי להם להרכיב שוב שרשרת כזו, רק שהפעם כל שתי צורות עוקבות יהיו שונות בכל ארבעת הפרמטרים. הילדים טעו פה ושם, אבל סך הכל פתרו את התרגיל בקלות. במהלך העבודה פיטר שם לב שהצורות הגדולות והקטנות מופיעות לסירוגין. דיברנו על הסיבה שזה קורה (לפרמטר "גודל" יש רק שני ערכים אפשריים – "גדול" ו"קטן"), וגילינו שאותו דבר נכון לגבי החור (צורות עם ובלי חור מופיעות לסירוגין), ולכן כל הצורות הגדולות בשרשרת שלנו הן בלי חור, וכל הקטנות עם. הצעתי להניח בצד את כל הצורות שלא נשתמש בהן (גדולות עם חור וקטנות בלי חור), כדי שיהיה קל יותר למצוא צורות מתאימות. אחרי זה העבודה התקדמה מהר. אחר כך דימה הציע שנרכיב מתחת לשרשרת שרשרת נוספת, וזה, למעט זה שכל צורה עם חור תוחלף בצורה בלי חור, ולהפך. הרכבנו. דימה שם לב שבציר האופקי קיבלנו את "המשימה החדשה", ובציר האנכי את "המשימה הישנה" (כלומר ההבדל הוא בפרמטר אחד בלבד). המראה שהתקבל היה כל כך יפה שהילדים לא הסכימו לפנות את הצורות מהשולחן. דימה התעקש במיוחד; הצלחתי לשכנע אותו רק כשסיכמנו שנכין שרשרת כזו מנייר לקישוט עץ האשוח בנוכי גוד.

חידה 2. משימה לרובוט.

המשימה: להגיע לקיר שמאחוריך ולהיעמד עם הגב אליו (איור 65).

איור 65. הרובוט צריך לעבור מהמצב המתואר באיור השמאלי לזה שמתואר באיור הימני.



בהתחלה ביקשתי מהילדים לבצע את המשימה "דינית", כלומר לקחת את הרובוט ולעשות איתו את כל הפעולות הנדרשות (הצעדים, הסיבובים וכו'), כשאני הראיתי להם רק את המצב ההתחלתי והסופי שלו. להפתעתי, היחיד שביצע נכון את כל הפעולות היה יבגני (הסתובב, עשה שני צעדים, הסתובב בחזרה). פיטר ודימה ניסו לעשות כל מיני דברים לא ברורים: הלכו הצידה בזיגזג, עשו המון סיבובים מיותרים, צעדים אחורה וכדומה – ובסופו של דבר מצאו את עצמם במשבצות הלא-נכונות. או שהם ניסו להמציא משימה אחרת (דימה מאד אוהב את זה), או שהם לא הצליחו להבין את המשימה שלי, אני לא יודע מה מהשניים. נדרשה ממני המון סבלנות כדי להסביר להם כל פעם את הטעויות שלהם. לבסוף, נתתי שוב את הרובוט ליבגני, כדי שהוא יראה לכולם מה אמורים לעשות, אבל אז גם הוא התבלבל והתחיל לעשות טעויות, ובכלל התברר שהם כבר שכחו מה המשימה; התחלנו מההתחלה.

הבעיה הייתה שלא רציתי לכתוב תכנית פשוטה ככל האפשר, אלא תכנית מעניינת ככל האפשר; שהיא תעשה מה שהיא צריכה, אבל שבדרך הרובוט יתרוצץ כמו משוגע בכל הלוח. על כל פנים, נאלצתי להשלים עם תוכניות פשוטות: אפילו אותן בקושי הצלחנו לכתוב. רק אחרי כמה חודשים הצלחנו לכתוב תכנית באמת "מוצלחת": היא תמיד הביאה את הרובוט לפינה, כמו שנדרש ממנה, אבל אפילו אבא לא הצליח להבין איך זה קורה. – דימה.

בסוף הצלחנו להבהיר את התמונה ועברנו לתכנת. ניסינו המון גרסאות, כל כך הרבה שקצרה היריעה מלפרט אותן. בכל פעם שסיימנו לכתוב תכנית הרצנו אותה, וכך בדקנו מה היא גורמת לרובוט לעשות. בכל פעם שהתכנית נקלעה ללולאה אינסופית, הילדים התלהבו מאד. לבסוף הצלחנו לכתוב תכנית שהביאה את הרובוט לעמדה הנכונה, אבל לא מכל נקודת התחלה, כי בלולאה היא קודם עשתה צעד ורק אז בדקה האם יש קיר (וכך, אם בנקודת ההתחלה הרובוט כבר עמד ליד הקיר, אז כשהוא הסתובב וניסה לעשות צעד הוא שבר את האף). הזכרתי לילדים ש"סוף מעשה במחשבה תחילה", והסברתי שאי אפשר ללכת אקראית, לפני כל צעד צריך לבדוק האם אין מלפניך קיר. אבל זה לא גרם להם לתקן את הטעות; במקום זה התחילה סדרה שלמה של כל מיני גרסאות חסרות משמעות, אם כי בסוף באמת קיבלנו תכנית שעובדת. לסיכום, כמיטב המסורת, כל ילד הריץ את התכנית מנקודת התחלה שהוא בחר בעצמו. בזה סיימנו את המפגש.

מפגש 42. פיתיתי שלג

שבת, 2 בינואר 1982. 11:10-11:55. דימה, פיטר ויבגני.

מפגש לשנה החדשה.

זה מוזר, אבל לא תכנתי לקשור את המפגש הזה לשנה החדשה. פשוט לא חשבתי על זה. הוא יצא קשור, אבל קלטתי את זה רק אחרי שהוא נגמר. אם הייתי חושב על זה קודם, היה אפשר לעשות אותו הרבה יותר מוצלח.

תרגיל 1. ריבועי קסם.

פיטר הביא את העיתון הראשון שלו, גליון של *פראבדה לילדים*, שבו הייתה חידה: במשבצות של טבלה בגודל 4×4 היו מספרים תלת-ספרתיים; היה צריך לשנות את המיקומים שלהם כך שיתקבל ריבוע קסם עם הסכום 1982.

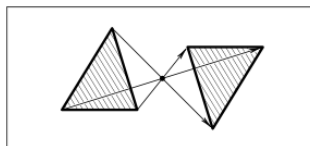
אמרתי לילדים שזו משימה מאד קשה, אבל הסברתי להם מה זה ריבוע קסם, ואז הוצאתי מהארון אלבום של דירר, מצאתי את הציור "מלנכוליה", סיפרתי להם שדירר היה גם מתמטיקאי וגם צייר, והראיתי להם את ריבוע הקסם. בדקנו את ה"קסמות" של הריבוע הזה בכך שחישבנו סכומים של כמה שורות ועמודות ושל אלכסון אחד.

היו שני מספרים שהיו כתובים לא ממש ברור בציור (בעבר לא שמתי לב לזה). הצעתי לילדים לגלות מה הם המספרים האלה. אף אחד מהם לא חשב על זה שאפשר להפחית מסכום השורה (34) את סכום שלושת המספרים שכתובים ברור, וכך לקבל את המספר הרביעי. במקום זה הם עבדו בניסוי וטעיה, אבל הצליחו לנחש את המספרים הנכונים תוך נסיון או שניים.

תרגיל 2. סימטריה מרכזית.

אמרתי לילדים שכבר דיברנו על סימטריה ביחס לקו ישר (מראה), אבל יש עוד סוג של סימטריה, שבו לצורה הסימטרית יש מרכז. ציירתי מרכז על דף משבצות, ואז ציירתי בכל מיני מקומות נקודות, קווים, עיגולים – לפעמים ציירתי את הצורה הסימטרית בעצמי ולפעמים נתתי לילדים. דימה – זה כבר הופך אצלו למנהג – במקום לפתור את המשימה שאני נותן, אמר שהוא המציא משימה אחרת²³, והתחיל לצייר איזה קו עקום, ואז את הסימטריה המרכזית שלו, אבל בגלל הצורה המסובכת של הקו ובגלל היד הלא מספיק יציבה של דימה לא היה ברור אם הוא מצייר נכון או לא. בקושי הצלחתי לשכנע אותו שהמשימה שלו נורא קשה ושקודם צריך ללמוד לפתור בעיות פשוטות יותר. אחר כך הצעתי לו לצייר צורה סימטרית למשולש, והוא צייר את הסימטריה לא ביחס למרכז אלא ביחס לצייר, כלומר, לא הפך את המשולש. הראיתי לו את הפתרון הנכון (איור 66), והסברנו אותו.

איור 66. דוגמה לסימטריה מרכזית.



אחר כך הראיתי לילדים ציורים מהספר "סימטריה" של גרמן וייל, ומהאוסף "קישוטי הסימטריה". חיפשנו בו צורות סימטריות ביחס לצייר וביחס למרכז; אמרתי שככל שלצורה יש יותר צירי סימטריה, כך היא יפה יותר. מצאנו בין האיורים גם איור של פתיתי שלג. דימה התפלא: – מה זה, פתיתי שלג? – כן, – אמרתי, – אבל מאד מוגדלים. הילדים החליטו לצאת החוצה עם זכוכית מגדלת ולהסתכל על פתיתי שלג (לצערי לא יצא מזה שום דבר מעניין, השלג כבר נדחס).

אחרי זה אני ופיטר הרבה פעמים תפסנו פתיתי שלג שעוד לא נהרסו ובחנו אותם. – דימה.

לבסוף, בנינו על לוח הפסיפס העגול צורה סימטרית יחסית למרכז (עם התחשבות בצבעי האבנים). הייתי צריך לחשוב על לבנות פתית שלג! במקום זה, לצורה שלנו היה רק מרכז סימטריה, בלי צירים. הילדים פתרו את התרגיל יפה, כמעט בלי טעויות. אבא של יבגני, בוריס, גם השתתף. אחרי המפגש, כשהילדים כבר התלבשו, סיפרתי להם על קפלר ועל זה שבתור מתנה לשנה החדשה הוא כתב לחבר שלו את המאמר המתמטי "על פתית שלג, או מתנה לשנה החדשה". רק אז חשבתי על האפשרות לעשות מפגש באווירת נובי גוד. היינו יכולים לגזור בו פתית שלג מנייר.

מפגש 43. על תכונות של חיבור

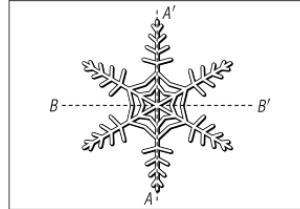
שבת, 9 בינואר 1982. 11:20-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

הזכרתי לילדים שהמפגש שלהם אתמול בחוג האנגלית היה מפגש חגיגי לכבוד הנובי גוד, ושכל אחד קיבל במתנה פתית שלג מפלסטיק. הראיתי לכולם את פתית השלג של דימה, ואמרתי שגם המפגש שלנו היום יוקדש לנובי גוד.

²³ זה נכון, גם הדוקטורט שלי עוסק יותר בבעיה שאני המצאתי מאשר בבעיה שהמנחה שלי הציעה... דימה.

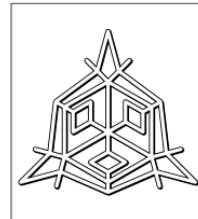
תרגיל 1. סימטריה של פתיתי שלג.

אמרתי לילדים שפתית שלג הוא מאד יפה כי יש לו הרבה צירי סימטריה, וביקשתי מהם להראות לי צירי סימטריה שהם מזהים. הם זיהו לא רק את צירי הסימטריה הקלים, אלה שהולכים לאורך הקרניים, אלא גם את הפחות מובהקים, אלה שבין קרני הפתית (איור 67).



איור 67. צירי סימטריה של פתית שלג.

אחר כך שאלתי האם לפתיתי שלג יש מרכז סימטריה. הילדים אמרו שיש. הראיתי להם פתית שלג מנייר שאלה גזרה לקישוט לכבוד הנובי גוד, ואמרתי שהוא גם סימטרי ומאד יפה, אבל יש משהו שונה בינו לבין פתית שלג אמיתי: לפתית שלג אמיתי תמיד יש שש קרניים, ולזה יש שמונה. הסברתי למה קל יותר לגזור פתית שלג עם שמונה קרניים מאשר עם שש: כשמקפלים דף שלוש פעמים יוצאים שמונה חלקים. דנו איך צריך לקפל דף כדי שיצאו שש קרניים, והראיתי להם איך עושים את זה. הידיים של דימה רעדו מרוב שהיא רצה לגזור משהו תכף ומיד. החלטתי קודם לגזור בעצמי את הקצה, כדי להפוך את הריבוע לעיגול, כהכנה, אבל דימה לא חיכה שאסיים והתחיל לקפל דף אחר. ניצלתי את ההזדמנות וגזרתי את פתית השלג בעצמי. לצערי, לצורה שקיבלתי היו רק שלושה צירי סימטריה, ולא ששה, ולכן היא לא הייתה סימטרית ביחס למרכז (איור 68); לא חשבתי על זה עד הסוף מראש, כי כל הסיטואציה עם הדף והגזירה הייתה מאולתרת. סגרתי את הנושא ומיהרתי לעבור לפסיפס.

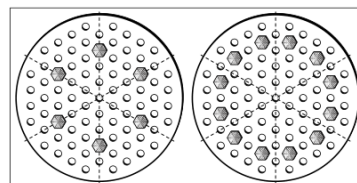


איור 68. פתית שלג שלא צלח: רק שלושה צירי סימטריה, ואין סימטריה ביחס למרכז. אפשר לטובב את פתית השלג הזה ב-120°, אבל עוד לא למדנו על סיבובים כאלה.

תרגיל 2. בניית פתית שלג על לוח פסיפס עגול.

מדובר לא בפסיפס המלבני שבו השתמשנו כל כך הרבה במפגשים הקודמים, אלא בפסיפס אחר, עם לוח עגול ואבנים משושות. המשימה ברורה מהכותרת: אני הנחתי אבן בפסיפס, וכל ילד בתורו היה צריך להניח את כל האבנים התואמות לה, כך שיתקבל פתית שלג (כלומר, אם האבן שהנחתי הייתה על אחת הקרניים, היה צריך להוסיף עוד חמש אבנים, ואם לא, אז עוד 11 – ר' איור 69). כמובן שהיה צריך להתחשב גם בצבע של האבן. דימה ופיטר פתרו נכון, ויבגני משום-מה עשה כל הזמן את אותה טעות. בסוף קיבלנו פתית שלג צבעוני ויפה.

צריך לשים לב שהניסוח של המשימה מעט מעורפל: "כך שיתקבל פתית שלג". זה עניין עקרוני מבחינתי, עד גבול מסוים. ניסוח מדויק של המשימה היה דורש מאיתנו לדבר על סיבובים, על צירי סימטריה מרובים, אולי אפילו על אוטומורפיזם, והילדים בכל מקרה לא היו מבינים או זוכרים שום דבר. דרך יותר הגיונית לעבוד היא לתת לפרטים הקטנים ולדיוקים ההכרחיים להתברר במהלך העבודה. הרי כך עובד גם המתמטיקאי. הניסוח הסופי של הבעיה נהיה ברור רק כשהבעיה כבר פתורה.



איור 69. אם יש נקודה על אחת מקרני פתית השלג, יש חמש נקודות "תואמות לה"; כנ"ל עבור נקודה שנמצאת בדיוק בין שתי קרניים. בשאר המקרים יש אחת-עשר נקודות תואמות.

תרגיל 3. אסוציאטיביות (וקומוטטיביות) של חיבור.

אמרתי לילדים שכשהם ילכו לבית ספר הם ילמדו מספרים, אבל כבר עכשיו... פה הם קטעו אותי:
פיטר: אני כבר יודע, אבל רק עד מאה.
יבגני: ואני רק בעזרת שיעון.

דימה: ואני יודע לספור עד מספרים מאד גדולים, אבל אף פעם לא ניסיתי.
מההקשר הבנתי שבמילה "מספרים" הם מתכוונים לספירה: אחת, שתיים, שלוש... אמרתי להם שהם
אפילו כבר יודעים קצת חיבור וכפל. התברר שפיטר ויבגני לא יודעים מה זה כפל. הסברתי שזה חיבור
הרבה פעמים של אותו מספר, ונתתי דוגמה.

אבל הכי מעניין, המשכתי, זה לא סתם לחבר ולהכפיל מספרים, אלא להכיר כמה סודות שקשורים
לחיבור וכפל. ועכשיו אני אראה לכם אחד מהסודות האלה.

בחרנו שני תרגילים: $5+6+7$ ו- $2+8+6$. בכל אחד מהם, חישבנו את הסכום בשלוש דרכים שונות:
קודם בחרנו שני מספרים וחיברנו ביניהם, ואז הוספנו לסכום את המספר השלישי.
[הייתי צריך להתחיל מקומוטטיביות].

בכל פעם קיבלנו את אותו סכום. שאלתי את הילדים למה זה קורה, והאם זה קורה תמיד. הם ענו, בלי
שמץ של השתוממות, שזה קורה בגלל שאנחנו מחברים את אותם מספרים, ושזה קורה תמיד. אמרתי
שלושה מספרים גדולים מאד, אחד מהם בסדר גודל של מליונים, ושאלתי האם הם בטוחים שגם עבור
מספרים כל כך גדולים זה יעבוד. הילדים ענו שיכול להיות שעם מספרים כל כך גדולים זה כבר לא עובד.
אז איך אפשר להסביר את זה שהתוצאות זהות אצלנו כל פעם? פיטר שוב חזר על אותו טיעון: אנחנו
סוכמים את אותם מספרים, ולכן אנחנו עושים את אותו הדבר כל פעם.

— איך אותו דבר?! — התרעמתי. — תראה, פה אנחנו קודם מקבלים 11 ואז מוסיפים 7, ופה אנחנו
קודם מקבלים 13 ואז מוסיפים 5!

— אז מה? — ענה פיטר.

ואני כל כך רציתי שהם יתפלאו.

ניסיתי מכיוון אחר.

— מה יקרה, — שאלתי, — אם נעשה את אותן פעולות בסדר שונה? תמיד נקבל אותה תוצאה?

— כן, — ענה פיטר.

— אבל תראה, פיטר, — אמרתי, — נניח שאתה רוצה לשים גרביים, מגפיים וערדליים. אם קודם תלבש
גרביים ואז תנעל מגפיים ואז ערדליים אז הכל יהיה בסדר.

(הנהון.)

— ואם קודם תשים ערדליים, ואז מגפיים ואז גרביים?

כולם צוחקים, והילדים ממציאים עוד דרכים להתלבש לא לפי הסדר.

— אתם רואים, — אני אומר, — לפעמים חשובות לא רק הפעולות אלא גם הסדר שלהן.

[צריך להודות שהדוגמה לא כל כך הוגנת, היא מפרה קומוטטיביות ולא אסוציאטיביות. אבל
השתמשנו גם בקומוטטיביות של חיבור, כשחיברנו את המספר הראשון והאחרון, ואחר כך הוספנו את
האמצעי].

— אז למה זה עובד במקרה שלנו?

פיטר ענה שהוא יודע, אבל לא יודע איך להסביר.

— טוב, — עניתי, — אם אתם כל כך בטוחים שאפשר לחבר מספרים בכל סדר, אז תפתרו את החידה
הזו: צריך לחבר את כל המספרים האלה.

פרסתי על השולחן כרטיסים עם המספרים 1 עד 9, שבעקרון היו מיועדים לריבוע קסם 3×3 . אמרתי
שזו חידה מאד קשה, אבל אם הם יהיו מספיק מתוחכמים ויגלו אילו מספרים נוח לחבר ביניהם, היא
תהיה קלה.

למרות כל מה שעשינו עד עכשיו, הילדים ניסו לחשב לפי הסדר. בפועל, דימה חישב לבד; נטשה
דחפה את יבגני להצטרף מדי פעם, ופיטר רק צעק בהתחלה:

— זה יוצא מאה ! — ובזה הסתכמה ההשתתפות שלו בחישובים.
 סיימו; יצא 45. אמרתי להם כל הכבוד ושהם מחשבים מצוין, אבל שהם לא עשו שום דבר מתוחכם, ושברוך אחרת אפשר לחשב את זה הרבה יותר בקלות. דימה הציע לחבר מהסוף להתחלה (החל מה-9).
 — תנסה, — הצעתי, — נבדוק אם זה יותר פשוט. $9+8$ זה קל?
 — לא, — ענה דימה, אבל אז יבגני קטע אותו ואמר שאם מחשבים מהסוף אז יוצא יותר.
 — מאה, יוצא מאה ! — קרא פיטר בשמחה.
 (לאן נעלם הבטחון שלו שתמיד יוצא אותו דבר?). אז חישבנו שוב, הפעם מהסוף, שוב דימה עבד לבד, ושוב יצא 45.

בגלל שהילדים לא הצליחו לחשוב על שום דרך הגיונית, שאלתי אותם שאלה מכווניה:
 — את מי קל מאד לסכום עם 1? (מחילה ממי שריגורוזי ביחס לשפה, אני אוהב להאניש מספרים).
 דימה ענה, כמובן, שקל לסכום אותו עם כל המספרים. עניתי:
 — ואת 9?

התברר שהכי קל לסכום את 9 עם 1 — ולקבל את המספר הנוח 10, שאותו אפשר לשים בצד ולזכור. בשלב הזה הילדים ניחשו שבאותו אופן אפשר להניח בצד את $2+8$, $3+7$, $4+6$. קיבלנו ארבע עשיריות ועוד 5 אחד.

— נו, אז כמה זה יוצא סך הכל? — שאלתי.
 — מאה ! — צעק פיטר.

להפתעתי, לא רק לפיטר, אלא גם לדימה ויבגני לא היה ברור שארבע עשיריות ועוד 5 זה 45. אז נאלצתי להמשיך עוד קצת עם ההסברים והשאלות המכווניות. או שהם התעייפו או שהבעיה הייתה קשה מדי בשבילם, אין לי מושג. מעניין איך האנושות הסתדרה לפני שהמציאו את השימוש בבסיס. הם לא עבדו עם ספרות שמייצגות בנפרד עשרות ויחידות. יכול להיות שהאופי הפורמלי של הפעולות האלו לא הסתיר מהם את מהות המספרים? אני רק מנסה לדמיין.

בסוף הבטחתי להם שבפעם הבאה ננסה להרכיב מהספרות האלו ריבוע קסם, אבל עכשיו אני תוהה אם התרגיל הזה נגיש להם. כמה נסיונות שהילדים עשו במקום (בלי השתתפותי) מראים שכנראה שלא. בערב דימה ניגש אלי ושאל האם באמת תמיד יוצא אותו סכום כשמחברים בסדר שונה. אמרתי שתמיד. האם אני יודע את ההסבר? כן. אז למה לא אמרתי להם? כי רציתי שהם יחשבו בעצמם. וכשהם ינחשו, אני אגיד להם? כן.

מפגש 44. ריבוע קסם

שבת, 16 בינואר 1982. 11:20-12:20. דימה, פיטר ויבגני.

קצת קשה לתאר את המפגש הזה. התרגיל הראשון היה ליצור ריבוע קסם — וטוב שזה היה התרגיל הראשון, כי הוא התברר כקשה מאד ונמרח על פני שעה שלמה. כל המפגש ניסינו אפשרויות שונות וחיפשנו אסטרטגיות למציאת פתרון (אני נתתי רמזים והכוונות). בקווים כלליים, המפגש הלך כך.

(1) בהתחלה החלטנו לבחור את המספר שאמור להיות הסכום של כל שורה וכל עמודה. הילדים הציעו לבחור את המספר 5. במשך הרבה זמן הם ניסו להרכיב את הסכום 5, עד שהם הגיעו למסקנה שזה בלתי אפשרי. ביקשתי שיסבירו למה. בקושי רב ובמאמצים משותפים הצלחנו למצוא הסבר: אפילו שלושת המספרים הכי קטנים נותנים סכום גדול מ-5.

(2) אחר כך ניסינו את הסכומים 6, 8, 10, 12, 13, ללא הצלחה — בכל פעם נכשלו בהרכבת השורה השנייה או השלישית.

(3) הצעתי לחשוב איזה מספר כדאי לבחור כסכום. הזכרתי להם שבפעם הקודמת סכמנו את כל המספרים (הם נזכרו בעצמם שהסכום היה 45). אחר כך הם חילקו 45 ב-3 בניסוי וטעיה. לקח הרבה זמן.

(4) אחרי שמצאנו את הסכום המתאים לכל שורה ועמודה, התחלנו להרכיב את השורות כך שיצא בהן סכום של 15. גם כאן עבדנו בניסוי וטעיה, אבל בסוף הצלחנו. הילדים שמחו לגלות שבשורה האחרונה יצא מאליהם סכום של 15.

5) התחלנו להזיז מספרים בתוך השורות בנסיון להגיע לסכומים של 15 בעמודות, עד שהצלחנו.
 6) לבסוף, עברנו לאלכסונים. באלכסון אחד הסכום כבר היה 15, ובשני 6. ניסינו להחליף בין עמודות שלמות ובין שורות שלמות בנסיון להשיג סכום של 15 בשני האלכסונים, אבל לא הצלחנו, כך שנאלצנו להסתפק בפתרון לא מושלם:

5	9	1
7	2	6
3	4	8

אם הייתי משקיע בזה קצת יותר מחשבה מראש, הייתי מבין שבמשבצת המרכזית יכול להיות רק 5, ואז בהחלפה של זוג שורות אחד וזוג עמודות אחד היינו מגיעים לפתרון:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

למחרת סיפרתי לדימה למה במשבצת המרכזית חייב להיות המספר 5 (איור 70), וביחד הרכבנו ריבוע קסם אמיתי, אבל עם שאר הילדים עוד לא דיברתי על זה.

שכחתי לציין שבהתחלה הראיתי לילדים כרטיסי ניקוב²⁴, הסברתי להם מה זה ולמה זה משמש, ועניתי על שאלות.

כשחשבתי על הבעיה הזו אחרי המפגש, המצאתי חידה טובה למבוגרים: לבנות ריבוע קסם כפלי, כלומר ריבוע שיש בו מספרים טבעיים שונים, והמכפלות של כל השורות, כל העמודות ושני האלכסונים זהות. במקום שהמספרים בטבלה יהיו $1, 2, \dots, n^2$, כמו בריבועי קסם רגילים (בריבועי קסם כפליים זה לא אפשרי), אפשר לדרוש שהמכפלה תהיה מינימלית. ריבועי קסם כפליים "מינימליים" בגודל 4×4 ו- 3×3 מופיעים באיור 71.

עוד פתרון אחד לריבוע 3×3 (אדיטיבי): מחסרים 5 מכל מספר; במקום המספרים 9, 3, 2, 1 נקבל $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$, והסכום בכל השורות, העמודות והאלכסון יהיה 0. במשבצת האמצעית מציבים 0, ובכל שתי משבצות נגדיות מציבים שני מספרים נגדיים. מקבלים, למשל, את זה:

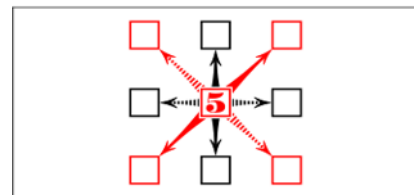
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

מעניין: במהלך החישובים דימה מניח שאם מגדילים כל אחד מהנסכמים ב-1, אז גם הסכום גדל ב-1.

1	42	105	10
30	35	14	3
70	15	6	7
21	2	5	210

3	4	18
36	6	1
2	9	12

איור 71. ריבועי קסם כפליים. מכפלת כל שורה, כל עמודה וכל אלכסון היא 44100 עבור הריבוע השמאלי ו-216 עבור הימני.



איור 70. אם מבינים שבמרכז הריבוע צריך להיות 5, התרגיל נהיה הרבה יותר קל: הסכום של כל שני מספרים שנמצאים אחד מול השני צריך להיות 10.

²⁴ הטכנולוגיה מתפתחת כל כך מהר שלפעמים אתה מרגיש פרה-היסטורי: הרי בצעירותי עוד עבדתי עם סרטי ניקוב! זה הלך ככה: אתה עובד במכשיר טלגרף, שמנקב חורים בסרט נייר ארוך; אם אחרי שעתיים של עבודה אתה עושה טעות אחת, אפשר לזרוק את כל הסרט שלך לפח. אחרי זה, כרטיסי ניקוב נחשבו לפלא טכנולוגי: במקום לזרוק לפח את כל הערימה, היה אפשר רק להחליף את הכרטיס עם הטעות. הייתה בעיה אחרת עם הכרטיסים האלה: אם אתה מפיל ערימה על הרצפה, לך תסדר אותה אחר כך... צריך מאמר שלם כדי לתאר את כל השלבים בסיפור הזה.

מפגש 45. שרשראות מוכללות

שבת, 23 בינואר 1982. 10-12: 20. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1.

הראיתי לילדים את ריבוע הקסם שבניתי אחרי המפגש הקודם, ודימה אמר שמסתבר שבאמצע חייב להיות המספר 5. פיטר התחיל לטייל עם האצבע לאורך השורות והעמודות, כשהוא ממלמל "חמש עשרה, חמש עשרה, חמש עשרה..." , אבל לא התפתח שום דיון, ולא רציתי להיות נודניק, אז עזבנו את זה.

תרגיל 2.

אחד מהתרגילים על $\binom{5}{2}$ המפורטים בפרק הקודם; לא אחזור עליו כאן.

בסיום העבודה הבטחתי לילדים שבפעם הבאה אתן להם תרגיל שנראה שונה מזה, אבל לאמיתו של דבר זהה לו, ושהם לא יצליחו לנחש את זה. דימה התרגש ושאל האם אגלה להם אחר כך. הרגעתי אותו והבטחתי לו שכן.

תרגיל 3. "שרשרת מוכללת".

על דף נייר מצוירים מספר עיגולים מחוברים בקווים. צריך להניח בתוך העיגולים צורות מהאוסף של דיינש כך שבכל שני עיגולים שמחוברים בקו יהיו צורות ששונות אחת מהשניה בפרמטר אחד בדיוק (בעיגולים שלא מחוברים בקו אפשר להניח מה שרוצים). הפעם הילדים קיבלו שתי משימות (איור 72). במשימה הראשונה, הצורות על הקרניים שונות מהצורה שבמרכז: שלוש שונות ממנה בצבע, שתיים בצורה, אחת בגודל ועוד אחת בנוכחות החור במרכז (סה"כ 7).

המשימה השניה קשה יותר. יש בה רק שני סוגים של פתרונות: כשבקודקודי המשולש יש לוחיות ששונות רק בצבע או רק בצורה. הילדים התחילו מזה שהניחו בשני קודקודים סמוכים צורות ששונות אחת מהשניה בגודל, ולכן במשך הרבה זמן לא הצליחו למצוא פתרון. בסוף הסברתי להם שבהצבה כזו הצורה השלישית לא יכולה להיות קטנה ולא יכולה להיות גדולה. הם החליפו אחת מהצורות באחרת, אבל בכזו ששונה מהשניה בפרמטר של החור. שוב התחילו חיפושים מייגעים אחר פתרון, ושוב נאלצתי להסביר להם שהצורה השלישית לא יכולה להיות עם חור ולא בלי חור.

לבסוף, דימה מצא פתרון, ואני הראיתי את הפתרון השני.

בזה סיימנו את המפגש, אבל הילדים לא רצו לעזוב את הצורות היפות, וביקשו רשות לפחות להחזיר אותן בעצמם לקופסה. הרשות ניתנה. פיטר צעק:

– אני רוצה להחזיר למקום את הריבועים!

– ואני את העיגולים! – הצטרף דימה.

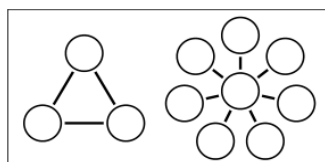
– ואני את הצורות הקטנות! – צעק יבגני.

ניצלתי את ההזדמנות להטיף להם מוסר מתמטי:

– אתה מבין, יבגני, שאם דימה יאסוף את העיגולים ואתה את הצורות הקטנות, אז לא ברור מי מכם יאסוף את העיגולים הקטנים.

עזבתי אותם, אבל אחר כך ניגשתי אליהם שוב ושאלתי אילו צורות הכי קשה לאסוף ואילו הכי קל, ומדוע. במהלך הדיון ציינתי שמשולש אפשר להניח רק בשלוש דרכים שונות (כך שהוא יתאים לחור של המשולשים), ריבוע – בארבע דרכים, ועיגול – באינסוף דרכים. דימה אמר שהכי קשה לשים את ה"מאחרים".

איור 72. מניחים בעיגולים לוחיות מהאוסף של דיינש; צורות שונות צריכות להיות שונות בפרמטר אחד בלבד.



היה למפגש הזה המשך לא מתוכנן. עוד לפני שהספקתי להחזיר למקום את הקופסה עם הצורות, ג'ני חזרה מטיוול וביקשה לשחק ב"זה". נתתי לה משימה בהתאם לגילה (היא בת שנתיים וחודש) – פיזרתי את הצורות במכסה של הקופסה והצעתי לה להחזיר אותן למקום. היא נרתמה למשימה בהתלהבות. השיעור מתמטיקה הלא מתוכנן הזה, לגיל שנתיים, נמשך מעל שעה; אספר עליו בהמשך (עמ' 170). מדהים אותי בכל פעם מחדש כמה זמן ילד יכול לעבוד כשהוא עושה את זה מיוזמתו.

מפגש 46. איזומורפיזם של חידות

שבת, 30 בינואר 1982. 11:00-11:45. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. איזומורפיזם של חידות.

מדובר שוב בסדרה של חידות שקשורות ל- $\binom{5}{2}$, אלא שהפעם אנחנו מסתכלים על כמה חידות ביחד ומבררים את הקשר והדמיון ביניהן.

תרגיל 2. המשך תרגיל 3 ממפגש 45.

אני אומר לילדים:

– ראיתם, יש חידות שנראות שונות, אבל באמת הן זהות. ויש גם חידות שעוזרות לפתור חידות אחרות. בואו ניזכר באחת החידות שהיו בפעם הקודמת; היא תעזור לנו לפתור את החידות של היום. אחרי ההקדמה הזו, אני מוציא את החידה עם המשולש (איור 72 משמאל). דימה מיד מניח על הדף את הפתרון עם הצבעים, ואז פיטר ויבגני מציעים עוד שני פתרונות שקולים. אני מזכיר להם את הפתרון הלא-איזומורפי עם שלוש הצורות. אחרי זה, אני נותן להם חידה חדשה: מעוין עם אלכסון (איור 73).

הילדים פתרו תוך רגע, אפילו לא הספקתי לשאול האם הם מבינים איך התרגיל הקודם עוזר לפתור את זה. הוצאתי עוד צורה – שני משולשים מחוברים, אחד בתוך השני (איור 74). הפעם הספקתי לשאול את השאלה, אבל לא קיבלתי תשובה, כי כולם כבר היו שקועים בפתרון החידה. נאלצתי לענות בעצמי:

– כי הצורה הזו מורכבת ממשולשים.

עד אז פיטר כבר מילא את המשולש הפנימי, וכשאמרתי את התשובה לשאלה של עצמי, תוך כדי שהצבעתי על הדף עם המשולש המקורי, שעליו עוד היו מונחות הצורות, דימה קרא:

– אהה! – והעביר את הצורות למשולש החיצוני.

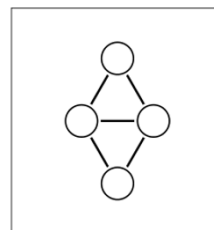
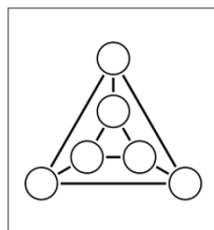
אבל זה לא נתן פתרון! כל משולש בפני עצמו מילא את התנאי, אבל הקשרים בין המשולש הגדול לקטן יצאו לא נכונים (היו הבדלים ביותר מפרמטר אחד). חשבנו על זה עוד קצת, דנו בזה עוד קצת, ופתרנו. סך הכל התרגיל הזה לקח חמש דקות.

תרגיל 3. ריבוע הקסם.

עד כה חלפו 35 דקות. אמרתי לילדים שהם עבדו נהדר ופתרו את כל התרגילים שלי, ולכן המפגש נגמר. אבל הם ביקשו עוד.

חשבתי קצת, ואמרתי שאני לא אתן להם היום יותר חידות, אלא אספר להם איזו שיטה פשוטה מצאתי לבנות ריבוע קסם – וסיפרתי על הדרך שמתוארת בסוף מפגש 44 (עמ' 83), כשממלאים את הריבוע בחמישיות ואז לכל שתי משבצות נגדיות מחברים מספרים נגדיים. את המחברים ל-5 כתבתי בצד ההפוך לכרטיסים עם המספרים. לא היו בעיות עם המספרים השליליים.

איור 73 (מימין) ואיור 74 (משמאל).
עוד שני גרפים עבור אותה משימה:
צורות שכנות צריכות להיות שונות
אחת מהשניה בפרמטר אחד בלבד.



מפגש 47. סוף הסיפור על (5/2)

שבת, 6 בפברואר 1982. 11:00-11:50. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. ריבועי אותיות.

סתם בשביל השעשוע, הראיתי לילדים שני "ריבועי קסם" מאותיות, שאפשר לקרוא במאונך ובמאוזן – איור 75.

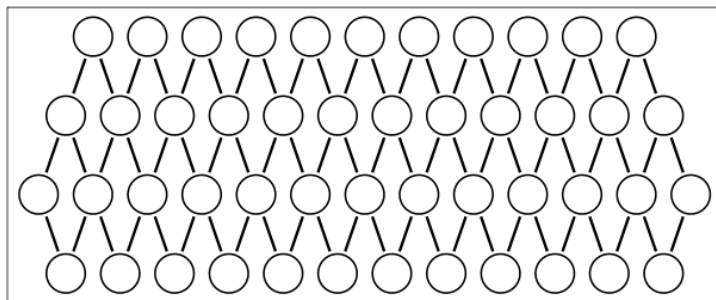
ק	ר	ס	מ	ה	ד	ל	י
ר	כ	ו	ס	ר	ו	ג	ל
ו	ב	כ	ר	י	ב	ו	ד
ב	ו	ר	ק	ה	ר	י	ס

איור 75. ריבועי קסם מילוליים.

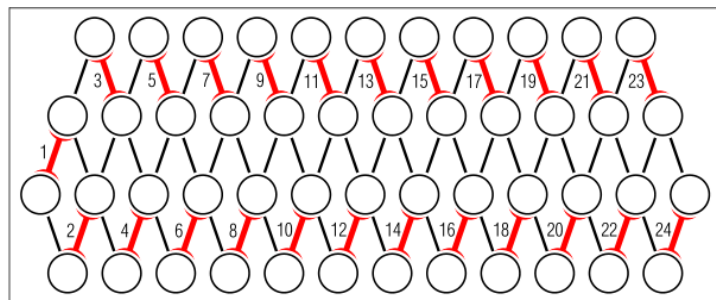
תרגיל 2. המשך תרגילים 3 ממפגש 45 ו-2 ממפגש 46.

– בפעם הקודמת פתרתם את החידות כל כך מהר שהפעם הכנתי לכם חידה קשה במיוחד. אם תצליחו לפתור גם אותה אז אני לא יודע מה אני אעשה. כנראה שאאלץ להכנע, – אמרתי והוצאתי, לקול תשואות הקהל, גרף שצויר על חמישה דפים מודבקים זה לזה, ושבקושי היה לו מקום על השולחן (איור 76). בהתחלה הילדים קצת נבהלו, אבל די מהר העניינים התחילו לזרום, והם פתרו את התרגיל די מהר. הם נתקעו פעמיים-שלוש, כשהם סטו מהפתרון הסיסטמתי וניסו להניח את הצורות לא בזוגות לפי הסדר שמתואר באיור 77 אלא בסדר אחר, ואז צצו קומבינציות שהביאו למבוי סתום. במקרים האלה הם בדרך כלל נזקקו לעזרתי. היו גם כמה מקרים שבהם מי שהיה תורו הניח צורה אחת במקום זוג, ואז התברר שהצורה השנייה כבר תפוסה. במקרים כאלה שאלתי איזו צורה צריך לשים שם, וכשהם ענו הראיתי שהיא כבר תפוסה. העזרה הזו הספיקה להם.

מעניין שבכל החידות בסדרה הזו, למרות כל העצות שלי, הילדים הפגינו חוסר יכולת מוחלט להשתמש בטריק הפשוט הבא: לשים בצד את הצורות הלא-מתאימות. הם החזירו אותן בכל פעם לערימה הכללית, ואחרי כמה נסיונות מצאו את עצמם חוזרים על אפשרויות שהם כבר בדקו ופסלו. מעניין גם שכשהיה צריך לשנות איזשהו פרמטר בודד, הילדים לרוב שינו או את הצבע או את החור. היה נדיר יותר שהם שינו את הגודל, ונדיר עוד יותר שאת הצורה.



איור 76. בגרף הזה יש 48 קדקודים – כמות זהה למספר הלווחיות באוסף של דיינש.



איור 77. הדרך הכי פשוטה לפתור את התרגיל הקודם היא לחלק את הצורות לזוגות ולהניח כל זוג בנפרד, לפי הקשתות המסומנות באדום, בסדר המתואר באיור. קל לראות שכל זוג (חוץ מהראשון) צריך להתאים רק לשתי צורות שכבר מונחות על הגרף.

תרגיל 3. $\binom{5}{2}$: הגרסה האחרונה – כדורים בקופסאות.

ר' בפרק 3.

תרגיל 4. הוכחה ש- $\binom{5}{2} = 10$.

גם על זה מסופר באותו מקום.

מפגש 48. טענות אמת ושקר

שבת, 20 בפברואר 1982. 11:20-12:20. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. טענות אמת ושקר.

התרגיל הזה דומה לאחד אחר שכבר הזכרתי לעיל, עם "הבנים והבנות עם ובלי המשקפיים" (ר' עמ' 32), עם שלושה הבדלים עיקריים: (1) הטענות הפעם התייחסו לא לילדים אלא ללוחיות מהאוסף של דיינש; (2) בתרגיל ההוא, הכנתי מראש כרטיסים עם ציורים, ואילו הפעם רציתי שהילדים יבחרו לוחיות בעצמם; (3) בפעם ההיא ניסחתי בעצמי את הטענות, והילדים היו צריכים להגיד האם הן נכונות או לא; הפעם תכנתי שהם גם ימציאו את הטענות בעצמם.

ובכן, המשימה היא כזו: אחד מהשחקנים מניח על השולחן מספר לוחיות מהאוסף של דיינש, ומנסח איזושהי טענה נכונה עבור הצורות האלו. השחקן הבא צריך לשנות את קבוצת הצורות כך שהטענה תהפוך ללא-נכונה, ואז לנסח טענה חדשה, נכונה, וכן הלאה לפי התור. חשבתם שזה אמור להיות משחק פשוט ואינטואיטיבי. בפועל, זה לא היה המצב.

בהתחלה הנחתי שתי צורות והצעתי לפיטר לנסח טענה נכונה לגביהן. הוא אמר:

– הן שונות בפרמטר אחד.

הוא צדק, הטענה הייתה נכונה, אבל היא הכניסה אותי למבוי סתום. כשהתווספה צורה שלישית ושאלתי מה המשמעות של הטענה הקודמת לגבי הקבוצה הזו (מי "הן" ששונות בפרמטר אחד?), פיטר הצביע על הצורות וענה בלי להתבלבל:

– אלו שונות באחד, וגם אלו באחד, ואלו בשניים.

זה לא השתפר. כמעט בכל פעם שהיה צריך לטעון טענה נכונה, הטיעון היה משהו בסגנון:

– יש פה ריבוע אחד גדול עם חור, ועוד שני עיגולים קטנים בלי חור – אחד צהוב ואחד ירוק, ומשולש גדול (שאר התכונות של המשולש כבר לא פורטו, כנראה נגמר להם הסוס).

כל זה היה נכון, אבל ממש לא מה שהתכוונתי. ניסיתי לשכנע אותם לנסח טענות פשוטות יותר, אבל זה לא עזר.

[למעשה, כנראה שטיעונים מהסוג הזה באמת פשוטים יותר עבורם, במובן שהם דורשים פחות מאמץ אינטלקטואלי. טיעונים כמו "כל הצורות הן בלי חור" הם קצרים יותר, אבל דורשים התבוננות, הכללה, בדיקה וכד'].

גם שינוי הקבוצה כך שהטענה הקודמת תהפוך ללא-נכונה לא הלך בקלות. מי שהיה תורו רצה בדרך כלל להחליף את כל הצורות בקבוצה בצורות אחרות, מה ששוב היה נכון לוגית, ו"פשוט יותר" פסיכולוגית, אבל לא מה שהתכוונתי. ולא היה לי מה לעשות לגבי זה.

[בפעם הבאה צריך לנסות להכניס סימונים לוגיים וסימונים של התכונות של הצורות האלו, ולדרג את הטענות לפי קושי].

כאילו שזה לא הספיק, לא הצלחתי להתאפק והכנסתי גם טענות על הקבוצה הריקה. למשל, כשלא הייתה אף צורה אדומה, אמרתי:

– בכל הצורות האדומות אין חור.

זה עורר דיונים סוערים. פעם, כשפתרנו תרגילים של "הבנים והבנות עם ובלי המשקפיים", היה נדמה לי שהם הבינו את המשמעות של טיעון מותנה. נראה שרצתי מהר מדי. לפחות בפעם ההיא כולם הנהנו, ועכשיו הם התווכחו איתי בלהט. כל הכבוד להם. באשר לי, הצלחתי לבלגן לגמרי את כל התרגיל הזה.

תרגיל 2. מספרים ראשוניים.

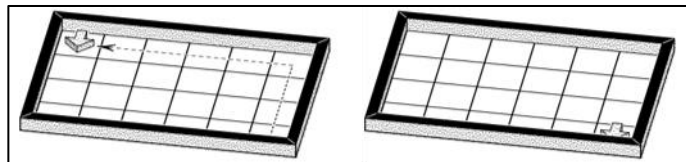
לקחנו כמורות שונות של קוביות (1, 2, 3, ..., 15), וניסינו להרכיב מהן מלבנים. כך קיבלנו פירוק לגורמים של כל המספרים האלה. מכמות ראשונית של קוביות היה אפשר להרכיב רק פסים ארוכים.

תכנות עם דימה

נרשם ב-8-1 למרץ, 1982.

אני משתדל לא לעשות עם דימה משימות שאנחנו פותרים בחוג, כדי לא לתת לו יתרון לא הוגן על שאר הילדים, מה עוד שגם בלי זה הוא קצת יותר מתקדם מהם. אבל הפעם הוא כל כך נדנד לי עם הבקשות שלו "לשחק ברובוט", שלא ממש הייתה לי ברירה. הוא הגדיר לעצמו את המשימה, על ידי נקודות ההתחלה והסיום של הרובוט (איור 78).

בתור נסיון ראשון, הוא פשוט חזר על התכנית שדנו בה בעמ' 78 (בלי הסיבוב בסוף). אבל אחרי שהוא הריץ אותה (בעצמו), הוא הסיר את חצי העיגול של "סוף", והוסיף עוד חלק לפתרון. התכנית הסופית מופיעה באיור 79.

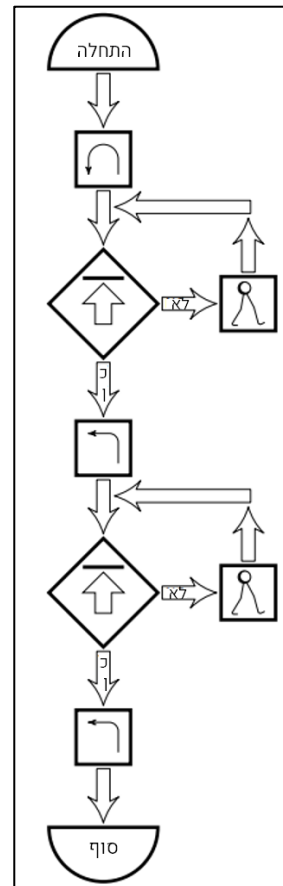


איור 78. משימה לרובוט: לעבור מהמצב שמימין לזה שמאל.

קדמו לה לא מעט נסיונות. בבסיסו של דבר, כל הטעויות היו גרסה כזו או אחרת של הטעות הבאה. אם היה צריך לבצע איזושהי פעולה, למשל "צעד", ובתנאים כבר הופיע האופרטור "צעד", דימה מתח אליו חץ. הוא לא הבין שאחרי שעוברים למקום שהוא בתנאים הזרימה, אז לא רק עושים צעד אלא ממשיכים לטייל בתנאים הזרימה החל מהמקום ההוא. ניסיתי להסביר לו את זה, אבל בפעם הבאה הוא עשה את אותו הדבר עם הכרטיס של הסיבוב או עם כרטיסים של בדיקת תנאי. קצת קשה להתמודד עם מצב כזה: הרי זה מהלך שאני לימדתי אותם, כשאמרתי להם שבמקום חמישה אופרטורים של "צעד" אפשר לחזור לאותו אחד. אז יוצא שלפעמים אפשר לעשות את זה ולפעמים לא, אבל לא ברור איך למתוח את הגבול בין שני המקרים.

סוג שני של טעות היה שדימה ניסה למתוח שני חצים מאופרטור (ולא מבדיקת תנאי). ניסיתי להסביר לו שאין משמעות לתכנית כזו, כי לא ברור לפי איזה חץ אמורים להמשיך, אבל הוא כנראה כבר התייאש מלפתור את התרגיל, כי בתגובה הוא רק התבכיין:

- נו, אבא! בוא נעשה ככה בכל זאת!
- אז לפי איזה חץ הוא יתקדם?
- לפי זה.
- וכשהוא יגיע לפינה?
- אז לפי השני.
- ואיך הוא ידע?
- אני אגיד לו...
- ואיך אתה תדע?
- אני אראה שיש מלפניו קיר.



איור 79. תכנית שמבצעת את המשימה שבאיור 78.

— אז למה שלא תעשה בדיקה האם יש מלפניו קיר?
 — אבל ראית שעשיתי חץ לשם (למעוין הראשון), וזה לא עבד!
 בשלב הזה לא התאפקתי ואמרתי לו שיוסיף עוד מעוין, ואז הוא הצליח לפתור.

לא העזתי לבקש כרטיסים חדשים בעצמי: היה נדמה לי שהכמות המוגבלת של הכרטיסים היא חלק ממגבלות השפה. הרי לא סתם אבא תמיד הציע למתוח חץ לכרטיס קיים, ולא להניח אחד חדש. — דימה.

חוץ ממה שכבר הזכרתי, עזרתי לו בשלושה דברים: ראשית, גזרתי חלקים שהיו חסרים לו; שנית, עזרתי לו לוודא שאין באגים (כלומר, שהרובוט עושה מה שמצופה ממנו); שלישית, סירבתי להריץ תכניות שגויות סינטקטית (למשל, כאלו שחסר בהן האופרטור "סוף").

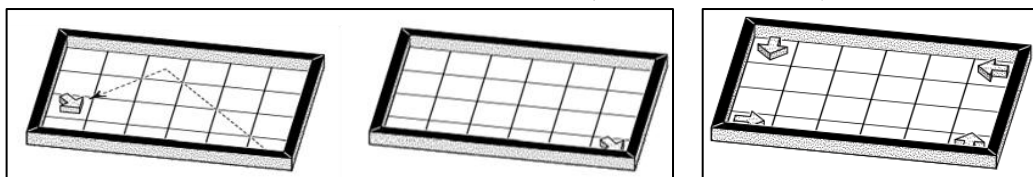
הערת שוליים.

כשרשמתי את הטקסט שלעיל, דימה, שעבר לידי, ראה את השרטוט של התכנית שלו והחליט להראות אותה לאלה. הוא לא רצה להראות את התרשים על הדף, אלא התעקש להרכיב אותו מהכרטיסים. כנראה שתכנית מצוירת על דף נראית לו "לא אמיתית". ניסיתי להוריד אותו מזה, אבל לא הצלחתי. חוץ מזה, הוא גילה טעות בגרסה שרשמתי, שבגללה היה צריך להוסיף בתחילת התכנית סיבוב ב- 180° , כך שנאלצתי להכניס בטקסט קצת תיקונים ומחיקות. (הגרסה שמובאת כאן היא המתוקנת).

אחרי זה דימה ניסה לבדוק מה קורה כשעובדים לפי אותה תכנית, אבל הרובוט פונה לכיוון ההפוך בנקודת ההתחלה. התברר שכתלות בכיוון ההתחלתי שלו, הרובוט יכול לסיים בכל אחת מארבע הפינות, והכיוון הסופי שלו תמיד יהיה זהה להתחלתי (איור 80).

לבסוף, דימה ניסה להריץ את אותה תכנית בעוד דרך שממש לא צפיתי: הוא הניח את הרובוט בזווית 45° , כשהוא פונה לפינה (ואחר כך גם בכיוון המאונך לזה). התנאי "יש מלפניך קיר" קיבל אינטרפרטציה די פשוטה: "אסור להתקדם קדימה בכיוון הזה". אחד מהמסלולים מוצג באיור 81.

בסוף הסברתי לדימה למה הכיוון המקורי תמיד נשמר: בגלל שתמיד עושים שלושה סיבובים — אחד של 180° ועוד שניים של 90° באותו כיוון — בלי תלות באף תנאי (בניגוד לצעדים, שאותם מבצעים או לא מבצעים כתלות בקיום התנאים). הוא הבין הכל וסיפר לאלה.



איור 81. הרצה של אותה תכנית בקונטקסט שלא התכוונו אליו.

איור 80. בנקודת ההתחלה, הרובוט עומד בפינה הימנית התחתונה. בהתאם לכיוון שלו, המיקום הסופי שלו יהיה אחד מהארבעה המתוארים באיור. הכיוון שלו יהיה זהה לכיוון ההתחלתי.

מפגש 49. תירוץ לחשוב על סימונים

שבת, 6 במרץ 1982. 10:10-11:10. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. טענות אמת ושקר (המשך).

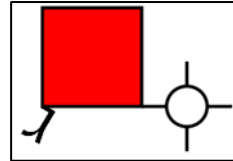
הפעם הגדרתי חוקים אחרים: הכנסתי למשחק את הכמתים \exists ו- \forall , וסימונים לפרמטרים השונים:

- (1) לצבעים: ארבעה כתמים צבעוניים חסרי צורה;
- (2) לצורות: \circ , \triangle , \square ;
- (3) לגודל: ג, ק (גדול וקטן);

²⁵ משמעות הסימון \exists היא "קיים"; משמעותו של \forall היא "לכל" או "כל".

(4) לנוכחותו או היעדרו של חור: \emptyset , $-$.

צריך להודות שהרעיון של הסימונים האלה לא ממש הובן. כלומר, כשעברנו לתרגיל עצמו, הילדים השתמשו בהם די בחופשיות, אבל במהלך "המצאת" הסימונים ניהלנו ויכוח די ארוך (במיוחד עם דימה, שהכי אהב להמציא גרסאות מקוריות) – הילדים הציעו סימונים משלהם. כמובן שזה דבר חיובי בסך הכל, הבעיה היא שכל הסימונים שהם הציעו היו, איך נאמר, "מורכבים", כלומר כל סימון כלל כמה תכונות ביחד (לפעמים אפילו את כל הארבע, כך שהוא תיאר צורה ספציפית; שאלתי למה לא פשוט לצייר את הצורה עצמה, אבל הרעיון הזה לא נשמע להם כל כך מטופש). אחד מהסימונים שדימה הציע מתואר באיור 82 – המשמעות שלו היא "ריבוע אדום גדול עם חור".



איור 82. סימון שכולל את כל התכונות. שימוש בסימונים כאלה מראה שעצם הרעיון של שימוש בסימונים עבור תכונות ולא עבור אובייקטים לא הובן.

ניסיתי לשכנע את דימה שסימון כזה הוא בעצם ארבעה סימונים, כי הוא מחליף ארבע מילים – ומה אם תרצה פשוט להגיד "אדום", בלי להגיד שזה ריבוע ויש בו חור? – שאלתי. בתגובה הוא המציא איזה סימון אחר באותו סגנון. ניסיתי להסביר לילדים את המשמעות של הכתם האדום: הנחתי את כל הצורות האדומות בערימה אחת, ואמרתי שצריך שיהיה סימון אחד לכולן. הם הגיבו בתמהון: איך אפשר לצייר ערימה כל כך גדולה?
[כל זה כנראה אומר שהילדים עוד לא מבחינים בין סימני היכר לבין הדבר עצמו; הרבה פסיכולוגים כותבים על זה. כשילדים רואים חפץ, הם כמובן יכולים להגיד שהוא אדום, אבל המושג "אדום", בלי חפצים אדומים, חסר משמעות קונקרטית עבורם, ולכן אינו דורש סימון מיוחד. סימון אמור להתייחס לא למשהו אבסטרקטי אלא למשהו קונקרטי, משהו שקיים במציאות. בפרק הבא (עמ' 99 ואילך) נדון בבעיה הזו ביתר פירוט. בינתיים נמשיך].
כל ילד ניסח טענות עבור מספר קבוצות של צורות, ורשמנו אותן תוך שימוש בסימונים ובכמתים. כל אחד קיבל נקודות לפי כמות הסימונים. בסוף היה אמור לנצח מי שצבר הכי מעט נקודות. (אקפוץ קדימה ואספר שכל הילדים צברו את אותו מספר נקודות – 13 נקודות על 6 טענות – ורק אני צברתי 12). נתנו ציון גם לשינוי קבוצת הצורות: כל תוספת של צורה וכל הסרה של צורה שוות נקודה.
בצורתו הנוכחית, הייתה למשחק הזה יותר משמעות, אבל עדיין היה קשה להגיד שהוא מספק. הבעיה העיקרית הייתה שכולם (חוץ ממני, כמובן) השתמשו רק בכמת 3. זה הכי קל – פשוט אומרים שקיים בקבוצה אובייקט מסויים. וגם קל להפוך טענה כזו ללא-נכונה: מסירים את האובייקט וזהו.
הבטחתי לילדים שבפעם הבאה שוב נשנה את ככלי המשחק: נשתמש רק בכמת $\sqrt{}$, ואפשר יהיה רק להוסיף צורות. אבל כשחשבתי על זה אחר כך, הבנתי שזה ידרוש שימוש גם בשאר האופרטורים הלוגיים²⁶: \neg , \wedge , \vee . מכרה שלנו, נ.ב., שגם היא מלמדת ילדים, אמרה שזה עובד אצלם יפה. ננסה. או ששוב אני רץ קדימה מהר מדי?

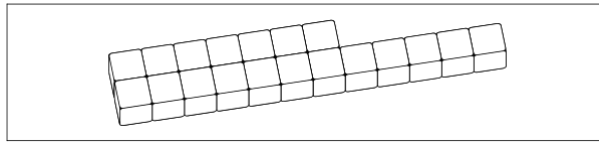
תרגיל 2. מספרים ראשוניים (המשך).

הכנתי טבלה גדולה עם המספרים 1 עד 28. ליד כל מספר היה מקום לרשום את הגורמים שלו, ומקום נפרד למסקנות. במפגש הזה הספקנו לבחון ארבעה מספרים: 16, 17, 18, 19. יש לי תחושה שהילדים לא ממש מבינים את העניין. למשל, פיטר סידר 19 קוביות בשתי שורות כמו שמתואר באיור 83, ואמר: – אי אפשר.

תיקנתי את הסידור שלו על-ידי הארכת השורה הקצרה על חשבון הארוכה, והוא הגיב בשלווה: – אמרתי לך שאי אפשר.

²⁶ משמעותם, משמאל לימין: וגם, או, לא, גורר (אם-אז).

איור 83. נסיון לסדר 19 קוביות במלבן.



יש נקודה שאני טועה בה, ואני יודע את זה, אבל לא מצליח לתקן. משום מה ממש מפריע לי כשהם לא עובדים בצורה סיסטמתית. למשל כאן, צריך למצוא את הגורמים הראשוניים של 19, כלומר לבנות מלבן מ-19 קוביות. היה אפשר לחשוב שזה פשוט: קודם צריך לנסות לסדר אותם בשתי שורות, אחר כך בשלוש, אחר כך בארבע וכן הלאה. במקום זה, פיטר קודם מנסה שלוש שורות, אחר כך שתיים, אבל לא מביא את זה לכדי סיום, אלא מנסה לבנות מגדל עם כמה קומות, אחר כך מיישבו מפרק אותו בטעות, ואז הוא חוזר לנסות שלוש שורות, וכן הלאה. אני שואל:

– פיטר, לא ניסית כבר שלוש שורות?

– ניסיתי.

– אז למה אתה עושה את זה שוב?

– אני רוצה לבדוק עוד פעם.

לא הצלחתי להתאפק ושאלתי בסרקסטיות:

– וואלה, אולי באמת אם נמקם את הקוביות אחרת זה יכול לעבוד?

ודימה ענה:

– אבא! כבר למדנו על זה! – מה שהפתיע אותי, כי עסקנו בזה במפגש הראשון, לפני שנתיים בדיוק. סיפרתי להם את הבריחה החביבה עלי, על זה ש-5 ועוד 5 זה 10 כשסופרים בשתי הידיים, ו-9 כשסופרים רק באחת – הדגמתי להם איך אני סופר את האצבעות על יד אחת מהאגודל לזרת ובחזרה. אבל הם הבינו. המספר 19 נשאר לא בדוק – הרי לא ניסינו את כל הדרכים לפרק אותו, וגם את הדרכים שניסינו כבר הספקנו לשכוח.

דווקא היה הגיון בנסיונות של פיטר לסדר 19 קוביות ב-3 שורות. עוד כשדנו במספר 17, דימה אמר ששום פירוק לא יעבוד, כי 17 אי-זוגי, ופיטר ענה:

– אז מה? עם 9 הצלחנו! – והראה לו את הפירוק $9=3*3$.

אחרי כך, כשהגיע תורו לנסות לפרק את 19, דימה טען שזוהי לא יעבוד, ופיטר שוב ענה:

– יעבוד, יעבוד! תשע עבד – אז גם 19 יעבוד!

כנראה שלכן הוא התחיל את נסיונות הפירוק מ-3 שורות, אבל לא חשבתי על זה בזמן אמת. אפילו בסוף, כשכבר סיימנו עם המספר 19, הוא קרא בהתרגשות:

– אבל איך יכול להיות? את 9 הצלחנו, ואת 19 לא!

הייתי צריך לחזק את הנטייה שלו לאנלוגיות, אבל שמת לי לב אליה רק בדיעבד, כששחזרתי את המפגש.

[הבעיה עצמה – איך ללמד אותם לעבוד בשיטתיות – נותרת בעינה, ונראה לי שהיא חשובה מאד. זה גם הרגל חשוב מצד עצמו, וגם, כמו שראינו, זו דרך להוכיח דברים. אין לי שום רעיונות בקשר לזה. אלה חושבת שיש פתרון פשוט מאד לבעיה הזו: צריך פשוט לחכות חמש שנים].

בסך הכל, המפגש עבר באווירה קצת עצבנית, כי הילדים כל הזמן רבו והתווכחו מי יהיה ראשון. כמעט שלישי מהמפגש התבזבז על להפריד ביניהם, להושיב אותם במקומות אחרים, ליישב קונפליקטים וכו'. היה אפילו רגע שכל כך כעסתי שרציתי לקטוע את המפגש.

מפגש 50. מפגש היובל

ראשון, 21 במרץ 1982. 17:00-18:00. דימה, פיטר ויבגני.

במפגש הזה אנחנו חוגגים שני דברים: ראשית, זה המפגש ה-50, ושנית, ב-23 במרץ החוג שלנו חוגג שנתיים. סיפרתי את זה לילדים, אבל הם לא התרשמו. הסיבה העיקרית היא שאני לא טוב בלייצר אווירה חגיגית – לא יודע לעשות מחוות תיאטרליות ולדבר בטון חגיגי. הסיבה השניה היא שבשביל שתהיה

תחושה חגיגית צריך לדעת מראש שחוגגים משהו ולצפות לו, ואני משום-מה הסתרתי את זה מהילדים, קיוויתי שזו תהיה "הפתעה" בשבילם.

(בעקרון אנחנו נפגשים פעם בשבוע. בפועל, כמו שקל לספור, זה יוצא בממוצע פעם בשבועיים – לפעמים יש חופשים, לפעמים מחלות, לפעמים עוד כל מיני דברים. למעשה, זה קצב הגיוני. אצל סטודנטים בצרפת, למשל, שנת לימודים מורכבת משני סמסטרים שבכל אחד מהם 12 שבועות, כלומר כמעט כמו בחוג שלנו. אם כי לסטודנטים יש גם תקופות מבחנים, ולנו לא). המפגש היה למעשה הקראה של הסיפור "איך לנצח מכשפה", מאת יז'י צבירקו-גודיצקי. על הדרך פתרנו את כל החידות בסיפור, וגם הכרנו את הסימונים \wedge, \vee, \sim (משמעותו של הסימון האחרון היא שלילה; סימון נפוץ יותר הוא \neg) – נשתמש בהם בפעם הבאה במשחק עם טענות האמת והשקר. בסוף המפגש נתתי לכל אחד מהילדים שוקולד ופנקס במתנה (דימה ופיטר רצו את אותו פנקס, כך שנאלצנו להטיל מטבע; דימה ניצח).

מפגש 51. איזה שביל ארוך יותר?

ראשון, 28 במרץ 1982. 17:00-18:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שבילים ממקלות.

מדובר בחידה של אלינה שמינסקי, מתלמידותיו של פיאז'ה. יש שתי קבוצות של מקלות: ארוכים וקצרים. היחס בין הארוכים הוא 5:7. לצורך הנוחות, כל המקלות הארוכים אדומים, וכל הקצרים ירוקים. הכנתי אותם מהבדידים שבערכת המתמטיקה לכיתה א'.

אני בונה שביל מזוגזג ממקלות ארוכים (איור 84), ומבקש מהילדים להרכיב שביל באותו אורך ממקלות קצרים. להפתעתי, אף אחד מהילדים לא ניסה להצמיד את השביל שלו לשלי בניסיון להשוות אורכים. כולם בנו את השבילים שלהם בצידי השולחן, כשהם מנסים לחקות את צורת השביל שלי. הכישורים האמנותיים שלהם עוד לא לגמרי מפותחים, כך שכולם קיבלו נחשושים מפותלים שאפילו לא מזכירים את השביל שלי. אף אחד לא ניסה לנמק למה הארוכים זהים. מדי פעם אחד הילדים התלבט אם להוסיף לשביל שלו מקל או לא.

היה צריך לרונן בזה איכשהו, אבל לא ידעתי מאיפה להתחיל. כשמקבלים פתרון שהוא לא שגוי אלא פשוט חסר פשר, נכנסים למבוי סתום, וזה פחות או יותר היה המצב באותו רגע. אז פשוט הגדרתי תנאי חדש: כל השבילים הירוקים צריכים להיות ישרים.

הם התחילו לבנות מחדש, אבל גם הפעם אף אחד לא בנה את השביל שלו מתחת לשלי. לא התאפקתי ושאלתי:

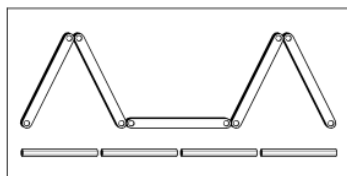
– ככה זה טוב? – ובניתי שביל ירוק מארבעה מקלות קצרים מתחת לשביל האדום, כך שהקצוות היו באותו מרחק בשני השבילים (איור 85).

דימה ענה שכן. יבגני אמר:

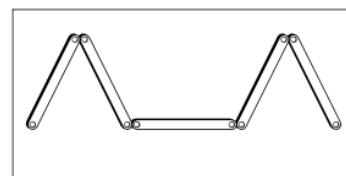
– לא, צריך חמישה מקלות, – יישר את השביל המזוגזג שלי והתחיל לבנות לידו שביל ממקלות ירוקים.

עוד לפני שהוא סיים פיטר צעק:

– הם קצרים!



איור 85. האם השבילים האלה באותו אורך? (אורכם של חמישה מקלות ארוכים זהה לאורכם של שבעה מקלות קצרים).



איור 84. המשימה: להרכיב שביל באותו אורך, אבל ממקלות קצרים יותר.

ואכן, חמישה מקלות לא הספיקו; יבגני התלבט קצת ואז הוסיף עוד שני מקלות, כך שהיו סך הכל שבעה, והשבילים היו באותו אורך.

ואז דימה אמר בסרקסטיות, תוך כדי שהוא מחזיר את השביל האדום לצורתו המקורית:

– כן! בטח! אותו אורך! הנה, תראו! אותו אורך!

כשהוא סיים לסדר את השביל, נאלצנו סוף סוף להתמודד עם העובדה שמצד אחד בלט מקל ירוק אחד "מיותר", ומהצד השני אפילו שניים.

– אז מה? – אמר יבגני, אבל בכל זאת התפשר והוריד אחד מהמקלות הכולטים.

שאלתי את דימה מה הוא חושב על זה. בתגובה הוא השאיר, כמו קודם, ארבעה מקלות.

הצעתי לילדים להרכיב שביל ירוק באותו אורך כמו השביל האדום, אבל על שולחן אחר. הם התחילו לדון. אני חיזקתי קלות את הדעה שהכי השתלמה לי – מישהו מהילדים אמר:

– יש חמישה.

שאלתי בקול:

– כמה יש?

ואז כולם הרכיבו שביל מחמישה מקלות. עם זאת, פיטר הכריז:

– אבל הם קצרים!

כולם הסכימו איתו שהשביל שהתקבל קצר יותר מהמקורי.

סוף סוף קיבלתי את ההזדמנות שחיפשתי. אמרתי:

– ועכשיו תראו מה קורה. השביל הזה באותו אורך, ויש בו ארבעה מקלות, והשביל הזה קצר יותר, ויש בו חמישה מקלות. סימן שחמישה מקלות קצרים יותר מארבעה.

– אוי ואבוי, – הגיב דימה בהלם.

הצעתי לילדים לנסות לפתור את הסתירה, אבל אף אחד לא הצליח לחשוב על שום כיוון חדש. אז פשוט שאלתי כל אחד לדעתו הסופית. דימה אמר שלדעתו הפתרון עם ארבעת המקלות הוא הנכון. פיטר אמר שלדעתו שני הפתרונות נכונים – גם זה עם ארבעת המקלות וגם זה עם חמשת המקלות.

(זה מאד אופייני לו. הוא תמיד חד כשמתחילים לפתור חידה, אבל לקראת הסוף הוא יכול להגיד כל דבר – אולי מהעייפות, אולי מחוסר עניין. שאלתי אותו:

– אז שבילים מחמישה מקלות ומארבעה מקלות הם באותו אורך?

אין תגובה.

– אבל הרי אמרת שהשביל הזה קצר יותר, ועכשיו אתה אומר שזה הפתרון הנכון... עדיין אין תגובה.)

לבסוף, יבגני אמר שלדעתו הפתרון הנכון הוא זה עם 7 המקלות.

אני לא נכנס לזה.

[הייתי צריך לעשות עוד תרגיל: להזיז את המקלות של השביל מחמשת המקלות הארוכים כך שהמרחק בין הקצוות שלו יהיה 1, 2, 3, ואז 0 מקלות קצרים. כמו שפעם הזזתי את המטבעות והכפתורים, כשבהדרגה אני מביא את המצב לכדי אבסורד.]

תרגיל 2. שוב טענות אמת ושקר (המשך תרגיל 1 ממפגש 49).

הפעם כל הטיעונים היו צריכים להתחיל בכמת \forall , ומותר היה רק להוסיף צורות, אחת בכל פעם. היה מותר להשתמש בסימונים \sim, \wedge, \vee שהילדים הכירו מהסיפור על המכשפה (ר' במפגש הקודם). די מהר הילדים ניסחו טאוטולוגיה: הטיעון היה נכון, אבל אי אפשר היה להפוך אותו ללא-נכון בצעד הבא. (אני לא זוכר מה בדיוק היה הטיעון, אבל משהו בסגנון "כל הצורות הן או קטנות או גדולות"). דיברנו על המצב שנוצר וסיכמנו שנשתדל לא ליצור טאוטולוגיות.

כמו שציפיתי, הילדים התבלבלו הרבה בין "וגם" ל"או". כשבקבוצה הייתה צורה אחת אדומה ואחת ירוקה, הם אמרו: "כולם ירוקים ואדומים". ניסיתי להסביר להם שהטיעון צריך להיות נכון לכל צורה בנפרד (בפרט, אין צורות "ירוקות ואדומות"). כמובן שזה לא ממש עזר. פיטר, למשל, חזר על הטעות הזו בכל פעם שהגיע תורו, למרות שהסברתי לו בכל פעם מחדש.

ככל שהתרגיל התקדם הוא נהיה קשה יותר ויותר. באיזשהו שלב עברנו לשחק כך שרק אני המצאתי טענות, והילדים היו צריכים רק להפוך אותן ללא-נכונות. המשכנו לשחק ככה די הרבה זמן. מדי פעם הילדים הציעו לי טענות נכונות, אבל לרוב אלו היו טאוטולוגיות.

מפגש 52. פענוח צופן

שבת, 3 באפריל 1982. 11:00-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. צופן.

הסברתי לילדים מה זה צופן ולמה משתמשים בצפנים (בשביל להעביר מסרים סודיים). אחר כך אמרתי שמי שממש חכם יכול לקרוא מכתב אפילו בלי להכיר את הצופן.

– איך?

– תכף תראו.

בדקנו כמה אותיות יש בא"ב (22), וכמה ספרות יש (10). אמרתי להם שלקחתי 10 אותיות והחלפתי כל אחת מהן בספרה; הסברתי גם למה אני לא יכול להחליף את כל האותיות בספרות. – ובכן, – אמרתי, – יש לנו ארבע מילים שכתובות ככה, כשמחליפים כל אות בספרה: 7575, 4321, 7625, 20982. חוץ מזה, אנחנו יודעים מה המילים: דימה, יבגני, פיטר, פרפר (הצגתי להם את המילים ואת המילים המוצפנות בסדר שונה); אנחנו רק לא יודעים מהי כל מילה. צריך לפענח הכל, זאת אומרת, לגלות מהי כל מילה, ואיזו אות מחליפה כל ספרה.

בהתחלה, כמו שציפיתי, הילדים (ליתר דיוק, פיטר) לא חשבו לרגע ופשוט הצמידו מילים לסדרות מספרים באופן אקראי. אמרתי:

– בואו נבדוק, – והתחלנו לבדוק האם כל ההתאמות עקביות. אבל ברגע שהתחלנו, פיטר אמר:

– הנה פרפר! – והצביע על המילה 7575.

ביקשתי שיסביר. הוא קצת הסתבך, אבל בסופו של דבר אמר שהמילה הזו, כמו המילה פרפר, מורכבת משני חצאים זהים. ניסחתי מחדש את ההסבר שלו באופן ברור יותר. ואז פיטר אמר:

– והנה פיטר, – והצביע על 7625.

– למה?

– כי זה מתחיל ב-פ' ונגמר ב-ר'.

בשלב הזה גם האחרים התערבו:

– זה יבגני.

– למה?

– יש בזה חמש אותיות.

כך פוענח כל הצופן: ד – 1, י – 2, מ – 3, ה – 4, פ – 5, ט – 6, ו – 7, ב – 8, ג – 9, נ – 0. לסיום, כתבתי לילדים את המשפט הבא: 20982, 7625, 4321 – 327140! (דימה, פיטר, יבגני – נהדרים!).

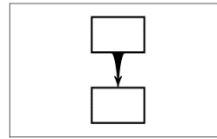
היה להם קצת קשה, אבל בסוף הם הצליחו לקרוא אותו.

תרגיל 2. עצי משפחה²⁷.

תכננתי לתת לילדים אילן יוחסין די מסובך עם 12 ריבועים, ובנוסף 12 כרטיסים עם שמות פרטיים ואמצעיים שצריך למקם בריבועים האלה, בהתבסס על השמות האמצעיים (שמעונוביץ' – הבן של שמעון). אבל קודם נתתי להם תרגיל לחימום: יש רק שני ריבועים (אב ובן), כמו באיור 86; לאחד מהם קוראים ראובן שמעונוביץ', ולשני שמעון יששכרוביץ'; צריך להגיד מי הבן של מי.

²⁷ החלק הזה דורש הסבר מקדים. ברוסית, השם האמצעי של אדם נגזר משם אביו, בתוספת הסיומת "וביץ'" או "יבץ'". למשל, ראובן לוי, שלאביו קוראים שמעון, יקרא ראובן שמעונוביץ' לוי. לנשים, התוספת היא "ובנה" או "יבנה", למשל: דינה שמעונובנה לוי. אם לשפוט לפי המידה שבה ילדי החוג התקשו בתרגיל הזה, נראה שאפשר היה גם להמציא אותו עבור שפות אחרות, כמעייין צופן... – ר.פ.

איור 86. אילן יוחסין: למעלה האב ולמטה הבן.
לאחד מהם קוראים ראובן שמענוביץ, ולשני
שמעון יששכרוביץ. מי האב ומי הבן?



הילדים הניחו שרירותית את ראובן שמענוביץ' במשבצת של האב, ואת שמעון יששכרוביץ' במשבצת של הבן. ניסיתי להראות להם את הטעות: אבא של שמעון הוא יששכר. לחרדתי, אף אחד לא ראה את הסתירה.

התברר שלאף אחד מהם אין שמץ של מושג איך נגזרים שמות אמצעיים. דימה ויבגני בכלל לא ידעו מה השמות האמצעיים שלהם. פיטר ידע שקוראים לו פיטר ויטלייביץ', אבל לא ידע למה. בזמן שנותר הסברתי לילדים איך נגזרים השמות האמצעיים, מה זה שם מלא וחלקי, וכו'. לתרגיל עצמו לא הגענו.

פגוש 53. אילן יוחסין

שבת, 10 באפריל 1982. 11:00-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלה מילולית.

יש תרנגולת ששוקלת שני קילו ("וואו!"); "מטורף!". יש שתי שאלות לגביה:

(א) כמה היא תשקול אם היא תעמוד על רגל אחת?
(ב) אם היא תעמוד עם רגל אחת על משקל אחד ועם רגל שניה על משקל שני, כמה יראה כל משקל?
דנו בכל שאלה בנפרד: קודם כולם ענו על השאלה הראשונה, דיברנו עליה, ואז המשכנו לשאלה השניה. בסוף הדעות התחלקו כך:

יבגני: (א) קילו אחד; (ב) קילו + קילו.

דימה: (א) שני קילו; (ב) שני קילו + שני קילו.

פיטר: הוא שינה את דעתו כמה וכמה פעמים, אז אני לא זוכר מה הוא החליט בסוף. אני זוכר שכשדיברנו על שני המשקלים הוא אמר קילו + שני קילו: המשקל שעליו יש רגל אחת יראה קילו והמשקל שעליו נשארו שתי הרגליים יראה שני קילו.

בסעיף (א), שאלתי את יבגני:

– אז קילו אחד נשאר תלוי באוויר?

בסעיף (ב), שאלתי את דימה:

– אז קודם היא שקלה שני קילו ועכשיו ארבעה?

שניהם ענו בחיוב. (אם כי אחרי יומיים דימה ניגש אלי במטבח ואמר שהוא המציא פתרון אחר לתרגיל עם התרנגולת – ואמר את הפתרון של יבגני: (א) קילו אחד; (ב) קילו + קילו).

לסיכום התרגיל אמרתי להם את מוסר ההשכל הבא:

– במפגש הלפני קודם, כשפתרתם את התרגיל עם השבילים, אחד מכם פתר אותו נכון, והשניים האחרים לא.

דימה קטע אותי:

– אני חושב שאני פתרתי נכון.

המשכתי:

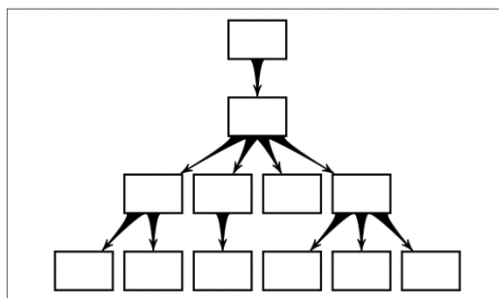
– כמובן שכל אחד מכם חושב שהוא פתר נכון. הרי אם היית חושב, דימה, שהפתרון שלך לא נכון, אז לא היית אומר לנו אותו, אלא היית מנסה למצוא פתרון אחר, שיהיה נכון. אז כל אחד מכם חושב שהוא צודק. אבל מצד שני, הצעתם שלושה פתרונות שונים, כך שלא ייתכן ששלושתם נכונים. ובכן, רק אחד מכם פתר נכון; אבל אני לא אגיד לכם מי. כי חשוב לי לא שתדעו את התשובה הנכונה, אלא שתלמדו לחשוב בעצמכם. אז ככה גם היום: אחד מכם ענה נכון על השאלה הראשונה, ואחד מכם ענה נכון על השאלה השניה, אבל אני לא אגיד לכם מי ענה נכון על איזו שאלה.

למען הסדר הטוב, הילדים התבכיינו ונדנדרו קצת שאגלה להם, אבל לא התעקשו יותר מדי.

תרגיל 2. אילן יוחסין (המשך).

התרגיל הזה שאול מאולימפיאדות בבלשנות. על דף נייר מצויר אילן יוחסין (איור 87). ראשית, שאלתי שאלות מילוליות. איפה אבא של האיש הזה? איפה סבא שלו? מי האיש הזה בשביל האיש הזה? (סבא רבא). כמה בנים יש לאיש הזה? כמה נכדים? תראו לי למי אין ילדים (ליתר דיוק, בנים)? הסברתי להם מה זה דוד ואחיין ושאלתי כמה שאלות לגבי זה. אחר כך נתתי להם 12 כרטיסים, עם השמות הבאים: אלכסנדר פטרוביץ', בוריס פטרוביץ', וסילי בוריסוביץ', ויקטור פטרוביץ', גנדי בוריסוביץ', דמיטרי אלכסנדרוביץ', יבגני אלכסנדרוביץ', איוון סרגייביץ', ניקולאי סטפנוביץ', אולג בוריסוביץ', פיטר איוונוביץ', סטפן פטרוביץ'. אחרי אינספור נסיונות ותיקונים, כולם היו ממוקמים במשבצות המתאימות. הייתי צריך לעודד אותם להמשיך לחפש, כי כל פעם שהם נתקעו, הם ויתרו בשוויון נפש, שלא לומר בעצלנות. דימה עדיין התבלבל: המילה השניה (השם האמצעי) כל הזמן גזלה את תשומת הלב שלו מהשם הפרטי עצמו: בזוג "סטפן פטרוביץ'" ו"ניקולאי סטפנוביץ'", למשל, היה קשה לו להתאים את המילה הראשונה לרביעית, כי שתי המילים האמצעיות הסיטו את תשומת הלב שלו. בפועל, פיטר היה היחיד שפתר את התרגיל. אחר כך שאלתי עוד כמה שאלות מילוליות, באותו סגנון כמו קודם, אבל הפעם עם שמות, למשל: כמה אחיינים יש לאלכסנדר פטרוביץ'? איך קוראים לסבא של גנדי בוריסוביץ'? פיטר שוב ענה יותר טוב מהאחרים: הוא קורא טוב ולכן מצא את השמות הדרושים מהר יותר מדימה ומיבגני.

איור 87. אילן יוחסין.



תרגיל 3. מספרים ראשוניים (המשך תרגיל 2 ממפגש 49).

הפעם עבדנו על המספרים 21, 22, 23, 24, 25.

מפגש 54. סוף שנת הלימודים

שבת, 1 במאי 1982. 11:00-12:00. דימה, פיטר ויבגני.

המפגש התקיים ב-1 במאי, ואני מתעד אותו רק ב-18 באוקטובר; לא מצאתי את הזמן עד עכשיו. כמובן שהספקתי לשכוח חלק גדול מהפרטים, כך שהתיעוד הוא במידה רבה סכמטי. הצהרתי בתחילת המפגש שזה המפגש האחרון לשנת הלימודים הזו, ודימה הגיב:

— אה, אז שוב מחלקים תעודות!

תרגיל 1. קסמים עם מספרים.

זה משחק שמצליח להרשים אפילו מבוגרים, אם הם לא ממש חזקים בחשבון. המבנה הבסיסי הוא כזה: "תחשוב על מספר; תוסיף 2; תפחית את המספר שחשבת עליו; קיבלת 2". כמובן שאפשר לשכלל את זה כמה שרוצים: "תחשוב על מספר; תוסיף 2; תוסיף את המספר שחשבת עליו; תחלק ב-2; תפחית את המספר שחשבת עליו; קיבלת 1". צריך שהמשתתפים ישלטו בפעולות חשבוניות, ובמקרה שלנו זה לא ממש היה המצב, ולכן הקסם לא תמיד עבד. דימה היה היחיד שחישב הכל נכון. יבגני התבלבל לגמרי ופשוט אמר שהוא לא יודע.

אז נתתי לו את הגרסה הכי פשוטה של הקסם, זו שהצגתי לעיל. הוא הסתדר איתה, ודימה ניחש את העקרון שבבסיס הקסם ואמר:

— אה, הבנתי למה יוצא שתיים... — והסביר.

תרגיל 2. חזק את המילה.

המשחק הבלשני הזה תואם בדיוק לאחת הפונקציות (או הטרנספורמציות?) שמשמשים בהן בבית הספר של מלצ'וק, גלדקי ואפרסיין לצורך תיאור פורמלי של סמנטיקה – הפונקציה Magn. נתונה מילה, וצריך להתאים לה מילה עם אותה משמעות, אבל חזקה יותר. למשל, המורה אומר "גשם", והתלמיד עונה "מבול". הנה הדוגמאות שהשתמשי בהן: רוח – סערה, קור – כפור, חום – חמסין, חדר – אולם, משעשע – מצחיק, רחוב – שדרה, פחד – אימה, חכם – גאון, גדול – ענק. באופן כללי, נראה לי שמשחקים סמנטיים כאלה, שבהם באים לידי ביטוי יחסים בין המילים (ולא יחסים בין מילים לחפצים), הם משחקים שמפתחים חשיבה. לצערי, לא המצאתי בינתיים שום דבר מעניין בנושא הזה, חוץ מהיפוך טריוויאלי של המשחק הזה – החלש את המילה: רטוב – לח, רחוב – סמטה, צחוק – גיחוך וכד'.

תרגיל 3. מספרים ראשוניים – סיום.

הפעם השלמנו את הטבלה עם המספרים הראשוניים והפריקים – בחנו את המספרים 26, 27, 28. אחרי זה "הסקנו מסקנות" בעמודה הימנית: ליד כל מספר ראשוני רשמנו "ראשוני", ליד כל מספר ריבועי ציירנו ריבוע (בשבילנו המשמעות של זה לא הייתה פורמלית אלא מוחשית לחלוטין – הרי הרכבנו ריבועים מהמספרים האלה), וליד כל מספר שהוא חזקה שלישית ציירנו קוביה.

תרגיל 4. ציונים.

כל אחד קיבל דף שמחולק על ידי קווים ישרים למשבצות בצורות וגדלים שונים. בכל משבצת היה מספר. היה צריך לצבוע את המשבצות עם המספרים הראשוניים. היה מותר להיעזר בטבלה. – אה, אני יודע, – אמר דימה, – נקבל חמש. ואכן, אחרי צביעה של המשבצות המתאימות, על הדף הופיעה בגדול הספרה חמש.

סיום: תעודות.

הודעתי שכל אחד מקבל ציון 5 על השנה החולפת, וגם תעודה על סיום השנה השניה, ומתנה. המתנה הייתה זהה לכולם: משחק ה-15. בתעודה היה כתוב: "תעודה של החוג למתמטיקה. תעודה זו מוענקת לדימה זבונקיין על כך שבמשך שנתיים הוא למד מתמטיקה ונהיה עוד יותר חכם משהיה שנה שעברה". (מה נכתוב שנה הבאה?). על התעודה היה מצויר חדר מחולק למשבצות, "רובוט" ואלגוריתם בשפה שלנו, וגם קוביה וחיפושית.

בזה סיימנו את המפגש. בוריס צילם אותנו.

5 הפשוט והמסובך: על סימונים, תהליך האבסטרקציה, מתמטיקה ושפה

סימונים למילים

הקשיים שהייתי צריך להתמודד איתם כשניסיתי להמציא "סימונים לפרמטרים" (ראו עמ' 90) גרמו לי לחשוב על כל הנושא. יצאו מזה שלושה מאמרים: אחד הופיע באסופת המאמרים "שפה ומבנה הזכרון", 1990, השני בכתב העת "שאלות על ידיעת שפה", 1990, גליון מס' 6 (שניהם בברכתה של רבקה פרומקין, שכבר הוזכרה פה רבות), והשלישי, שהיה פופולרי יותר, בכתב העת "ידע הוא כח", 1992, גליון מס' 8.

מצחיק לומר את זה, אבל דימה נתן לי את הרעיון שעמד בבסיסם של המאמרים האלה. באותו רגע לא שמתי לב לזה; רק בדיעבד הצלחתי לשחזר את מהלך העניינים. כזכור, המשימה הייתה כזו: לנסח טענה "פשוטה ככל האפשר" לגבי אוסף הצורות של דיינש. עוד בתחילת הדיון דימה הציע למדוד את קושי הטיעון על ידי מספר המילים בו. אבל זאת עוד לא נקודת המפתח. אחר כך, אחרי הויכוחים וחוסר ההבנה ההדדית בינינו, הוא הוסיף לרע, חשב על משהו, ואמר:

— נראה לי שהבנתי, אבא. אתה רוצה שנמציא סימונים למילים.

ההערה הזו נכנסה באוזן אחת שלי ויצאה מהשניה. אני חושב שעוד לא הייתי בשל אליה באותו זמן.

סימונים למילים! זה ממש דילוג מעל תהום!

ניקה למשל את המילה "אדום". אני מדגיש: לא את המשמעות שעומדת מאחורי המילה הזו, לא את משמעות הפרמטר "צבע", לא את קבוצת הדברים האדומים, אלא את המילה עצמה. המילה "אדום" היא משהו די קונקרטי. לא קונקרטי כמו כוס או אופניים, אי אפשר להחזיק או לטעום אותה; אבל זה עדיין לא "אחד מהערכים האפשריים של פרמטר הצבע". מבחינה לוגית, מילה היא אבסטרקציה, אבל מבחינה פסיכולוגית זה ממש לא המצב. אין גם שום דבר מפתיע בהתאמה של סימון למילה. אפשר לרשום אותה באותיות, כמו שעושים בדרך כלל. אבל לרשום אותיות זה תהליך קשה שלוקח זמן. לכן, אם המילה מאד שימושית, למה לא להמציא בשבילה סימון פשוט יותר (סוג של הירוגליף)? יתר על כן, הנסיון מראה שהצורה הספציפית של סימונים כאלה נהיית מהר מאד חסרת משמעות: הילדים לומדים במהירות לראות דרכה.

נראה שלא קרה שום דבר מיוחד: הילדים פשוט למדו להחליף מילים בסימונים. אבל כשאנחנו חוזרים לעולם האמיתי ומנסים להתאים לסימון שקיבלנו איזשהו אובייקט, האובייקט הוא לא "ריבוע אדום גדול עם חור", אלא קבוצת כל הדברים האדומים. במקום השרשרת הלא-אינטואיטיבית פרמטר ← אחד מהערכים האפשריים שלו ← סימון ← קבוצה, בנינו שרשרת אחרת, קלה יותר להבנה: חפץ ← מילה ← סימון ← קבוצה. ההכנסה של האובייקט הבלשני "מילה" לשרשרת הזו מאפשרת לשוב את מעגל הקסמים שבו סימונים הם דרך להתייחס לקטגוריות, אבל המשמעות של הסימון עצמו נותרת לא ברורה עד שמבינים את מושג הקטגוריה.

מה מאפשר את הקפיצה הזו? למה המילה יכולה לשמש כגלגל הצלה שכזה?

אם נחשוב על זה, נגיע למסקנות מדהימות. נבין, למשל, שמילה היא-היא הסימון שניסינו להגדיר – סימון שנותן ערך לפרמטר, באופן שכבר מנותק מהחפץ עצמו. (והמילה "צבע" היא בכלל אבסטרקציה ברמה גבוהה יותר: זה סימון של קבוצת אובייקטים שהם אבסטרקציות בעצמם). עבודת האבסטרקציה הזו אמנם קשה לילד בן שש-שבע, אבל הוא כבר עשה אותה באופן לא מודע בגיל שנה וחצי-שנתיים, כשהוא למד לדבר. כשאנחנו הופכים את המילה לשלב ביניים, אנחנו למעשה משתמשים בעבודה שכבר נעשתה על ידו. לזה אני מתכוון בביטוי "אבסטרקציה עם תמיכה שפתית" (שמו של אחד המאמרים שלי). כשאנחנו מנסים להגדיר סימונים לקבוצת אובייקטים, אנחנו מנסים לעשות את אותה עבודה שוב, אבל במודע. ככל הנראה, בגיל הזה זה פשוט לא אפשרי. אבל אם אנחנו מתאימים את הסימונים למילים, השפה עוזרת לנו.

כמעט חצי מהספר "מתמטיקה כבר בגן", מאת מריה פידלר, מוקדש לסימונים לערכים אפשיים של פרמטרים. ראשית, חלק גדול מהסימונים פשוט לא מוצלח. הם מסובכים ולפעמים קשים לחיקוי. הילדים או לא יכולים לצייר סימון כזה, או יכולים, אבל עד שיציירו כבר ישכחו מה התרגיל שהם מנסים לפתור. שנית, המשמעות של הסימון בפני עצמו לא מובנת בלי שמשווים אותו לסימונים אחרים; למשל, בית עם שני חלונות נראה גדול רק כשהוא מושווה לבית עם חלון אחד; אם מסתכלים עליו בפני עצמו, לא ברור אם הוא גדול או קטן. היה אפשר להתעלם מהחסרונות האלה אם הספר היה מזכיר את הטיפ הכי חשוב: סימון אמור להחליף מילה, ולא קבוצת אובייקטים. קבוצות האובייקטים מופיעות בהמשך (כלומר, נהיות מובנות) בעקבות הסימונים. אם עובדים כמו שכתוב בספר – וכמו שאני ניסיתי (לא בגלל הספר – אז עוד לא קראתי אותו – אלא בגלל הלך המחשבה ה"טבעי"), מקבלים מעגל פסיכולוגי.

סימונים "פשוטים"

לחלק מהתרגילים שקשורים לאבסטרקציה אין תמיכה מהצד השפתי; אותם ילדים לא יכולים לפתור. למבוגר הם לפעמים נראים אפילו קלים יותר. יש פה מלכודת אמיתית שהמורה יכול ליפול בה. נתבונן בדוגמה שכולנו מכירים. בשביל ללמוד לקרוא, ילד צריך להבין איך צלילים ואותיות תואמים זה לזה. יש המון צלילים והמון אותיות, וגם ההתאמה ביניהם לא תמיד חד משמעית. למשל, "מי" זה צליל אחד, אבל שתי אותיות; חי"ת בסוף מילה היא אות אחת, אבל שני צלילים – "אח". וזה עוד לפני שמדברים על אותיות שונות שמתאימות לאותו צליל (כ, ק), עיצורים קוליים ואטומים (ספתא במקום סבתא), כתיב מלא וחסר, תנועות שנכתבות במפורש (לי, לו), תנועות שנכתבות במפורש רק כשהן מופיעות בסוף מילה (לה), א' נחה (ראש, שמאל), ועוד מגוון בעיות שקשורות לכתיב תקני. לא קל. איך אפשר לעזור לילד?

טוב, זה ברור איך. צריך "לפשט את הסימונים", ולחלק את הבעיה הגדולה לשלבים – קודם שלבים פשוטים, ואחר כך, בהדרגה, מסובכים יותר. ניקח למשל ספר לימוד קריאה²⁸ ונראה מה הם השלבים האלה. בהתחלה יש שלב קצר שבו משתמשים בסימונים מיוחדים למשפטים ולמילים. אחר כך צצים סימונים להברות – סימונים שונים להברות מוטעמות ולא-מוטעמות. אחר כך מופיעים סימונים לצלילים, אבל לא לצלילים ספציפיים כמו "אה" ו"או", אלא לצלילים באופן כללי. בהדרגה, הסימונים הופכים ליותר ויותר מגוונים: ריבוע מסמן צליל באופן כללי; מלבן עם אלכסון באמצע – צליל "מורכב"; עיגול אדום מסמן תנועה; עיגול כחול ושחור – עיצור גרוני ולא-גרוני, בהתאמה. בנוסף, המבנה הפונטי של המילה כולל עוד רכיבים: הטעמה, סימון מיוחד שמסמן את האות הנלמדת כרגע, וכו'. בשלב מסוים, כשכבר אי אפשר יותר לגוון בסימונים, מתחילים להחליף אותם בהדרגה באותיות. ננסה להבין מה הבעיה בשיטה הזו. אם רוצים, אפשר לתת לילדים סימון מיוחד למילה "חתול", סימון אחר למילה "מטוס", ועוד סימון למילה "קומקום". לילדים יהיה קל מאד להבין סימונים כאלה. אם היינו מפתחים שיטה כזו מספיק, היינו מגיעים לסוג של כתב חרטומים. זה די מעמיק על הזכרון, אבל מנקודת מבט פסיכולוגית מדובר במשהו טבעי מאד: לכל סימון יש בסיס שפתי. אבל ברגע שננסה להכניס סימון ל"מילה כללית", כלומר למילה לא ידועה מראש, מעיין משתנה אלגברי שמוגדר מעל קבוצת המילים, ניכשל. נדרשת לשם כך רמת אבסטרקציה גבוהה, ואין מספיק בסיס שפתי. ההבדל הזה הוא בדיוק כמו ההבדל בין השימוש בספרה 7 לסימון המספר שבע לבין השימוש ב- x לסימון "איזשהו מספר" באלגברה.

ברמת ההברות, קורה דבר דומה. קל להבין את המשמעות של הסימונים שמסמנים את ההברה "בה", או "מו", וכו'. בעזרתם אפשר להגיע לאיזשהו כתיב מבוסס-הברות, וגם לזה יש תקדימים היסטוריים. אבל תלמיד בכיתה א' לא מסוגל להבין את משמעות הסימון "איזושהי הברה אבסטרקטית". כבר ברמת האותיות-צלילים, להבין שהאות "י" מתאימה לצליל כזה או אחר קל הרבה יותר מלהבין שעיגול כחול

²⁸ מהסוג שהיה מקובל בבית המועצות בשנות השמונים.

מתאים לאובייקט מסוים מתוך קבוצת התנועות. הצליל "י" הוא "מציאות פסיכולוגית" מסוימת, וקבוצת התנועות היא משהו מופשט. במקרה הטוב, אפשר להתייחס לסימון המתאים כאל חידה: נחש מהי האות המתאימה לכאן. (כך בדיוק התייחסו לזה ילדי החוג שלי: הם נהנו לנחש מה עומד מאחורי התבניות הפונטיות האלו, והתייחסו אליהן כאל חידות משעשעות. יכול להיות שזה מה שעושים גם ילדים אחרים, בתנאי שהם כבר יודעים לקרוא).

אני מרשה לעצמי לעשות עוד דיוק, על מנת שאובן נכון. כשהמצאנו את הסימונים למילים, יכולנו להמציא סימונים גם למילים כמו מילה, הברה וצליל. אבל אז, במשפט "ננסח את זה במילים אחרות", הסימון הראשון היה מופיע רק פעם אחת, ולא חמש, ובמשפט "צלילים רכים ונעימים" הסימון השלישי היה מופיע פעם אחת, למרות שמספר הצלילים בו הוא 12.

אני זוכר את אספת ההורים הראשונה שהשתתפנו בה. המורים כבר יודעים מנסיון שהילדים – אפילו אלה שכבר יודעים לקרוא – לא מסוגלים להבין את כל התבניות הפונטיות האלו בלי עזרת ההורים. לכן, המשימה הראשונה היא ללמד את ההורים. לזה מוקדש המפגש שלנו. אבל מסתבר שאפילו לא כל ההורים מסוגלים להבין את זה. כשהמורה מגיעה ל"צלילים מורכבים", ההורים מתחילים להלחץ. בשלב הזה, המורה אומרת משפט מדהים – למעשה, היא מסכמת את כל השיטה הזו. היא אומרת:

– אל תדאגו, נסיים את ספר לימוד הקריאה ואז הכל יהיה הרבה יותר פשוט.

אחרי מעט מחשבה היא מוסיפה:

– רק, בבקשה, תקראו איתם בבית כמה שיותר. יש לנו תכנית לימודים לא קלה, ואנחנו לא מספיקים ללמד אותם לקרוא.

אף אחד כבר לא זוכר שהשיטה עצמה פותחה בשביל ללמד ילדים לקרוא.

כל זה די פשוט ברמת ההגיון הבריאה. הרבה פחות פשוט למצוא טיעון "מדעי" נגד השיטה הנ"ל. הרי פורמלית, הסימונים המוצעים הם באמת פשוטים יותר משיטת הכתיבה הרגילה. במקום 22 סימונים/אותיות, מציעים לנו בסך הכל ארבעה או חמישה; וגם ההתאמה בין הסימונים לבין מה שהם מסמנים פשוטה יותר – היא חד-חד ערכית. הבעיה טמונה לא בסימונים, אלא במה שהם מסמנים, באובייקטים המסומנים. אלו אבסטרקציות שאין להן בסיס שפתי. בעולם של הילד, האובייקטים האלה פשוט לא קיימים.

אני שם לרגע את הילדים בצד; אני רוצה לספר על ויכוח שהיה לי עם מתמטיקאי אחד. הוא היה אמור לעבוד עם ילדים בכיתות הבינוניות (ו'-ח'), וסיפר לנו בהתלהבות על הרעיון המהפכני שלו: במקום גיאומטריה, צריך ללמד את הילדים אלגברה לינארית. הרי זה הרבה יותר פשוט! הוא המציא מערכת אלגברית שיש בה רק ארבע אקסיומות! וכל ההוכחות הרבה יותר קצרות ופשוטות! נאלצתי להודות שכן, הן אכן יותר קצרות; האמת היא שהן גם יותר ריגורוזיות מההוכחות שאנחנו רגילים לראות בגיאומטריה. אבל איך חושבים עליהן? האינטואיציה הגיאומטרית שלנו, שנובעת מהנסיון שלנו בעולם התלת-מימדי שאנחנו חיים בו, לא נותנת לנו פה שום קצה חוט. הילדים בשיעורים שלו הרגישו כמו שמרגיש כנראה תלמיד חסר כל חוש מוזיקלי בשיעורי סולפז'.

לכל אדם יש אינטליגנציות מסוגים שונים

כעת נניח בצד את בית הספר ונחזור לתהליך רכישת השפה. יש תופעה מדהימה: המשימה של החלפת קבוצת אובייקטים בסימון, זו שקשה מדי לבני שבע, היא קלה ביותר לבני שנה עד שנתיים – קלה עד כדי כך שהם אפילו לא שמים לב שהם פותרים אותה. ככל שחושבים על התופעה הזו, היא לא נהיית מובנת יותר אלא רק מדהימה יותר. מה שמדהים הוא ההבדל, שלא לומר התהום הפעורה, בין היכולות של אותו אדם לפתור בעיות נורא דומות בעזרת תתי-מערכות שונות של האינטליגנציה שלו.

אנחנו עושים הרבה דברים באופן לא מודע, בלי יכולת להסביר איך בדיוק אנחנו עושים אותם: הולכים, אוכלים, וגם מדברים. הדיבור שונה מהיכולות האחרות בכך שהוא דורש פתרון מתמיד של בעיות אינטלקטואליות-לוגיות. אני זוכר שהתרשמתי מאד ממאמר שנתקלתי בו במקרה, של הבלשן גרגורי קריידלין, שהוקדש כולו – מעל עשרה עמודים – למשמעות המילה "אפילו". מתברר שאפשר

לתאר את משמעות המילה הזו בעזרת ארבע טענות לוגיות מסובכות למדי שתלויות אחת בשניה. המאמר מראה גם שכל שימוש שגוי במילה הזו (למשל, "הכף אפילו מונחת על השולחן") קשור להפרה של לפחות אחת מארבע הטענות הללו. כך, בכל פעם שאנחנו משתמשים במילה "אפילו", אנחנו פותרים בשבריר שניה בעיה לוגית לא פשוטה בעלת ארבעה שלבים. וכל זה רק עבור מילה אחת!²⁹ והרי יש עוד מילים (עוד מאמר מאת אותו מחבר: "הלקסמה של 'ו'", ותחביר, והקשר, ואולי עוד הרבה דברים שאנחנו אפילו לא חושדים בקיומם. כל הבעיות האלו נפתרות במקביל, בבת אחת, ובמהירות עצומה. מה שמדהים עוד יותר הוא שיש ילדים עם פיגור שמתמודדים עם זה באותה קלות. ילד כזה לא יצליח לפתור תרגיל פשוט בגיאומטריה, אבל ישתמש במילה "אפילו" בחופשיות ובלתי טעויות. בחינוך מיוחד יש מונח כזה, "ורבליזם", שמתאר ילדים עם פיגור בעלי כישורי שפה מפותחים. בהיכרות שטחית הם יכולים ליצור רושם של ילדים נורמליים לחלוטין; הפיגור שלהם לא בולט, ולכן לא תמיד קל לאבחון. רק כשהם חווים קשיים משמעותיים בפתרון בעיות לוגיות-מתמטיות, זה מאפשר לקבוע שהם סובלים מעיכוב התפתחותי. יש אפילו מקרים של ילדים עם מוגבלות שכלית התפתחותית, לעתים יחסית קשה, שנולדו למשפחות דו-שפתיות, ושמצליחים לרכוש את שתי השפות.

אין לנו ברירה אלא להסיק שבמוח שלנו פועלות באופן בלתי תלוי לפחות שתי אינטליגנציות נפרדות. אחת מודעת, או ליתר דיוק, אחת שאנחנו מודעים לה. בעזרתה אנחנו פותרים בעיות מתמטיות, כותבים תוכנות, מסווגים, מבינים הוראות הפעלה של שואבי אבק. השניה לא מודעת. בעזרתה אנחנו פותרים בעיות דומות מאד (ולרוב קשות יותר) מתחום אחר – השפה. אין צורך להניח ששתי האינטליגנציות האלו לא קשורות זו בזו. להפך, המושג "תמיכה שפתית" (שעוזרת לפתח חשיבה מופשטת) הוא בדיוק הזמנה להשתמש בקשר ביניהן עד כמה שאפשר, לחרוש שבילים מאינטליגנציה אחת לאחרת. ועם זאת, שתי המערכות האלו קיימות ופועלות בנפרד, ובשביל להשתמש בקשר ביניהן, כדאי להיות מודעים לנפרדות הזו.

השליטה בשפה לא יכולה להשען על אותם מבנים נירוי-ביולוגיים של האינטליגנציה המודעת. המוח של האדם גדל והקשרים הניורולוגיים בו מתעצבים, כולל בתהליך רכישת השפה. זו הסיבה שעוד לא הצליחו ללמד אף מוגלי לדבר. מתכנת היה אומר שהשליטה בשפה מובנית בחומרה. המקבילה המטאפורית לתמיכה השפתית היא תוכנה שנתמכת על ידי החומרה. פונקציה שממומשת בחומרה היא גם סוג של תוכנה; אבל התוכנה הזו קיימת במחשב לא כטקסט אלא כחיבורים חשמליים או גבישיים בעלי מבנה מסוים. מימוש של פונקציה בתוכנה דורש כתיבה של טקסט, שמתורגם בתורו לביצוע רצף של פונקציות בסיסיות הממומשות בחומרה.

ההבדל הוא שפונקציות שממומשות בחומרה הן מהירות לאין-ערוך. אם במחשבים ישנים מימשו בחומרה רק את הפעולות הפשוטות ביותר על ביטים, אז במחשבים של היום מממשים פעולות מורכבות למדי. חישוב של פעולה פשוטה יותר באותו מחשב עשוי לדרוש כתיבה של תוכנה, ולפיכך להתבצע משמעותית לאט יותר.

נוצר מצב פרדוקסלי: לפעמים, בשביל ליצור תוכנה יעילה, צריך לתרגם את הבעיה למספר בעיות קשות יותר שממומשות בחומרה. בעיות שמיתרגמות בקלות לפונקציות שממומשות בחומרה נקראות בעיות עם תמיכה חומרית. מכאן הביטוי "תמיכה שפתית": ילד מקבל בעיה שמיתרגמת לבעיה קשה יותר, אך כזו שכבר פתורה בשפת הדיבור.

יש לקות שנקראת אוטיזם בילדות המוקדמת (היה נכון יותר לקרוא לה פשוט אוטיזם, הרי יש גם מבוגרים אוטיסטים). המקור שלה לא לגמרי ברור, והטיפול בה הוא סוג של אמנות, במיוחד בהשוואה לטיפולים בלקויות אחרות. הקושי העיקרי של אוטיסטים הוא לתקשר עם אנשים אחרים, והקושי הזה גורם לבעיות התנהגותיות נוספות. בהקשר של הדיון שלנו, מה שמעניין באוטיזם הוא שבהרבה מקרים

²⁹ בדיוק ביום שבו עבדתי על העריכה של הפרק הזה, התקשרתי לגרגורי קריידלין. בין השאר, הוא סיפר לי שבלשנים אחרים הרימו את הכפפה, ובעשרים השנים שחלפו מאז, ההבנה של המילה "אפילו" התרחבה והועמקה. ללמדנו שלמעשה אנחנו פותרים בעיה עוד יותר קשה משחשבתי כשכתבתי את זה.

הוא למעשה תופעה הפוכה לורבליות: לקויות חמורות בהתפתחות השפתית הרבה פעמים באות ביחד עם אינטליגנציה גבוהה, כשרון לפתירת בעיות לוגיות-מתמטיות, ובכלל עניין מוגבר בפעילות אינטלקטואלית. בהקשר הזה, ראוי לציין את הויכוח האם ילדים אוטיסטים הם מפגרים. קלרה קלייבורן פארק, אם לילדה אוטיסטית, כותבת בספרה "המצור" על איך שהביאה את ביתה לבית ספר לילדים עם פיגור. לילדה היה יתרון של שלוש-חמש שנים על בני כיתה בפתרון בעיות מתמטיות, אבל היא התקשתה בדיוק כמוהם בהרכבת משפטים פשוטים כמו "מה יש לארוחת הבוקר?". היה רושם ששפת האם שלה היא כמו שפה זרה בשבילה – כל הרכבה של משפט דרשה ממנה תהליך מודע של צירוף מילים לפי חוקים מסוימים. מעניין גם שלא היה לה שום קושי לרכוש מילים כמו "מתומן" או "סכום", אבל נדרשו לה כמה שנים כדי להבין את המשמעות של מילים כמו "אני" ו"כן".

כמובן שספקטרום הסטיות מהנורמה רחב הרבה יותר משתי הדוגמאות שלעיל; לכן אני אומר: לפחות שני סוגי אינטליגנציה. אפשר למצוא שפע של דוגמאות בספריו של הנורו-פסיכולוג אוליבר סאקס "אנתרופולוג על המאדים" ו"האיש שחשב שאשתו היא כובע". ד"ר סאקס מספר על אנשים שבזמנו, לפני עידן הפוליטיקלי-קורקט, הפסיכולוגים קראו להם "גאונים אדיוטים". למשל, סטיבן ווילטשיר לא דיבר עד גיל חמש, וגם אז לא ממש – זה היה מקרה מאד מובהק של פיגור שכלי. הוא גם לא היה מסוגל להבין, למשל, למה מכוניות מתקשות לנסוע בירידות תלולות. ועם זאת, סטיבן היה צייר מחונן. אלבומים עם הציורים שלו נחטפים מהחנויות ומעוררים התלהבות גם בקרב חובבי האמנות שלו וגם בקרב ציירים מקצועיים. או נדיה, ילדה אוטיסטית שסופר אחר הקדיש לה מונוגרפיה שלמה. בגיל שלוש וחצי היא התחילה לצייר סוסים, ואיכשהו דילגה על כל שלבי הביניים שילדים עוברים כשהם מציירים. ילדים לרוב מתחילים מקשקשים חסרי משמעות, ואז עוברים ל"ראשנים", כלומר למבנים של עיגולים וקווים, וכד'. נדיה ציירה באופן מקצועי מההתחלה: העתקה של המרחב, תנועות, גוונים, פרספקטיבות – הכל הופיע בציורים שלה מההתחלה ובלי שלמדה, ברמה שאפילו הילדים המוכשרים ביותר (מוכשרים כמו פיקאסו) מגיעים אליה לכל המוקדם בגיל עשר. והיה בציורים שלה מגוון של זוויות, הצללות ופרספקטיבות. זה היה כאילו שבמקום שבו לילדים רגילים צומח איבר השפה, לנדיה צמח איבר הציור. סאקס מספר גם על מרטין, מוזיקאי בעל פיגור שכלי שהמלחין האהוב עליו היה באך. סאקס לא הבין את זה: הרי באך היה מלחין כל כך אינטלקטואלי וכו'. התברר שלמרטין יש אינטליגנציה מוזיקלית ייחודית, שבעזרתה הוא יכול להבין, גם אם לא לנסח, מבנים מסובכים ביותר של וריאציות, היפוכים, שילובי קולות בקאנון או פוגה, ועוד ועוד. דמיינו שלא היינו לומדים לשון בבית הספר. יכול להיות שאפילו לא היינו מנחשים שהמקצוע הזה קיים – ועם זאת היינו מטים פעלים ושמות עצם ומרכיבים משפטים לפי כל חוקי הדקדוק. במילים אחרות, האינטליגנציה השפתית שלנו הייתה מתפקדת לא פחות טוב. (אגב, שפות של עמים שמעולם לא כתבו, וגם לא התעסקו במדע, עשויות להיות מורכבות לא פחות מהשפות שלנו). כך היה גם אצל מרטין: האינטליגנציה המוזיקלית המובנית, הלא מודעת שלו, הייתה ברמה גבוהה ביותר. אבל הוא לא ידע להסביר את "חוקי הדקדוק המוזיקליים", וגם לא היה מבין הסברים של אנשים אחרים, כי היה לו פיגור שכלי.

יש גם "מתמטיקאים" גאונים אדיוטים. למשל, התאומים האוטיסטים שהשתעשעו בלהגיד אחד לשני מספרים ראשוניים גדולים. הדרך היחידה לרכוש את אמונם הייתה להגיד להם מספר ראשוני גדול: רק כך היה לכם סיכוי להתקבל לחבורה שלהם. למרבה הצער, אי אפשר להפוך אנשים כאלה למתמטיקאים אמיתיים. מתמטיקה היא פעילות אנושית; הערך היחסי של בעיות מתמטיות ובחירה נכונה שלהן הם חשובים הרבה יותר מהיכולת לבצע בראש חישובים מסובכים.

אוליבר סאקס מפנה לספר שדן בתיאוריה שעוסקת במספר מערכות אינטליגנציה שיש בנו: Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences, מאת הווארד רגדנר. טרם קראתי אותו; אני צריך להגיע לזה מתישהו.

חוקרים רבים טוענים שבתהליך רכישת שפה יש תפקיד מכריע לתקשורת לא מילולית, חיתית. שפה של מימיקות ומחוות, מבטים ואינטונציות, שאנחנו שולטים בה אינסטינקטיבית, כיצורים ביולוגיים, בדומה לחתולים או קופים – זו השפה שעומדת בבסיס ההתפתחות של האינטליגנציה הראשונה, הלא-

מודעת שלנו, ובבסיס תהליך רכישת השפה. זה הגיוני, כי נראה שקשיי התקשורת של ילדים אוטיסטים נובעים מקשיים בתקשורת ה"חיייתית". אוליבר סאקס כותב על זה, וגם ניקולס טינברגן, זוכה פרס נובל בביולוגיה, ממייסדי האתולוגיה – מדע ההתנהגות של בעלי חיים, שחקר אוטיזם במשך שנים. אבל כאן אנחנו כבר נכנסים לשדה מוקשים של תיאוריות וספקולציות. הגיע הזמן לחזור לעולם המוכר לנו.

ללמד ילדים מתמטיקה כמו שאנחנו מלמדים אותם לדבר

בואו נדמיין שהיינו מלמדים את הילדים לדבר כמו שאנחנו מלמדים אותם מתמטיקה. אנטי-אוטופיה שכזו...

כנראה שהיינו מתחילים מללמד אותם להגות תנועות; נדמה לי שתנועות הן קלות יותר להיגוי מאשר עיצורים. אחר כך היינו עוברים לעיצורים. משם היינו ממשיכים להברות. רק חשוב לא לרוץ קדימה: לפני שהם שולטים בהברות, אסור בשום אופן לעבור למילים! לבסוף, אחרי שנה שנתיים של תרגול הברות, היו מופיעות גם המילים. באיזה שלב אפשר לבשר לילד שלמילה יש משמעות? בטח לא לפני שהוא כבר שולט ב... לא יודע מה. נמאס לי לדמיין. אבל יש עוד היבט שהייתי רוצה להדגיש. אנחנו, המבוגרים החכמים יודעי-הכל, יודעים שהיכולת לדבר היא יכולת חשובה בחיים. גם הילדים היו מגלים את זה, אבל רק אחרי כמה שנים של לימוד שאין לו מטרה ברורה.

המציאות, תודה לאל, נראית אחרת. האינסטינקט ההורי אומר לנו שצריך פשוט לדבר עם הילד, החל מהימים הראשונים לחייו, וזהו. ולא נורא שהוא לא מבין כלום בינתיים – ככל שהוא יגדל, גם ההבנה שלו תגדל. זה בסדר גם שהוא לא יכול להגיד שום דבר; הוא ילמד עם הזמן. והכי חשוב: אנחנו מדברים איתו לא בשביל "ללמד אותו מילים, ביטויים ומבנים תחביריים"; אנחנו מתקשרים איתו באמצעות הדיבור. יותר מזה: התקשורת הזו מתרחשת במהלך פעילות משותפת שלנו איתו. אנחנו לא אומרים לו: "שרה שרה שיר שמח. תחזור! לא, לא הצלחת; נסה שוב!". אנחנו אומרים לו: "רוצה גזר?" – ונותנים לו גזר. אנחנו אומרים "לך לסבתא" – ומצביעים על סבתא, וסבתא מושיטה אליו ידיים. והילד, שעוד לא ממש מבין מילים, מבין מה הוא צריך לעשות.

לשמחתנו, לכל הילדים (למעט מקרים נדירים) יש "אינסטינקט לשוני" (סטיבן פינקר, שהוזכר בעמ' 28, כתב עליו בספר "האינסטינקט הלשוני: כיצד המוח יוצר שפה"), ולכן רכישת השפה קורית כאילו מאליה. במקרה של המתמטיקה, קשה יותר לבנות על זה. ואף על פי כן. לו לא היה לנו שום "אינסטינקט מתמטי", כנראה שלא היינו מסוגלים להבין מתמטיקה, בשום צורה שלה. כמובן שעוצמת האינטליגנציה המתמטית שלנו חלשה הרבה יותר מהלשונית, ועם זאת, אפשר לדון בשאלה הבאה: האם אפשר ללמד ילדים מתמטיקה כמו שאנחנו מלמדים אותם את שפת האם שלהם? איך זה היה נראה בפועל? המתמטיקאי ומדען המחשב הקנדי מיכאל פלואוזה פיתח יחד עם עמיתו, בראשם ננסי קייזי, שיטה שנקראת "מטאפורת השפה השלמה". להלן חלק מהעקרונות שלה:

- התלמידים צריכים לפגוש תוכן מתמטי עשיר ומגוון, לוא דווקא בסדר היררכי. שאלת הבשלות שלהם צריכה להבחן בקונטקסט רחב.
- תלמידים מתקדמים כשהם פוגשים חומר שהם כבר מסוגלים להבין אבל עוד לא יכולים לשחזר.
- הכישורים של התלמידים חשובים, אבל לא פחות חשוב לפתח את הכישורים הללו בעזרת פעילות בעלת משמעות. הפעילות הכי מומלצת היא פרויקטים שהם בוחרים בעצמם.
- יש לעודד את התלמידים לבחור בעצמם חומר ולעבוד עליו לבד או בקבוצות קטנות.
- שיתוף פעולה והחלפת דעות בין התלמידים הם לא רק חשובים אלא הכרחיים. מורה צריך לעודד קשרים כאלה, וודאי שלא לאסור אותם.
- צריך לתת לתלמידים מספיק זמן בשביל לקרוא, לחשוב ולדבר אחד עם השני, לחלוק רעיונות, להתווכח, ולרשום את המחשבות שלהם. הכיתה צריכה להוות מעין קהילה מדעית שהילדים משתלבים בה.
- המורה צריך להיות חלק מהמתרחש, "מדען". לא שליח של הקהילה הזו ולא מתבונן מהצד.

פלואוז לימד ילדים בני 9-5. להלן רשימה חלקית של תכנים שהוא נגע בהם בשיעורים שלו: צביעת מפות וגרפים; חיפוש עצים פורשים מינימליים בגרפים; תורת הקשרים; רשתות מיון; קבוצות שולטות של קודקודים בגרפים; בניה של גרפים בעלי דרגה וקוטר נתונים; מגוון בעיות בקריפטוגרפיה. הרעיון ברור: העיקר הוא לא מה לומדים, אלא איך לומדים את זה. לא למידה של הגדרות, משפטים והוכחות, לא פתירת סדרות של תרגילים, אלא התנסות בגרפים אמיתיים, מפות וקשרים, החלפת השערות, חוסר הבנה ודיוק של שאלות, תחרות וחיפוש של הפתרונות המוצלחים ביותר וכד'. באחד המאמרים שלו פלואוז מציג בגאווה רשימה של ארבע בעיות מחקריות שנולדו כתוצאה מדיונים עם הילדים, ושהבשילו בהמשך למספר מאמרים מדעיים – לעתים שלו, לעתים של עמיתים שהוא דן איתם בהן.

אין כל רע במשפטים ובהוכחות, אבל אפשר להפנים אותם הרבה יותר טוב כשהם עונים על שאלה שהילדים שאלו. קצת בהמשך (עמ' 155) אני מזכיר את התרגיל עם "הריבועים העקומים", שמתפתח באופן טבעי למשפט פיתגורס. אבל התחלנו להוכיח את המשפט הזה רק כשהילדים שאלו: "מה, זה תמיד ככה?"

כשהיו שואלים את ממציא השיטה האם הם חושבים שילדים באמת צריכים להכיר את תורת הקשרים, הם היו משיבים: "ואתם חושבים שילדים באמת צריכים לדעת את כל פרטי ההרפתקאות של הקלברי פיין?". כמובן שהתשובה היא לא. ילדים באמת צריכים: (א) לקרוא; (ב) שהסיפור שהם קוראים יהיה מעניין. איזה סיפור זה יהיה זו שאלה משנית.

פלואוז, בהיותו מדען מחשבים, מתייחס בספקנות, שלא לומר בעוינות, לשימוש במחשבים בבתי הספר. אני חושב שמחשבים הם לא מזיקים אם מתייחסים אליהם ככלי מחקר. היום המחשבים כבר נמצאים בכל מקום, ולכן יש גם פוטנציאל משמעותי של שימוש לרעה. משחקי מחשב, למשל, הם אחת הדרכים המטופשות ביותר בעיני להעביר את הזמן. במועדון המחשבים לילדים במוסקבה, בו שימשתי כמדריך, משחקי מחשב היו אסורים.

6 החוג של הבנים – השנה השלישית

פיטר ויבגני עלו לכיתה א', והמפגשים שלנו עברו מהבקררים לשעות הערב.

מפגש 55. חידות הגיון

שני, 18 באוקטובר 1982. 16:30-17:30. דימה, פיטר ויבגני.

פתיחת שנת הלימודים.

אני ודימה נתנו במתנה לפיטר ויבגני חבילת טושים וכרטיס ברכה לרגל פתיחת שנת הלימודים.

תרגיל 1. סיפור.

סיפורתי לילדים סיפור על נער חכם מאד, שנסיכה התאהבה בו. המלך החליט להוציא את הנער להורג, כדי שהנסיכה לא תתחתן איתו. הנסיכה התחננה שלא יעשה זאת, עד שהוא הכריז: "מחר אכניס לגביע שלי שני פתקים – על אחד יהיה כתוב "חיים" ועל השני "מוות". הפתק שהנער יוציא מהגביע יקבע את גורלו". בלילה, המלך הורה למשרתו לכתוב על שני הפתקים "מוות". הנסיכה צותתה לשיחתם, והספיקה להזהיר את הנער.

– מה דעתכם, ילדים, – שאלתי, – מה הנער צריך לעשות?

בתגובה הילדים רק משכו בכתפיהם. אחר כך דימה הציע:

– הוא יכול להגיד שהפתקים לא טובים.

הסברתי שאם הוא יעשה את זה עדיין יש סיכוי של חצי שיוציאו אותו להורג.

[הייתי צריך להוסיף שהיו עלולים גם להעניש את הנסיכה, והוא אהב אותה ולא רצה שהיא תיענש].

ואז המשכתי בקול חגיגי:

– אבל אמרתי לכם שהוא היה נער מאד חכם! הוא אמר: "אני בוחר את הפתק הזה", הוציא אחד

מהפתקים... ובלע אותו!

הילדים הסתכלו עלי בעיניים פעורות. איך אפשר לאכול פתק? היה ברור שהם לא מבינים לאן הסיפור

הולך. המשכתי:

– ואז כולם צעקו: "איך נדע מה היה כתוב בפתק שבלעת?" והנער חיך וענה: "הרי יש עוד פתק!

נוכל לבדוק מה כתוב בו". בדקו, וגילו שכתוב שם "מוות". סימן שבפתק שהנער בלע היה כתוב "חיים".

המלך התבייש להודות בתרמית שלו, והנער ניצל!

הפתרון הזה לא נראה לי מוצלח יותר מאלה שאנחנו הצענו. – דימה.

הילדים די התרשמו מהתפנית בעלילה, והמשיכו להביט בי בעיניים פעורות. (בערב פיטר חד את

החידה הזו להורים שלו).

תרגיל 2. תגיות מבולבלות.

בתוך שלוש קופסאות אטומות יש גפרורים, נעצים וסיכות משרדיות. על כל קופסה יש תגית, אבל אף

אחת מהתגיות לא תואמת למה שיש בתוך הקופסה. צריך לגלות מה יש בכל קופסה, כאשר מותר לפתוח

רק קופסה אחת.

בהתחלה, כמו בתרגיל הקודם, הילדים רק משכו בכתפיים. בכלל, הרושם הוא שבמהלך הקיץ המוח

שלהם התנוון לגמרי. הצלחתי איכשהו לגרום להם להשתתף, ובסוף יבגני הצליח לפתור את החידה,

למרות שהסבר שלו היה קצת צולע. אחר כך חדתי את החידה הזו פעמיים לכל ילד, כשאני משנה בכל

פעם את תכולת הקופסאות ואת מיקומן.

בערב דימה ישב במשך שעה וקשקש כל מיני דברים על קופסאות – ניסה להמציא חידה בשבילי.

בקופסה אחת היו נעצים וסיכות, בשניה – נעצים וגפרורים, ובשלישית – סיכות וגפרורים. הכיתובים היו

"נעצים וסיכות", "נעצים וסיכות" ו"נעצים וגפרורים". שאר התנאים היו זהים לחידה המקורית: כל

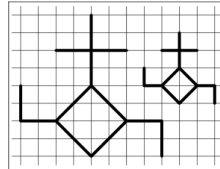
התגיות שגויות, ומותר להציץ רק בקופסה אחת. מה ששונה בחידה הזו הוא שהאוסף "נעצים וסיכות"

יכול להיות רק בקופסה עם התגית "נעצים וגפרורים". לכן אין טעם לבדוק את הקופסה הזו, כבר ידוע מראש מה יש בה, וצריך לבדוק אחת משתי הקופסאות עם הכיתוב הזהה. בחידה שלי כל הקופסאות היו באותו מעמד: אי אפשר היה לדעת מראש מה התכולה של אף אחת מהן, אבל אפשר היה גם להציץ בכל אחת מהן. אולי כדאי לחוד לילדים את החידה הזו במפגש הבא.

תרגיל 3. דמיון.

כל אחד קיבל דף משבצות ועפרון. ציירתי להם כמה צורות, והם היו צריכים לצייר אותן בגודל כפול, כמו באיור 88.

איור 88. הגדלת צורה על דף משבצות.



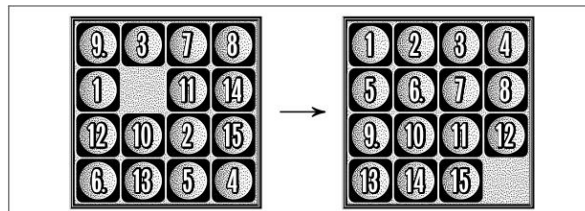
דימה פתר את כל התרגילים בלי טעויות, רק שלפעמים הצורות שלו (המוגדלות) עלו על שלי, כי הוא לא חישב מראש לכמה מקום הוא יזדקק. יבגני גם פתר לא רע – הוא אמנם עשה טעויות, אבל כשהראיתי לו אותן הוא תיקן. ולפיטר משום מה ממש לא הלך התרגיל הזה: הוא לא הצליח לפתור שום דבר, וגם לא לתקן טעויות שהראיתי לו. הסברתי לו מה עושים, ואפילו נטשה עזרה לו, אבל זה לא עזר. סיכמנו שנמשיך בפעם הבאה.

תרגיל 4. משחק ה-15.

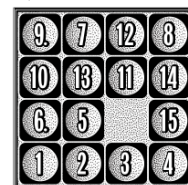
הסברתי להם את כללי המשחק, ואז חילקתי לכל אחד לוח באותו מצב התחלתי, וערכתי מעין תחרות ביניהם (למרות שאמרתי להם לא לנסות להשיג אחד את השני). עזרתי לכולם בחלקים המאתגרים.

משחק ה-15 הוא חידה מתמטית קלאסית שהומצאה על ידי סם לוויד בשנות ה-70 של המאה ה-19. נתון ריבוע בגודל 4x4, ובו 15 ריבועים שעליהם כתובים המספרים 1 עד 15. מקום אחד נשאר ריק. מותר להעביר למקום הריק כל אחד מהריבועים השכנים. מטרת המשחק – להעביר את כל הריבועים למיקום הסדרתי שלהם (איור 89). צריך לקחת בחשבון שניתן להגיע ללוח המטרה רק מחצאי מהמצבים ההתחלתיים; עבור החצאי השני זה בלתי אפשרי.

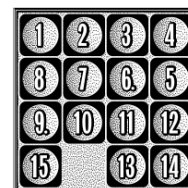
איור 89. המשימה: לעבור מהמצב ההתחלתי לסופי בעזרת הזזת הלוחיות.



פיטר סיים ראשון, ואחריו יבגני. דימה עבד יפה, אבל מההתחלה הוא לא ממש שם לב איך נראה לוח המטרה. הוא היה הראשון שסיים להרכיב שורה, אבל כשהסתכלתי על השורה הזו ראיתי שהוא סידר אותה למטה במקום למעלה:



הסברתי לו שוב את התרגיל, ואחרי כמה זמן הוא הראה לי את ה"נחש" הבא:



הוא נאלץ לתקן שוב את הפתרון שלו. הוא לא הסכים שאעזור לו, וסיים רק כשיבגני ופיטר כבר הלכו הביתה.

מפגש 56. קבלן בניין

שני, 1 בנובמבר 1982. 17:00-18:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

- (1) דימה, פיטר ויבגני קיבלו שני כדורים ומעדר. דימה ופיטר קיבלו חפצים זהים. מה כל אחד קיבל?
- (2) הם קיבלו גם שני עפרונות ועט, ודימה ופיטר קיבלו חפצים שונים. מה כל אחד קיבל?
- (3) ארבעתנו קיבלנו שלוש מכוניות ותוף. דימה ופיטר קיבלו חפצים זהים, ופיטר ויבגני קיבלו חפצים שונים.

(בחידה השניה יש יותר מאפשרות אחת).

תרגיל 2. החידה של דימה.

חדתי להם את החידה שדימה המציא – ראו במפגש הקודם, תרגיל 2. לא הלך כל כך טוב, בעיקר כי אף אחד מהילדים לא הצליח לזכור את כל שלוש הקומבינציות האפשריות.

תרגיל 3. הנפלת צורות (דמיון).

פיטר הבין את המשימה סוף סוף, ולקראת הסוף הגדיל צורות לא פשוטות בלי טעויות בכלל. אצל דימה זה היה הפוך: בהתחלה הוא פתר בלי טעויות, ואחר כך התחיל לצייר עקום, והיה קשה להבין אם הציור נכון או לא. יבגני, כמו בפעם הקודמת, פתר יפה עם טעויות פה ושם. הילדים נהנו מהתרגיל ולא רצו להפסיק, כך שציירתי לכל אחד שתי צורות יותר משתכננתי.

תרגיל 4. גרף רשת.

אני לא בטוח איך לקרוא לתרגיל הזה. המושג "גרף רשת" שאול מתורת חקר הפעולות, אבל בספר הלימוד "אלגוריתמיקה" קראנו לפרק הרלוונטי "תכנות מקבילי", שכן מדובר ב"משימות" שלפעמים יכולות להתבצע במקביל. קבוצת הבעיות של "קבלן הבניין" (עוד שם אפשרי) התבררה כעשירה ברעיונות; ביומן הזה אני מציג רק חלק קטן מהם.

לקחתי כמה צורות עץ ממשחק הקונסטרוקציה של דימה, ועל כל אחת כתבתי מספר. כל אחד מהילדים שימש כקבלן בניה. בהתחלה בנינו מבנה ממש פשוט (איור 90).

דנו בפירוט באיזה סדר אפשר להניח את הצורות, ולבסוף בנינו סכמה שמתארת את הסדר הזה (איור 91). (בשפה מדעית יותר, מדובר ביחס סדר חלקי ובהרחבות הלינאריות האפשריות שלו). צריך לציין שהילדים הבינו בקלות את השאלה לגבי סדר המשימות, אבל התצוגה הגרפית ששאלתי מתורת חקר הפעולות התבררה כלא כל כך מוצלחת. צריך לחשוב על זה.

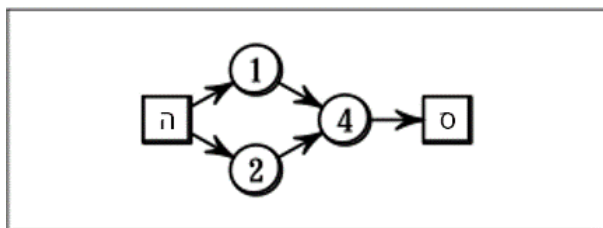
הסברתי לילדים את משמעות המיקבול של משימות 1 ו-2 (אפשר לבצע אותן בכל סדר שהוא באופן בלתי תלוי אחת בשניה, ואפשר גם באותו זמן, אם יש שני צוותים, אבל את משימה 4 אפשר לבצע רק אחרי סיום משימות 1 ו-2). כל אחד מהילדים קיבל דף וטוש, אני בניתי מגדל, הילדים ציירו גרפים מתאימים, דיברנו על הפתרונות וציירנו גרף סופי. המגדלים שבניתי והגרפים התואמים להם מתוארים באיור 92.

מפגש 57. מי יותר ניגצה, הטוד או הגרלוב?

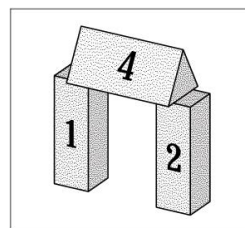
שני, 15 בנובמבר 1982. 17:30-18:30. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות על טרנזיטיביות.

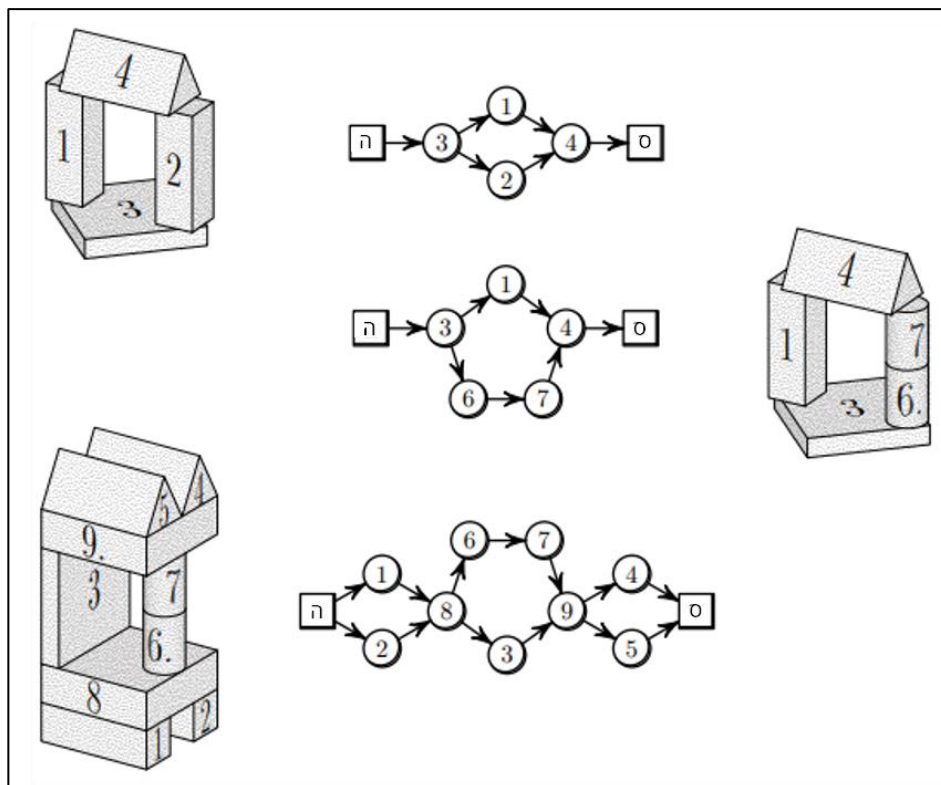
- (1) יוסי יותר ניגצה מדני, ודני יותר ניגצה מרותי. מי הכי ניגצה? דימה ענה נכון, אבל גם הוא וגם שאר הילדים לא הפסיקו לשאול מה זה "ניגצה".



איור 90. באיזה סדר ניתן להרכיב את החלקים האלה?
 איור 91. "גרף רשת" שמתאר את סדר הרכבת החלקים באיור 90. האותיות ה' ו-ס' מסמנות התחלה וסיום.



איור 90. באיזה סדר ניתן להרכיב את החלקים האלה?



איור 92. שלושה מבנים והגרפים המתאימים להם.

(2) הטוד יותר מוזלם מהחלען, והחלען יותר מוזלם מהגרלוב. מי הכי מוזלם? דימה פתר.

הייתי צריך לשאול כמה פעמים כדי לזכור את כל השמות ואת המילה "מוזלם". – דימה.

(3) רועי חזק יותר מיונתן. יונתן צעיר יותר מאיתמר. איתמר נמוך מרועי. רועי גדול בגיל מאיתמר.

איתמר יותר חלש מיונתן. יונתן גבוה יותר מרועי. מי מהילדים הכי חזק, מי הכי גדול, ומי הכי גבוה? כתבנו על שלושה דפים את האותיות הראשונות של שמות הילדים: ר, י, א, ועבור כל תכונה סידרנו אותם בסדר יורד ביחס אליה. בכל פעם הקראתי את כל הטקסט, והילדים היו צריכים לברור את המשפטים שקשורים לעניין. דימה לא הסתדר עם המשימה בכלל: בכל פעם הוא שכח איזו תכונה אנחנו בוחנים. בעיקר פיטר פתר את התרגיל.

תרגיל 2. צורות על דף משבצות.

בהתחלה, כמו קודם, נתתי להם להגדיל פי שניים צורה אחת; כולם פתרו בקלות. ואז אמרתי להם להגדיל אותה פי שלושה. דימה פתר באותה קלות. יבגני עשה שתי טעויות שהיה קל לתקן. ופיטר, להפתעתי, לא הצליח בכלל. זה מוזר במיוחד כי בהכפלה הוא הצליח לפתור מהר וטוב יותר מהאחרים.

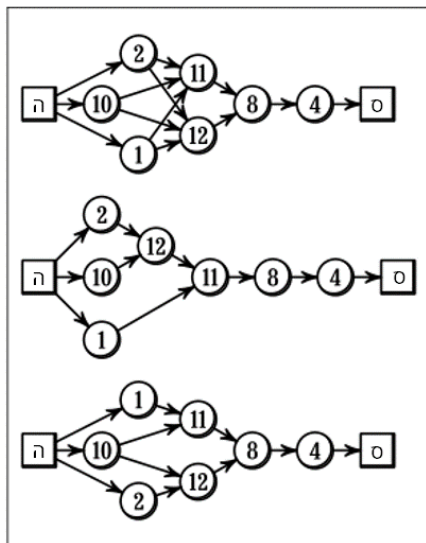
קשה לנסח את זה, אבל כנראה שילדים לומדים לפתור בעיות בדרכים שונות, איכשהו. נראה שבמקרה הזה דימה הבין את המבנה הלוגי של הבעיה, ופיטר קלט איזושהי סדרתיות מכנית של פעולות שמביאה לכדי פתרון, אבל לא יצק לתוכה משמעות. אני לא מצליח לנסח את המחשבה באופן מדויק יותר. אבל אני זוכר עוד מהתקופה שהייתי תלמיד שהייתי ממש גרוע בפיזיקה (גם היום אני לא מביין פיזיקה), ועם זאת איכשהו ידעתי לנחש מה ואיך צריך לכתוב במבחן כדי לקבל 5.

אחר כך אמרתי לילדים להשכיב את אותה צורה על צד ימין, על צד שמאל, ולסובב אותה ב- 180° . אחר כך הייתה עוד משימה: ציירתי צורה לא סימטרית, ואמרתי להם קודם לצייר את ההשתקפות שלה במראה אופקית, אחר כך לצייר אותה מסובבת ב- 180° – ואז להשוות בין הציורים. כמו שאפשר היה לצפות, זה לא הלך להם בקלות: הם לא הבינו מה ההבדל בין שתי הפעולות. אחרי כמה רמזים מצדי, דימה הצליח לפתור ראשון, והשאר העתיקו ממנו, אבל הבינו גם כן. אני מרגיש קצת לא בנוח שאני מחמיא פה לדימה יותר מלאחרים, אבל הוא באמת מצליח יותר מפיטר ויבגני (מה שאי אפשר להגיד לגבי חוג הציור או האנגלית, למשל).

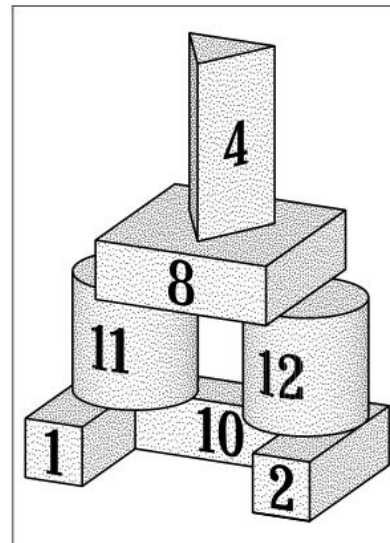
תרגיל 3. גרף רשת.

המגדל שהיה צריך לבנות מתואר באיור 93.

כל הילדים ציירו סכמות קבילות, כלומר כאלו שלא סותרות את מיקומי הצורות, אבל רק דימה צייר סכמה אופטימלית. כל שלוש הסכמות מוצגות באיור 94. הציורים בפועל היו קצת שונים – גם בגלל מיקום לא-מוצלח של המספרים, גם בגלל חוסר דיוק בציור, וגם כי ילדים לא תמיד יודעים להביע בציור יחסים לוגיים. הציורים שמוצגים כאן הם אלה שהתקבלו אחרי שדיברתי איתם על מה שהם ציירו. שימו לב שהפתרון של יבגני דרש הצלבה של חצים; הוא לא העז לעשות הצלבה כזו, ולכן קיבל ציור שגוי, אבל ההסבר המילולי שלו היה נכון, והוא הסכים עם הציור שלי. לדימה דווקא לא הפריעו ההצלבות, והוא צייר סכמה נכונה מבחינה לוגית עם חצים מצטלבים. הראיתי לו איך אפשר למקם את העיגולים כך שלא יהיו הצטלבויות. גם פיטר עבד בצורה אופיינית: הוא הבין שהפתרון שלו לא אופטימלי, אבל לא היה לו כח להמשיך לחשוב. מצד שני, הוא הבין טוב יותר מהאחרים את הלוגיקה ה"מודלית" של הסיטואציה: הוא הסביר שאפשר לבנות את המגדל לפי הסכמה שלו (היא לא סותרת את מיקומי הקוביות), ולכן הוא, כקבלן הבניין, יכול להורות לבנות אותו כך ולא אחרת. ההצלחה של דימה הייתה קשורה גם לזה שמתישוהו במהלך השבוע הוא בנה מיוזמתו איזשהו מגדל וצייר את הסכמה שלו.



איור 94. יבגני צייר את התרשים הראשון, פיטר את השני, ודימה את השלישי.

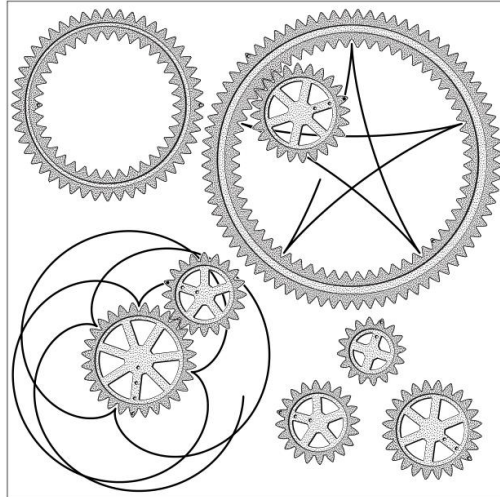


איור 93. המשימה: לבנות תרשים מתאים למגדל הזה.

הספירוגרף.

אחרי סיום המפגש שיחקנו במשחק ה"ספירוגרף" שנטשה הביאה, ובמשך הרבה זמן ציירנו כל מיני אפי-והיפוציקלואידים. דימה הציע הצעה מעניינת: במקום לסובב את הגלגל הקטן מסביב לגדול, כמו שכולם עשו, לסובב את הגדול מסביב לקטן.

ספירוגרף הוא אוסף של גלגלי שיניים וטבעות בקטרים שונים. אפשר לסובב אותם אחד מסביב לשני, ואת הגלגלים הקטנים אפשר לסובב גם בתוך הטבעות הגדולות. בגלגלים יש חורים במרחקים שונים מהמרכז. אפשר ליצור צורות מעניינות אם מקבעים גלגל אחד, מסובכים סביבו גלגל אחר, ומציירים בעפרון דרך אחד החורים האלה (איור 95).



איור 95. ספירוגרף וכמה ציורים שאפשר ליצור בעזרתו.

מפגש 58. תכנית אדריכלית

שני, 22 בנובמבר 1982. 17:15-18:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

להחליף את המשפט "לעשות שיהיה..." במילה אחת. למשל: לעשות שיהיה בית = לבנות בית. דוגמאות נוספות: עץ – לשתול, אור – להדליק, ספר – לכתוב, מרק – לבשל, ציור – לצייר, סדר – להשליט, חידה – להמציא, בור – לחפור.

אחר כך הצעתי לילדים להמציא דוגמאות בעצמם. דימה ישר קפץ:
– לעשות שיהיה דג.

כשראה את המבט המשתומם שלי, ענה בעצמו:
– התכוונתי "ללדת".

הדוגמאות הבאות התקרבו עוד יותר לשדות מוקשים. פיטר אמר:
– לעשות שיהיה ילד.

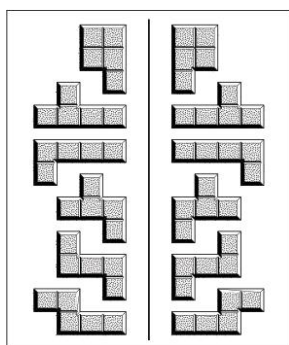
מיהרתי לפתור בעצמי:

– גם ללדת, – והסטתי את הדיון לנושא אחר.

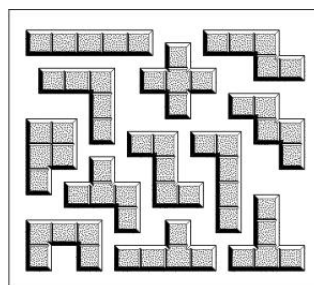
תרגיל 2. פנטמינו.

המשימה הייתה להרכיב צורה נתונה משתי לוחיות של פנטמינו. הילדים הרכיבו שש צורות, ועוד שתיים הראיתי להם בעצמי.

איור 96 מתאר את 12 הלוחיות של הפנטמינו. כל אחת מהן מורכבת מחמש משבצות. בדרך כלל, המשימה היא להרכיב מהן איזושהי צורה נתונה. הרמה של התרגילים האלה יכולה להיות קלה עד קשה ביותר. בפרט, אחרי שמוציאים את הצורות מהקופסה, לא כל כך להחזיר אותן לשם (יש שני גדלים של קופסאות: $12 \times 5 \times 10$). מהאיור ניתן לראות שלא כל הצורות סימטריות. אבל מותר להפוך אותן, ולקבל את הצורה הסימטרית להן (איור 97).



איור 97. כשהופכים צורה, מקבלים את הצורה הסימטרית לה. מותר להפוך צורות לצורך פתירת החידות.



איור 96. אוסף הלוחיות של הפנטמינו.

תרגיל 3. תכנית אדריכלית של חדר.

כל אחד מהילדים קיבל "חדר" – דף שעליו מצויר מלבן עם "דלת". חוץ מזה, כל אחד קיבל כרטיסים כטנים שייצגו ספה, שולחן סלון, פסנתר, שולחן, מדפים וכד'. היה צריך למקם את כל הרהיטים האלה ב"חדר" כפי שהיו ממוקמים בחדר שבו ישבנו. הילדים פתרו את המשימה כל כך מהר שנאלצתי להמציא להם משימה אחרת תוך כדי תנועה.

הבאתי לכל אחד דף וטוש, וביקשתי לצייר את התכנית של החדר. קשה לומר אם הם הסתדרו עם המשימה: המיקום של החפצים תאם למציאות, אבל היחס היה שונה ברמה פראית, במיוחד אצל דימה – הפסנתר שלו היה קטן יותר ממדף הספרים. בכלל הוא עבד בצורה די זרקנית, צייר הכל עקום, וכשהערתיו לו הוא צחק בתגובה.

לסיום הראיתי לפיטר וליבגני סביבון יפני שנעמד על הרגל (הוא מתואר באיור 98). אחרי המפגש, כשכולם הלכו, הראיתי לדימה את הספר "פולימינו" של גולומב, ובין השאר, הראיתי לו שלוש צורות שעד היום לא יודעים אם אפשר להרכיב אותן מפנטמינו. דימה אמר בלי היסוס, – אני אנסה, – והתיישב להרכיב אותן. אחר כך הוא המציא משימות בשבילי – הרכיב כל מיני צורות לא סימטריות בעליל (ביקש ממני לא להציץ), העתיק אותן לדרך משבצות, ונתן לי להרכיב.

איור 98. סביבון יפני. כשמסובכים אותו, הוא מתהפך ונעמד על הרגל שלו.

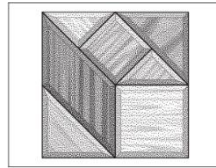


הפסקה ארוכה

המפגשים שלנו פסקו למשך מעל חודשיים. קודם היה לדימה ניתוח; אחר כך הוא חלה באבעבועות רוח; אחר כך ג'ני חלתה באבעבועות רוח; אחר כך היה הנובי גוד; אחר כך הילדים הלכו להצגה ולמסיבות נובי גוד אצל חברים, מה שלקח עוד שני ימי שני. כשסוף סוף היה אפשר לחזור למפגשים, גיליתי לחדדתי שירדתי מהמסלול וכבר שכחתי מה עשינו ומהו בכלל החוג שלנו. כך יצא שלא הספקתי להכין שיעור, והייתי צריך לדחות את המפגש בשבוע נוסף. למדתי מזה שלא כדאי לאפשר לעצמי הפסקות, וצריך לערוך מפגש כל שבוע, גם אם זה רק לשני ילדים או אפילו לילד אחד. מה עוד שסוניה (אחותו הקטנה של פיטר) חלתה באבעבועות רוח, כך שפיטר נכנס לבידוד, ואחר כך, לך תדע, אולי גם הוא יחלה... כך או אחרת, פיטר לא יגיע לפחות בחודש הקרוב.

בזמן הזה, דימה לא קפא על השמרים. במיוחד כשהוא חלה, הוא שיחק הרבה בפנטמינו ובפיתגורס.

ל"פיתגורס" יש מגוון גרסאות ושמות (אחד הנפוצים שבהם הוא "טנגרס"). מדובר בריבוע או מלבן שמחולק למספר חלקים, ואפשר להרכיב מהם צורות שונות. באיור 99 מופיעה הגרסה שהייתה אצלנו.



איור 99. משחק החשיבה "פיתגורס":
הריבוע מחולק לשבעה חלקים, וצריך
להרכיב מהם צורות שונות.

כהרגלו, הוא לא פתר תרגילים אלא המציא אותם. אבל המצאתי מהלך שרק עכשיו, כשאני כותב, אני קולט שהוא היה מהלך. התחלתי לרמוז לו אילו חידות אפשר להמציא. למשל:

– נסה להמציא חידה שבה צריך להרכיב מפנטמינו ריבוע בגודל 5×5 .
– איך?

הסברתי לו, והוא "המציא" חידה כזו בשמחה רבה, בלי לחשוך שהוא בעצם פותר אותה.

מבחינתי המצאתי (בעזרת אבא) חידות למישהו אחר. – דימה.

כך הוא הרכיב, בין השאר, סדרת מלבנים בגדלים 3×5 , 4×4 , 5×5 , 6×5 , 7×5 , ואז נמאס לו. חלק מהבניות שלו מוצגות באיורים 100-103.

ואז דימה החליט לפרסם את החידות שלו.

אחרת בשביל מי המצאתי אותן? – דימה.

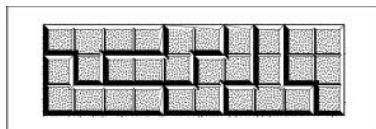
ניסיתי להוריד אותו מזה, אבל לא נשמעתי משכנע במיוחד, כי לא הייתי מסוגל להגיד לו את הטיעון העיקרי (זה לא מעניין אף אחד). ניסיתי גם לברר למה הוא כל כך רוצה את זה, אבל לא הצלחתי. כנראה שזה איזושהו רצון לזכות בתהילת עולם, אבל במובן שאני לא ממש מצליח להבין. שאלתי:

– אתה רוצה שיחמיאו לך על זה שהוציאו לאור את החידות שלך?

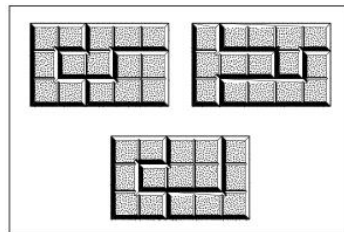
הוא ענה:

– אבל איך הם יכולים להחמיא לי אם הם לא מכירים אותי? (דהיינו, לא מכירים אישית).

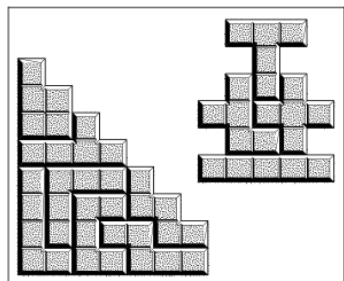
כנראה שהשיקולים שלו היו בסגנון "נעשתה עבודה, ואם לא נפרסם אותה היא תלך לאבדון, ומישהו אחר יאלץ לעשות אותה מחדש". חוץ מזה, ככל הנראה, הוא מדמיין את תהליך ההוצאה לאור כמשהו פשוט. הרי על המדפים מונחים ספרים שסבא שלו כתב, תרגומים של אבא ואמא שלו, ספרים של



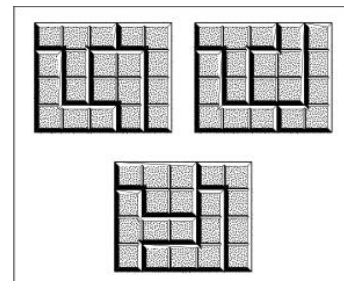
איור 101. מלבן בגודל 3×10 . שימו לב
שהוא לא מורכב משני מלבנים בגודל 3×5 .



איור 100. שלוש דרכים להרכיב מלבן
בגודל 3×5 מפנטמינו.



איור 103. שתי צורות מעניינות יותר.



איור 102. שלושה מלבנים בגודל 4×5
אפשר להצמיד לכל אחד מהם פס בגודל
 1×5 ולקבל ריבוע בגודל 5×5 .

ההורים של פיטר, ספרים של מיכאל שובין³⁰ וכד' – כולם אנשים שגרים בבניין שלנו, הורים של הילדים שאיתם הוא משחק, לומד ציור וכו'. יכול להיות שמבחינתו כך נראים חיי היומיום: אדם קם בבוקר, מצחצח שיניים, מסדר את המיטה, מוציא לאור ספר, מטייל עם הילדים, מכבס, וכו'.

פה אבא העריך את ההבנה שלי קצת יתר על המידה. אז עוד לא היה לי מושג מכל הספרים האלה. עם זאת, לא ראיתי שום קושי בהוצאה לאור. – דימה.

[זה לא מדויק. אני זוכר את דימה מראה לאלה את אחד מהספרים על המדף ואומר: – אמא, שם המשפחה שלך כתוב פה משום מה.

זו הייתה מונוגרפיה של סבא של דימה, ויקטור ירחו, על אייסקילוס. אני חושב שבאותו זמן דימה לא ייחס לזה חשיבות, ואחר כך שכח מזה. – א.א.].

מדהים כמה זה שונה מהילדות שלי. מבחינתי, סופרים היו קיימים באיזשהו יקום אחר, לא קשור ליקום שלנו. פעם, במפעל בויטבסק שבו אמא שלי עבדה, ארגנו מפגש עם איזה סופר סוג ג'. בסוף המפגש הוא חילק חתימות. אמא ניגשה אליו וביקשה ממנו לחתום על ספר בשביל בנה המצטיין. בערב היא הביאה הביתה ספר עם ההקדשה: "לתלמיד המצטיין אלכסנדר זבונקין, מהמחבר". לא האמנתי למראה עיני. סופר אמיתי הקדיש לי ספר!

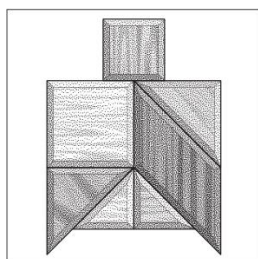
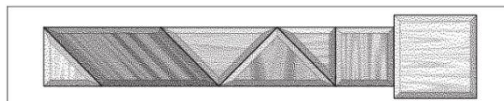
בסוף הסברתי לדימה שיש הורים שאוהבים להשווין בילדים שלהם, ואני לא רוצה שיחשבו עלי דבר כזה, ולכן אתן לו את העיתון "קוואנט", ואם הוא ימצא שם כתובת אז שיכתוב להם, אבל אני לא עוזר לו. טריק זול, אבל זה עבד. כמובן שהוא לא מצא כתובת, אבל הוא עבר בתשומת לב על כל הגליון, קרא את כל הכותרות, שאל אותי על חלק גדול מהן, ואחר כך אפילו דיבר עם אלה על כמה שהעיתון מעניין.

אחר כך הוא עבר ל"פיתגורס" והמציא כמה חידות לא רעות: הן מוצגות באיורים 104-106. הוא חשב ששתי הצורות הדומות באיור 105 הן זהות, מה שכמובן לא נכון. למשחק הייתה מצורפת חוברת עם כמאה חידות – צורות להרכבה. היו שם בעיקר ארנבונים, תרנגולים ופרות, אבל גם כמה צורות עם אופי יותר גיאומטרי, כמו אצלנו. התחלתי לחפש בחוברת את הצורות של דימה, אבל מצאתי רק צורה דומה בחידה מס' 87, וגם היא הייתה כזו שאי אפשר להרכיב. (שתיים מהצורות ב"פיתגורס" הן משולשים קטנים; את השאר אפשר לחלק לשניים או לארבעה משולשים כאלה; סך הכל יוצאים ששה עשר משולשים; צורה מס' 87 דרשה תשעה עשר). דיברתי על זה עם דימה.

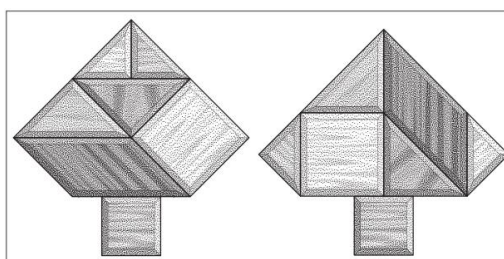
נדמה לי שלא הבנתי. – דימה.

[ברור שלא! בשביל להבין את ההסבר שלי צריך להבין את חוק שימור השטח. כל כך התעקשתי שבינתיים הוא עוד לא מבין את זה, ובזמן אמת – כלומר, כשהיה צריך להשתמש בחוק הזה – שכחתי מהכל. – א.א.].

איור 104. צורה שאפשר להרכיב מהחלקים של "פיתגורס".



איור 106. עוד תרגיל שדימה המציא.



איור 105. הצורות האלו דומות אבל שונות: הימנית רחבה יותר מהשמאלית.

³⁰ חבר טוב שלנו, מתמטיקאי. כיום הוא פרופסור באחת האוניברסיטאות בארצות הברית.

חוץ מזה, כשהתארחנו אצל חבר הוא הצליח לחלק 31 ב-4, וקיבל $7\frac{3}{4}$. מעניין שהתווים משיעורי הנגינה עוזרים לו לעבוד עם שברים שהמכנה שלהם הוא חזקה של 2, הוא עצמו שם לב לזה. היה גם נסיון משעשע מצדו להעריך את כמות האלפביתים האפשריים, כלומר את כמות הפרמוטציות מעל 22 אותיות. הוא חשב שיש 22 אותיות ו-22 מקומות, ולכן צריך להכפיל את המספרים האלה (את המכפלה הוא חישב לא נכון). אבל אז הוא נזכר שלאות השניה יש רק 21 אפשרויות, ולכן החסיר מהמכפלה 1. בהמשך הסברתי לו על $n!$, וכשהיינו אצלי בעבודה אפילו התחלנו לחשב במחשבון "איסקרה" כמה זה $22!$, אבל הגענו רק ל-18! עד ה-overflow.

אגב (כל הזמן אני נזכר בעוד משהו), באירוע לכבוד הנוכי גוד לילדי העובדים אצלנו, עשיתי לדימה ולעוד ילד סיור במרכז המיחשוב שלנו, שם הם ניקבו כרטיסי ניקוב – כל ילד כרטיס אחד.

מפגש 59. מה השני רואה

שני, 31 בדצמבר 1983. 16:00-17:00. דימה ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

קילו בשר דורש בישול של שעתיים. כמה זמן צריך לבשל חצי קילו? דימה:

– שעה.

– למה?

– בעצם לא, שעתיים.

– מה דעתך, יבגני?

דימה ממשיך:

– האמת, לא יודע, אולי פחות משעתיים. כי החום עובר יותר מהר. לא חתכו אותו, נכון?

– ואם כן?

– אז אותו דבר.

בינתיים יבגני מתעורר ומצטרף לדיון. הוא עונה:

– שעה.

– למה?

שתיקה.

– טוב, – אני אומר ליבגני, – נקניקיה אחת דורשת שתי דקות בישול; כמה זמן ידרשו חמש

נקניקיות?

יבגני חושב קצת ועונה:

– חמש.

– למה חמש?

– כי יש יותר נקניקיות!

– פי כמה יותר?

– אממ, פי שלושה...

אנחנו חוזרים לנתוני השאלה; אחרי איזה זמן יבגני אומר שעשר דקות, ומסביר שצריך לבשל אותן אחת אחרי השניה. דימה ונטשה מנסים להסביר לו את הפתרון. הוא מבין, אבל אין לו ההארה הזו של "אה, נכון!" – הוא מגיב במעיין משיכת כתפיים, "טוב, אז שתיים..."

בכלל, רואים שבית הספר הקהה אותו³¹. גם נטשה מודה שמאז שיבגני התחיל כיתה א' הוא התנוון; רואים את זה גם במקרה שלנו. לא מזמן אלה שמעה את דימה אומר לפיטר:

³¹ אני רוצה להעיר הערה חשובה בהקשר הזה. בהמשך אכתוב עוד הרבה עקיצות ביחס לבית הספר. אני לא רוצה למחוק אותן; כך באמת חשבתי והרגשתי אז. עם זאת, בהמשך רכשתי מעט נסיון בהוראה בבית ספר. אני לא יכול לומר שנקודת

– אתה יודע, אבא סיפר לי סיפור מצחיק, על איש אחד שהיה צריך ללכת 100 קילומטרים, ואחרי 99 קילומטרים הוא התעייף ואמר, "טוב, זה רחוק, אני חוזר".

פיטר ענה:

– כן, ברור, הרי יש לו רק קילומטר בדרך חזור.

ודימה צעק:

– מה פתאום! יש לו 198 קילומטרים לחזור!

קרובי משפחה של אלה מספרים משהו דומה לגבי האחיין שלנו, בוריס. עד כיתה א' הוא עבד בחופשיות עם מספרים תלת-ספרתיים, ובתחילת כיתה א' פתר בקלות מבחן של כיתות ד'. לקראת סוף כיתה א', הוא כבר שלט רק במספרים חד-ספרתיים. ועכשיו, בכיתה ג', הוא כבר לא ממש יודע לחשוב, וכשהוא פותר תרגיל הוא עסוק בעיקר בלנסות להכניס אותו לאחת התבניות שהוא מכיר. בעתיד הקרוב כל זה מצפה גם לנו; אני מקווה לאיזה נס עם דימה (שהוא ישתמר), אבל אין בסיס מציאותי לתקווה הזו, רק הרצון העז שלי שכך יהיה.

בינתיים אני צופה שיהיו קשיים בחוג. לדימה היה יתרון על פיטר ויבגני גם קודם, ועכשיו הוא מתקדם והם חוזרים אחורה.

תרגיל 2. משחק הסתברותי.

כל אחד מאיתנו (גם אני השתתפתי) הטיל קוביה שלוש פעמים והרכיב משלוש התוצאות מספר תלת-ספרתי. זה הלך ככה: תוצאת ההטלה הראשונה יכלה להיות או ספרת המאות, או העשרות, או האחדות – כלומר הוצבה באחת משלוש המשבצות של הלוח שמוצג באיור 107. תוצאת ההטלה השנייה הוצבה באחת משתי המשבצות שנשארו, והשלישית – במשבצת האחרונה שנותרה פנויה.

המנצח היה מי שיצא לו המספר הכי גדול. דימה היה הראשון שהמציא אסטרטגיה הגיונית: לשים מספרים גדולים בספרת המאות. עם זאת, מתוך תשעה סבבים יבגני ניצח בארבעה, אני בשלושה, ודימה בשניים. ההצלחה של יבגני קשורה בין השאר לשיטת הטלת הקוביה שלו: הוא החזיק אותה נמוך מעל השולחן עם המספר חמש למעלה, והשתדל שהיא לא תתגלגל כשהוא מטיל אותה (אני לא בטוח אם הוא לא העז או לא חשב לשים למעלה את המספר שש).

[אני רוצה להעיר בהקשר הזה שמציאת אסטרטגיה אופטימלית במשחק הזה היא בעיה לא קלה בכלל; אני עצמי לא הצלחתי לחשב כזו אפילו עבור שני שחקנים ומספרים דו-ספרתיים. לפחות עבור השחקן השני, לא מדובר במיקסום התוחלת. נניח למשל שיצא 5; האם כדאי להציב אותו בספרת האחדות או העשרות? התשובה תלויה במה שיש לשחקן השני במשבצת הראשונה. אם יש שם 6, אז אמנם נמקסם את התוחלת כשנציב 5 במשבצת העשרות, אבל נוריד את הסיכוי שלנו לנצח לאפס. אם נציב את ה-5 במשבצת האחדות, אנחנו עוד יכולים לקוות שבתור הבא הקוביה תיפול על 6 וננצח. והשחקן הראשון – האם הוא צריך למקסם את התוחלת, או שהאסטרטגיה האופטימלית שלו שונה? ככל שכמות השחקנים גדלה, המצב נהיה מורכב עוד יותר].

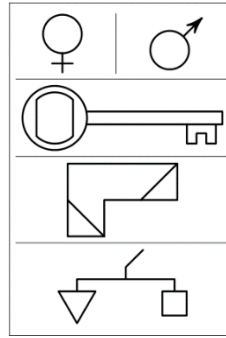
איור 107. לוח בשביל המשחק הסתברותי. מטילים קוביה ומציבים את המספר שיוצא באחת המשבצות; מטילים את הקוביה שוב ומציבים את המספר שהתקבל באחת משתי המשבצות שנותרו; מטילים פעם שלישית ומציבים את המספר במשבצת הפנויה האחרונה. מי שמקבל את המספר הכי גדול מנצח.



חידה 3. מה רואה מי שיושב מולנו?

הושבתי את דימה ויבגני אחד מול השני, ונתתי להם את המשימה הבאה: אני מניח ביניהם חמישה ציורים, והם צריכים לצייר את מה שרואה השני. הציורים שהשתמשתי בהם מופיעים באיור 108.

המבט שלי השתנתה לחלוטין; אבל היא הועשרה מאד בדקויות ובהבנה ברורה יותר של הבעיות בבתי הספר. הבעיות האלו כל כך סבוכות, שהיום אני מתפלא שבתי הספר מצליחים לפתור אפילו חלק קטן מהן, במיוחד לאור רמת האהדה הנמוכה מצד הציבור. מאנשים כמוני, לצערי, מורים שומעים רק ביקורת.



איור 108. מניחים כל אחד מהציורים על השולחן. המשימה של הילד: לצייר את מה שרואה הילד שיושב מולו.

הילדים פתרו לא רע, או לפחות טוב יותר משציפיתי, אם כי היו טעויות, כמובן. מטבע הדברים, המשימה הזו הייתה קשה להם יותר ממשימה אחרת שהם קיבלו בעבר: לצייר צורה מסובכת ב- 180° . הייתה פעם אחת שדימה התחכם וצייר את הצורה כמו שהוא רואה אותה, ואז סובב את הדף. אבל אפילו זה לא עזר לו להבין שהתרגיל שקול לתרגיל הפיכת הצורה. חוץ מהרעיון הגיאומטרי בתרגיל הזה, יש בו גם עניין של שיקוף ("מה האחר יודע?"). כבר מזמן אני רוצה להמציא תרגילים בנושא הזה, אבל אין לי רעיונות. בעצם, עכשיו צף לי כיוון: להראות כרטיסים עם מספרים כשצד אחד פונה לשחקן אחד והצד השני לשחקן השני. צריך לחשוב על זה.

ציורים מהספר "היסטוריה של המתמטיקה בבתי הספר" מאת גלייזר³² – תמונות של מספרים בתקופות שונות בהיסטוריה ובעמים שונים.

היו לי שתי מטרות. ראשית, אחת מהתכניות שלי, שאני עוד לא ממש מצליח לממש, היא להדגיש את התפקיד הסמיוטי של המתמטיקה, ובפרט, את הרעיון שאפשר להמציא מערכות של סימונים, שיכולות להיות מערכות סימונים שונות שמשרתות אותה מטרה, ובכלל, שהן קיימות וחשובות. המטרה השנייה – בעצם, לא ממש מטרה, פשוט החלטתי להראות לילדים יותר ציורים מכל מיני ספרים. זה נראה לי נכון גם בהיבט התרבותי, וגם כי זה עוזר לי להתמודד איתם כשהם עייפים לקראת סוף המפגש. נראה לי שאהפוך את זה למסורת.

מפגש 60. שיקוף

שני, 7 בפברואר 1983. 17:00-18:15. דימה ויבגני.

תרגיל 1. סידור כסאות.

אנחנו מגדירים דף נייר כ"חדר", וחילי משחק כ"כסאות". צריך לסדר ארבעה כסאות כך שליד כל קיר יעמדו שניים. דימה אומר שבוריס כבר פתר איתם את החידה הזו, ומניח כסא בכל פינה. אני מוסיף כסא חמישי (המשימה היא אותה משימה – ליד כל קיר צריכים לעמוד שני כסאות). הילדים פותרים (צריך להחליף כסא אחד שעומד בפינה בשני כסאות שעומדים ליד שני הקירות שנפגשים בפינה הזו). אני מוסיף כסא שישי; שוב פותרים. אני מוסיף כסא שביעי. פה הם כבר מתחילים להסתבך. הם לא החשיבו את הפתרונות עבור ששה ושבעה כסאות כתיקונים של הפתרונות הקודמים, אלא כפתרונות נפרדים שעומדים בפני עצמם. הם נצמדו לרעיון שצריך להצמיד כסאות לפינות, כך שבתור התחלה הם מיקמו בפינות מספר כסאות, אבל עבור שבעה כסאות, רק כסא אחד צריך לעמוד בפינה, כך שהם נתקעו. אחרי הרבה נסיונות כושלים הם כבר כמעט התייאשו, ואפילו כבר אמרתי להם שאני משאיר להם לחשוב על התרגיל הזה לבית, אבל אז דימה עשה נסיון אחרון, ופתר.

³² ג. גלייזר, "היסטוריה של המתמטיקה בבתי הספר, כיתות ד-ו", 1981; כנ"ל לכיתות ז-ח, 1982; כנ"ל לכיתות ט-י, 1983. מדהים: הורדתי מהמדף את הספרים, כדי לתת הפניה מדויקת – והסימניות מונחות בהם באותו מקום.

הוספתי כסא שמיני, וגם את החידה הזו הם פתרו (שוב דימה). הצעתי להוסיף כסא תשיעי; אף אחד לא היה בטוח שאי אפשר לפתור את זה, אבל כולם הסכימו שזה כנראה יהיה קשה.

תרגיל 2. רבוסים (חידות בציורים).

החידות היו פשוטות, מילה אחת בכל חידה: (1) מ, (מפסיק); (2) ח \triangle (חבית); (3) 100 רה (מערה); (4) מע | (מעקב).

את פתרון החידה הראשונה אני הסברתי להם, ואת השאר הם פתרו לבד.

תרגיל 3. משחק הסתברותי.

אותו משחק כמו בתרגיל 2 במפגש הקודם, רק שמי שהמספר שלו הכי גדול קיבל שלוש נקודות, מי שהמספר שלו שני בגודלו קיבל שתיים, וזה עם המספר הכי קטן קיבל נקודה אחת. כך המשימה הפכה לפשוטה יותר: כל אחד יכול היה לדאוג רק להגדלת המספר שלו עצמו, בלי להתייחס לאחרים. בעצם, זה לא כל כך פשוט: האסטרטגיה צריכה להיות תלויה במספר הנקודות. אם למשל מחליפים את המספרים 1, 2, 3 במספרים 0, 0, 1000 אז המשחק מתכנס למשחק הקודם. בקיצור, ה"תרגיל למבוגרים" נשאר בינתיים לא פתור.

אחרי תשעה סבבים היו לי 21 נקודות, לדימה 18, וליבגני 17. זה אומר שמישהו טעה בספירה, כי הסכום אמור להיות 54. אבל לא שמתי לב לזה בזמן אמת. חוץ מזה, הילדים השתוללו, כך שמיהרתי לעבור למשחק הבא.

ציורים של פאונים.

הסתכלנו על ציורים מהספר של ווינדגר³³ וקראנו את שמות הצורות. כמוכן שיחסית לצורות דמויות הכוכב, הפאונים הרגילים לא הרשימו אותם בכלל.

תרגיל 4. משחק השיקוף.

נתונים 12 קלפים. על ארבעה מהם כתוב המספר 1 בצד אחד והמספר 2 בצד השני; על עוד ארבעה כתוב 2 בצד אחד ו-3 בצד שני; על ארבעת הנותרים – 3 בצד אחד ו-4 בצד השני. תחילה אני מראה לילדים את הקלפים, ומסביר שבשני צדדים של קלף תמיד מופיעים מספרים עוקבים, ושהמספר הכי גדול הוא 4.

אחר כך אנחנו מערבבים את כל הקלפים ומניחים אותם בקופסה. הילדים מתיישבים אחד מול השני. אני מוציא קלף אחר קלף ומציג צד אחד שלו ליבגני ואת הצד השני לדימה. כל אחד מהם צריך להגיד איזה מספר רואה השני. כל קלף שהצגתי, הפכתי והחזרתי לתחתית הערימה, כך שאחרי 12 סבבים חזרנו לאותו משחק אבל הפוך, מה שהפך את המשחק ל"הוגן". היו במשחק כמה שלבים מובהקים.

(1) הם לא מבינים את המשימה, ואומרים את המספר שלהם במקום של השני.
(2) הם מבינים. מי שרואה 1 או 4 אומר נכון מה המספר של השני; מי שרואה 2 או 3 מנסה לנחש; אני מורה להם להגיד במקרה כזה "אני לא יודע".

(3) מי שרואה 2 (או 3) מבין שאם השני יודע מה המספר שלו סימן שיש לו 1 (4, בהתאמה). בינתיים עוד יש די הרבה טעויות; אני מגדיר כלל חדש: אם מישהו טעה, לא מחשיבים את הקלף. כמות הטעויות פוחתת.

(4) מי שרואה 2 (או 3) מבין שאם השני אומר "אני לא יודע", סימן שיש לו 3 (2, בהתאמה). דימה הבין את זה ראשון.

(5) נוצר מצב משעשע. יבגני רואה 2, ודימה 3. כל אחד מהם היה אמור להגיד "אני לא יודע"; מצד שני הם כבר יודעים מנסיון שאם הם ימהרו להגיד "אני לא יודע" אז היריב ינחש מיד מה המספר שלהם, בעוד שאם הם יחכו עד שהשני יגיד "אני לא יודע", הם ינחשו בעצמם את המספר שלו. לכן

³³ מ. ווינדגר, "מודלים של פאונים", 1974. לצורות שמתוארות בספר יש שמות מצחיקים: דודקאידודקהדרון ביטריגונלי קטן, אוקטהדר מעוקב גדול, איקוסידודקהדרון הפוך גדול וכד'.

שניהם מחכים: כל אחד רוצה להיות השני שיגיד. דימה פתאום מבין שאם ליבגני היה 4 הוא כבר מזמן היה מנחש מה יש לו, לדימה, והוא הרי שותק; סימן שהוא מחכה. דימה מכריז: 2! ויבגני, שמפרש את הבטחון של דימה באופן שגוי, אומר: 1! הם מבינים מה קרה וצוחקים. דימה מסביר:

— אני רואה שהוא (יבגני) מתלבט ומסתכל על אבא...

(6) ליבגני יש 1, לדימה 2. יבגני עושה מהלך מתוחכם: במקום להכריז מיד שלדימה יש 2 הוא מתלבט בתיאטרליות, ואפילו, לאור ההסבר של דימה, מגניב אלי מבטים. דימה נופל בפח ואומר שליבגני יש 3. פרץ התלהבות.

היה נדמה לי שיבגני לא באמת מתלבט. אבל אם הייתי אומר 1 אז הייתי עלול לטעות אחרי שבפעם הקודמת עבדתי נכון, וזה לא נעים. ואם עכשיו אני טועה בגלל אותה אסטרטגיה שגרמה לי לצדוק בפעם הקודמת, רק שהפעם היא לא עבדה, אז לטעות שלי יש הצדקה. — דימה.

אני מבין שהילדים הבינו את המשחק ומנסה לקטוע אותו. הילדים דורשים עוד. בסוף המפגש, אחרי שכבר שיחקנו עם הנחש של רוביק, הם מתיישבים מעצמם לשחק בזה שוב. אני מאד מרוצה מהתרגיל הזה, נדמה לי שזו אחת ההברקות המוצלחות שלי. חוץ מזה, אני שמח שהצלחתי ליישם את הרעיון של השיקוף (אם כי הרעיון הרבה יותר עשיר, ובטח אפשר לדלות ממנו עוד הרבה תרגילים). יש לתרגיל הזה חסרון טכני אחד: אפשר לשחק בו רק בזוג.

הנחש של רוביק.

הראיתי אותו לנטשה וליבגני והרכבתי ממנו כמה צורות, בין השאר את צורה מס' 86 מהספר של ווינינג'ר (רומבוהקסהדר קטן).
אחר כך, כמו שכתבתי, הילדים התיישבו לשחק בקלפים.

מפגש 61. איך סוכמים מספרים בלתי נראים?

שני, 14 בפברואר 1983. 10:00-18:00. דימה ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

(1) שני אבות ושני בנים חילקו ביניהם שלושה תפוזים, וכל אחד קיבל תפוז שלם. איך זה יתכן? הילדים לא פתרו את החידה הזו; התחילו להציע כל מיני שטויות. אז שאלתי משהו אחר:

(2) לאיש אחד היו ששה בנים, ולכל בן הייתה אחת אחת. כמה ילדים היו לו סך הכל? התשובה של הילדים הייתה, כמובן, 12. הבעיה היא שאני לא יודע מה עושים במקרים כאלה. שאלתי אותם כמה בנים וכמה בנות היו לאיש; אמרו שששה בנים ושש בנות.

— אז כמה אחיות היו לכל בן?
— שש.

— אז עכשיו תפתרו חידה כזו: לאיש אחד היו ששה בנים, ולכל בן היו שש אחיות; כמה ילדים היו לו סך הכל?
— אוי, זה מלא חישובים!

ניסיתי מכיוון אחר. קודם הראיתי להם איך יוצא $5-4=4$ (לוקחים 4 אצבעות ביד אחת, ועוד ארבע אצבעות באותה יד). אחר כך אמרתי להם ששתיים כפול שתיים הם ארבע, אבל שתי עשרות כפול שתי עשרות הן לא ארבע עשרות. דימה אמר שזה 40 עשרות.
— כלומר 400? — שאלתי.

הוא לא האמין לי שזה יוצא 400, התחיל לחשב, והגיע ל-280. שוב נתקענו. בסוף חישבנו נכון, אבל כולם כבר הספיקו לשכוח בשביל מה אנחנו מחשבים את זה. בקיצור, כשכבר הצלחתי לכוון אותם לפתרון הנכון של שתי החידות הראשונות, הם כבר איבדו עניין, ובסוף אף אחד לא היה מרוצה.

תרגיל 2. סכום מספרים בלתי-נראים (קסם).

נתונה טבלה עם מספרים, בגודל 12×12 במקרה שלנו. אני מסתובב עם הגב לילדים, והם מכסים בפס אטום ארבע משבצות רצופות – בשורה או בטור. אחרי זה אני מסתכל על הטבלה ומכריז מיד מהו סכום המספרים המכוסים. הטריק הוא שסכום כל חמישה מספרים רצופים בטבלה הוא 20. לכן, כדי לגלות את הסכום של ארבעת המספרים, צריך לחסר מ-20 את המספר הסמוך לפס (מימין או משמאל אם מדובר בשורה, ומלמעלה או מלמטה אם מדובר בעמודה). ר' איור 109.

הקסם הרשים את הילדים מאד. הם היו מסוגלים להאמין שלמדתי את הטבלה בעל פה, או שאני יכול לראות דרך הפס האטום, או כל דבר אחר.

דימה נדנד לי שאגלה לו את הטריק. לא גיליתי. בערב הוא התיישב לחקור את הטבלה. עוד לפני כן הוא שם לב שיש מחזוריות בשורות ובעמודות של הטבלה: אותם מספרים מופיעים כל חמש שורות וכל חמש עמודות. כך הוא למד למצוא פס של ארבעה מספרים שתואם לפס המכוסה, ולסכום אותם (איור 110). בעצם הוא למד לבצע את הקסם הזה, אבל ממש לאט.

לפני כן, בכל פעם שהוא הציע הסברים הזויים, חזרתי ושאלתי:

– נו, אז עכשיו אתה יכול לבצע את הקסם הזה? אם אתה חושב שפשוט למדתי בעל פה את כל המספרים, אז תלמד אותם גם אתה.

עכשיו, כשהוא באמת למד לבצע את הקסם וכבר כמעט הגיע למסקנה שאני פשוט יודע לחשב הרבה יותר מהר ממנו, גיליתי לו את הטריק.

תרגיל 3.

אותו משחק שיקוף כמו בפעם הקודמת, אבל עם תנאים מעט שונים: מי שעונה נכון ראשון מקבל שתי נקודות, מי שעונה נכון שני מקבל נקודה אחת. תשובה שגויה (או "אני לא יודע") מזכה ב-0 נקודות בכל מקרה. המשחק הסתיים בתיקו: כל אחד קיבל 28 נקודות.

יבגני נקט באסטרטגיה מעורבת: כשהוא היה רואה 2, הוא היה מכריז בבטחון או "3" או "1" – ולפעמים ניחש וקיבל 2 נקודות. הבטחון הזה היה מבלבל את דימה: למשל, דימה רואה 3, יבגני מכריז "3" בבטחון, ודימה אומר "4" ומקבל 0 נקודות. מעניין מה האסטרטגיה האופטימלית במשחק הזה.

תמונות.

הראיתי להם כמה תמונות מהספר "קוואנט" ומעוד כמה ספרים, בעיקר תמונות של פאונים. בין השאר, הראיתי להם את הציור המפורסם של קפלר (מ"ההרמוניה של העולם") עם הספירות והפאונים המשוכללים המקוננים זה בזה (הספירות מייצגות את מסלולי כוכבי הלכת).

לצער, הציורים לא עשו עליהם שום רושם, וגם לא הספירה הארמילרית של רגיומונטן (מהספר "מגלי השמיים" של ד. הרמן). אני לא מבין מה הסיפור, אבל האדישות שלהם ציערה אותי.

0	3	9	1	7	0	3	9	1	7	0	3	
4	5	2	8	1	4	5	2	8	1	4	5	
7	6	0	4	3	7	6	0	4	3	7	6	
8	4	6	2	0	8	4	6	2	0	8	4	
1	2	3					3	5	9	1	2	
0	3	9	1				3	9	1	7	0	3
4	5	2	8				5	2	8	1	4	5
7	6	0	4	3	7	6	0	4	3	7	6	
8	4	6	2	0	8	4	6	2	0	8	4	
1	2	3	5	9	1	2						
0	3	9	1	7	0	3	9	1	7	0	3	
4	5	2	8	1	4	5	2	8	1	4	5	

איור 110. הטבלה מחזורית, ולכן ניתן למצוא שורה וזה לזו שמוסתרת ולסכום את המספרים המוסתרים.

0	3	9	1	7	0	3	9	1	7	0	3
4	5	2	8	1	4	5	2	8	1	4	5
7	6	0	4	3	7	6	0	4	3	7	6
8	4	6	2	0	8	4	6	2	0	8	4
1	2	3					3	5	9	1	2
0	3	9	1	7	0	3	9	1	7	0	3
4	5	2	8	1	4	5	2	8	1	4	5
7	6	0	4	3	7	6	0	4	3	7	6
8	4	6	2	0	8	4	6	2	0	8	4
1	2	3	5	9	1	2	3	5	9	1	2
0	3	9	1	7	0	3	9	1	7	0	3
4	5	2	8	1	4	5	2	8	1	4	5

איור 109. סכום כל חמש משבצות סמוכות הוא 20. ניתן לחסר מ-20 את המשבצת שממאל למשבצות המכוסות ולקבל את הסכום (באיור הזה, 17).

מפגש 62. איזה חדר גדול יותר?

שני, 21 בפברואר 1983. 17:00-18:10. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלה מילולית.

הראיתי להם את שני הכרכים הראשונים של האנציקלופדיה שבארון הספרים שלנו, ואמרתי שבכל אחד מהם יש 600 עמודים. כמה עמודים יש בין העמוד הראשון של הכרך הראשון לעמוד האחרון של הכרך השני? (התשובה הנכונה היא 0). כמו שקורה הרבה עם שאלות מילוליות, השיחה התרחקה מהר מאד מעצם העניין. דימה חיבר $600+600$ וקיבל 1200; פיטר גם חיבר $600+600$ וקיבל 1002; הם התחילו להתוכח; יבגני שתק. הצעתי ליבגני להכריע. הוא אמר:

– לא נכון.

– מה לא נכון?

התברר שהוא הספיק לשכוח את נתוני השאלה (הוא חיבר בראש $60+60$; ליתר דיוק, לא חיבר אלא ישב וחיכה). אבל כשהזכרתי לו שבכל כרך יש 600 עמודים, הוא חישב נכון את הסכום והכריע לטובת דימה. ואז דימה החליט שבגלל ששואלים על העמודים שנמצאים בין העמוד הראשון לאחרון, צריך לא לספור את העמודים עצמם, ולחסר 2 מהסכום (אבל טעה בחיסור וקיבל 1180). יבגני הכריז שצריך לחסר 2 אלא 4 (כנראה התכוון שמדובר בשני דפים ולא בשני עמודים).

דיברנו קצת על זה שבספרים יש בערך 600 עמודים, וש-1200 פחות 2 זה בערך כמו 1200. אחרי זה הורדתי את הספרים מהמדף והראיתי להם את התשובה הנכונה: 0 עמודים. פיטר הבין ראשון. הסברתי לילדים שבשביל לדעת את התשובה הנכונה לא היה צריך לדעת את מספר העמודים בספרים.

תרגיל 2. איזה חדר גדול יותר?

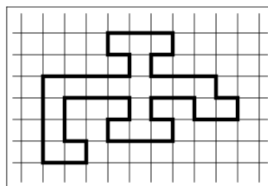
על דף משבצות מצוירים שני "חדרים". צריך להגיד איזה מהחדרים גדול יותר. לא הסברתי מה משמעות המילה "גדול", אבל דימה התחיל פשוט לספור את כמות המשבצות, והסביר שבחדר שיש בו יותר משבצות אפשר להכניס יותר דברים.

החדרים הראשונים היו מלבנים בגודל 3×5 ו- 3×6 ; אחר כך 3×6 ו- 5×3 (כלומר, המלבן השני מאונך). רואים שבדוגמה הראשונה משתנה רק מימד אחד, ובשניה גם משתנה מימד אחד וגם הכיוון של המלבן. בדוגמה השלישית המלבנים היו בגודל 3×6 ו- 5×4 (ואז דימה התחיל לספור משבצות). אחר כך היו כל מיני צורות מרכבות יותר, כולל כמה ממש מוזרות, כמו באיור 111.

עם זאת, הילדים פתרו נכון את כל הדוגמאות. ליתר דיוק, דימה ספר, יבגני אמר לפי העין (ולא טעה אפילו פעם אחת), ופיטר שתק.

לקראת הסוף דימה התחיל לצייר בעצמו חדרים-מבוכים, ובקושי הצלחתי לקטוע אותו.

איור 111. איזה חדר גדול יותר:
זה, או חדר מלבני בגודל 5×4 ?



תרגיל 3. קסם הקוביות.

הטריק של הקסם הזה ממש פשוט, והייתי בטוח שדימה יעלה עליו, כי לא מזמן סיפרתי לו שבקוביה סכום כל שתי פאות נגדיות הוא 7. אפילו אמרתי לו שאם ינחש, שלא יגלה לאף אחד. אבל הוא לא ניחש. הקסם היה כזה. נתתי לילדים שתי קוביות ויצאתי למסדרון. אמרתי להם להטיל את הקוביות ולחשב את סכום הנקודות, להפוך את שתי הקוביות ולחשב שוב את הסכום, ואז לסכום את שני הסכומים. נטשה וידאה שכל החישובים נכונים. כשהם סיימו לחשב, חזרתי מהמסדרון והכרזתי שהסכום הוא 14. אחר כך חזרנו על הקסם עם שלוש ועם ארבע קוביות (והסכומים 21 ו-28, בהתאמה). היה מדהים לראות את התגובה שלהם.

דימה היה נורא נרגש, ביקש להביא את הטבלה מהקסם הקודם והציג אותו לפיטר ויבגני, ואפילו ניסה לרמוז להם מה הטריק, אבל הצלחתי לעצור אותו. (זה מזכיר את הסוחר מהסיפורים של סלטיקוב-שדרין, שכל הסיפורים עליו מסתיימים באותו משפט: "גררו אותו משם בכח". אני צריך לשמוח בזה, כמוכן – בכל זאת, זה מראה עד כמה דימה מתעניין במתמטיקה. מצד שני, לפעמים יש לי ספקות: אולי אני מגזים? הרי הוא עוד לא בן 7).

אגב, נראה שלא הערכתי מספיק את הקושי של החידה עם הטבלה והקסם שלה. ביום שלישי דימה הראה את הקסם הזה לגרגורי הלפרין, ואפילו אחרי חצי שעה של מחשבה הוא לא הצליח להבין את הטריק³⁴. אחר כך, כשסיפרתי לו איך דימה פתר את זה, הוא התלהב ואמר שהוא יותר אוהב את הפתרון הזה, כי זה פתרון שהתגלה בעזרת מחקר ולא בעזרת ניחוש. אני חושב שאמשיך עם הקסמים.

תמונות.

הפעם עיינו בספר "עולם המראה", מאת ו. הילדה (על סימטריה). אבל לא הסתפקנו בזה. יש בספר צילומים של ניסויים עם שתי מראות. לקחתי את המראה מהמטבח, ושיחקנו בה ובמראה מהמסדרון – העמדנו אותן אחת מול השנייה, ואחת בזווית לשנייה.

מפגש 63. סיבתיות מול מקריות

שני, 28 בפברואר 1983. 15:18-15:17. דימה, פיטר ויבגני.

על המושג "קבוצה".

דיברנו על איך נקרא אוסף של הרבה פרות (עדר), הרבה ציפורים (להקה), הרבה פרחים (זר), הרבה ספורטאים (נבחרת) וכו'. אחר כך הסברתי שבמתמטיקה, כדי לא להתעסק בכל כך הרבה מילים שונות, משתמשים תמיד באותה מילה: קבוצה. לכן לא אומרים "זר פרות" או "להקת פרחים", אבל אפשר להגיד "קבוצת פרות" ו"קבוצת פרחים".

תרגיל 1. שאלה מילולית.

ילד אחד בוגר מאחותו פי שניים; לפני שנה הוא היה בוגר ממנה פי שלושה. איך זה ייתכן? לילדים היו הסברים יצירתיים להפליא: זה ילדים אחרים; האחות היא בת מאמא חורגת; הילד אכל מעט ולכן גדל לאט יותר (דימה שאל: "הוא בוגר ממנה בגיל או בגובה?"). אחרי שפסלתי את כל ההסברים האלה, הם אמרו שזה לא ייתכן.

ההמשך (ראו תרגיל 4) הראה שהם לא יודעים מה המשמעות של "בוגר פי שניים" ו"בוגר פי שלושה". בפרט, פיטר סיפר להורים שלו את החידה הזו כך:

– ילד אחד בוגר מאחותו בשנתיים, ולפני שנה הוא היה בוגר ממנה בשלוש שנים...

תרגיל 2. גזר דין מוות, או: איך להשפיע על סיכויי ההצלחה שלך.

אחד הילדים ("התליין") יצא למסדרון; השני ("הנאשם") קיבל שמונה כדורים: ארבעה לבנים וארבעה שחורים. הוא היה צריך לחלק את הכדורים האלה בין שתי קופסאות. אז התליין היה חוזר, בוחר אחת מהקופסאות, ומוציא מתוכה כדור, בלי להסתכל. כדור שחור סימל תליה, ולבן סימל חנינה. כל אחד עבר את התהליך הזה שש פעמים, ובשביל לא לשכוח מה היה, קיבל אסימון שחור על כל תליה ולבן על כל חנינה.

דימה "הוצא להורג" 3 פעמים, פיטר גם 3, ויבגני פעמיים. פיטר בחר מההתחלה באסטרטגיה האופטימלית: בקופסה אחת הוא הניח כדור לבן אחד, ובשניה – שלושה לבנים וארבעה שחורים. כך סיכויי החנינה שלו היו $\frac{5}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$, והסיכוי להתלות היה $\frac{2}{7} = 1 - \frac{5}{7}$. אבל אחרי שני הסבכים

³⁴ ג. הלפרין הוא גם מתמטיקאי מעולה (כיום פרופסור באוניברסיטת שיקגו), וגם חובב חידות מושבע.

הראשונים, התוצאה שלו הייתה 1:1, יותר גרועה מהתוצאה של יבגני ששיחק בלי שום אסטרטגיה הגיונית אבל ניצח בשני הסבבים הראשונים. דימה בחר באסטרטגיה הכי גרועה: בקופסה אחת הוא שם כדור שחור אחד ובשניה את השאר (כך שהסיכוי שלו להנצל היה $\frac{2}{7}$, והסיכוי למות היה $\frac{5}{7}$). פיטר אפילו אמר לו באחת הפעמים:

— אוי, דימה, מה עשית לעצמך!

ועם זאת, התוצאה שלו הייתה 1:1, כמו של פיטר. זה היה קשור גם לזה שיבגני, כתיילין, הציץ בקופסאות לפני ששלף מהן כדור.

אני מאמין שההגיון של דימה היה בערך כזה: אולי יהיה לי מזל והקופסה עם הכדור השחור לא תיבחר; במקרה הזה, בקופסה השניה יהיו פחות כדורים שחורים מלבנים (ואם לא יהיה לי מזל ויבחרו את הקופסה הראשונה אז אין מה לעשות; בסופו של דבר, בכל אחד מהמקרים יכול להיות חוסר מזל). בהתאם ללוגיקה הזו, הוא שיפר מעט את האסטרטגיה שלו בהמשך: הוא הניח בקופסה הראשונה קודם שני כדורים שחורים, ואחר כך את כל הארבעה; כך הוא למעשה עבר מהאסטרטגיה הכי גרועה לאסטרטגיה בינונית, עם סיכויים שווים לניצחון ולהפסד. כרגיל, פיטר שינה בעקבותיו את האסטרטגיה שלו, ודירדר אותה מהאופטימלית לאותה אסטרטגיית ביניים. הוא שם לב (לדבריו) שהקופסאות הן בצבעים שונים, אחת כחולה והשניה סגולה, וכולם בוחרים את הקופסה הסגולה. אז הוא התחיל להניח בה שני כדורים לבנים.

יש לחידה הזו (ליתר דיוק לא לחידה עצמה, אלא ליישום שלי) שני חסרונות. הראשון הוא הסובייקטיביות שבבחירת הקופסה (יבגני שם לב שבוחרים יותר בסגולה; אני עצמי שמתי לב שבוחרים יותר בשמאלית). היה כדאי לעשות שתהליך הבחירה יהיה יותר אובייקטיבי, למשל, לבחור קופסה בהטלת מטבע. השני: הילדים לא רואים את הכדורים שבקופסאות, ולכן הם לא יכולים לעקוב אחרי "התפתחות העניינים". צריך לחשוב על זה עוד.

תרגיל 3. קסמים עם מספרים (ר' עמ' 97)

הצגת הקסם נתקלה בקשיים לא צפויים: פיטר ויבגני שכחו חשבון. כשאמרתי "תכפילו ב-2", הם לא הבינו מה אני רוצה. כשאמרתי "תחלקו ב-2", פיטר דמיין שני חצאים, אבל דמיין אותם ביחד, ואז כשאמרתי "תוסיפו 1" הוא לא הבין למה צריך להוסיף (לחצי אחד? לשניהם?).

צריך לציין שדימה הציג בעצמו את הקסם, ועשה את זה לא רע: הציג מהלכים די מתחכמים ולא טעה בחישובים. הוא רצה מאד לגלות לכולם מה הטריק, וכשלא הרשיתי לו, הוא הציג את הקסם האחרון כך: "תחשבו על מספר, תוסיפו 1, תחסרו את המספר שחשבתם עליו, קיבלתם 1". אבל נראה לי שלא הבינו אותו.

התברר גם שמתישוהו במהלך השבוע דימה סיפר לפיטר מה הטריק של הקסם עם הטבלה. פיטר ביקש להביא את הטבלה והציג את הקסם ליבגני. דימה גם רצה, אבל יבגני חתך אותו בגסות: — אותך כבר ראיתי.

אחרי המפגש פיטר ביקש לשאול את הטבלה כדי להראות את הקסם להורים. אני חושב שלמען ההוגנות צריך לגלות את הטריק גם ליבגני.

ריצוף (תמונות)

לסיום, הראיתי לילדים "ריצופים" סימטריים (מילויים של משטח), מתוך הספר "הקלידוסקופ המתמטי", מאת ג. שטיינהאוס, וגם את "ריצוף הלטאות" של אשר.

כשפיטר ויבגני התארגנו לצאת, חדתי להם חידה מהספר של טרודנייב, שכבר חדתי קודם לדימה: ישבנו בקרחת היער, / דיברנו על הא ועל דא, / לפתע חלפו על פנינו / ארנבות, ברווזים וחידה: / לכל החיות גם יחד / אחד עשר זנבות / וגם שלושים רגליים — / כמה מהן ארנבות? התרגיל שעשע אותם, אבל אף אחד לא חשב להתעמק בתוכן שלו; יבגני רק התעקש שצריך לחלק 11 ב-2, וכשהסברנו לו שזה יוצא חמש ארנבות וחצי הוא שאל בפליאה מה עוד אפשר לעשות. אחר כך הוא התקשר כדי לברר כמה בדיוק זנבות היו וכמה רגליים — אני חושד שבהשפעת ההורים שלו.

מה שאני אוהב בדימה זה שהוא באמת חושב אחר כך על החידות שהוא לא הצליח לפתור. בפרט, ביום שלישי הוא פתר בעצמו את תרגיל 1 (הוא ניסה להסביר לאלה שזה לא אפשרי, התחיל לתת דוגמאות, ומצא במקרה את הדוגמה של הגילאים 9, 3 שהופכים ל-12, 6).

הבנתי שמקבלים יחס אחר כשראיתי שעוד שנה הילדים יהיו בני 10 ו-4, 10 ו-10 לא מתחלק ב-4. אבל לא הייתי בטוח. כשכבר השתכנעתי שהיחס משתנה לא היה לי כח להמשיך לחשוב על זה. למרות שהחידה אומרת שהילד נהיה בוגר פי שניים מהילדה אחרי שנה ולא אחרי שלוש, הייתי די מרוצה מהפתרון שלי. – דימה.

חוץ מזה הוא הכריח את אלה לשחק איתו במשחק עם הכדורים, אבל האסטרטגיה הכי טובה שהוא הגיע אליה הייתה לשים כדור לבן וכדור שחור בקופסה אחת, ו-3 לבנים ו-3 שחורים בשניה. קרה משהו משעשע גם בעבודה: סיפרתי לחברים על הקסם עם המספר שחושבים עליו, אבל אף אחד חוץ ממישהי אחת לא הצליח להבין מה הטריק. להפך, כולם היו בהלם שאני מצליח לנחש את התוצאה. אלה שמה לב שהתגובה של הבנים בסוף המשחק עם הכדורים הייתה מאד אופיינית. אמרתי להם שאני לא אגלה להם מה האסטרטגיה הכי טובה, אבל אחד מהם שיחק בה כמה סבבים. פיטר הגיב:

– זה בטח אני.

ודימה אמר:

– זה בטח יבגני.

(ליבגני היו הכי מעט אסימונים שחורים).

– ומישהו מכם, – המשכתי, – שיחק כמה סבבים באסטרטגיה הכי גרועה.

פיטר הגיב:

– זה בטח אני.

ויבגני אמר:

– זה בטח דימה.

מה שמשקף היטב את האופי של כולם.

מפגש 64. שוב נלחמים בסיכויים

שני, 14 במרץ 1983. 17:00-18:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1

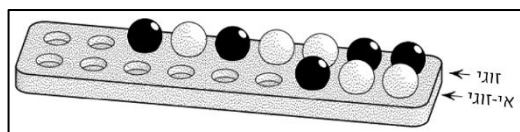
הזכרתי לילדים את החידה עם האח שגדול מאחותו פי שלושה, ואחר כך פי שניים, וביקשתי מדימה לספר מה הפתרון. הוא אמר את שני הפתרונות שהוא המציא: $(4,2)=1+(3,1)$ ו- $(12,6)+3=(9,3)$. מתברר שפיטר כבר ידע את הפתרון – דימה הספיק לספר לו, ויבגני היה מאד מופתע ולא הפסיק לשאול איך זה יכול להיות.

תרגיל 2. גזר דין מוות עם "בחירות שקופות".

הזכרתי להם את המשחק עם התליין, אבל שיניתי לחלוטין את היישום הפיזי שלו: לקחתי את הלוח עם החורים מהמשחק mastermind, ועשרה כדורים מהמשחק הזה: חמישה לבנים וחמישה שחורים (כלומר, הגדלתי את מספר הכדורים מכל צבע מארבעה לחמישה). במקום לשים את הכדורים בקופסאות, שמים אותם בשתי שורות, והילדים רואים אותן. כך, כל תהליך הבחירה האקראית קורה מול העיניים שלהם (איור 112).

המקריות עצמה ("התליין") נובעת מטבלה של מספרים אקראיים. הספרה הראשונה אומרת לנו באיזו שורה להסתכל, בהתאם לזוגיות שלה. אם בשורה שנבחרה יש, למשל, שבעה כדורים, אנחנו בוחרים את המספר הראשון בטבלה שנמצא בתחום המספרים 1-7, והוא מגדיר לנו את מספר הכדור שנבחר.

איור 112. בוחרים שורה בהתאם לזוגיות של המספר האקראי. אם אנחנו בשורה הראשונה, בוחרים מספר אקראי נוסף בין 1 ל-7, ואם בשניה – בין 1 ל-3. אם הכדור שהתקבל שחור, הפסדנו, ואם לבן – ניצחנו.



כל אחד מהילדים מיקם את הכדורים איך שרצה, ואז שיחקנו עשרה סבבים ורשמנו את התוצאות. לבקשת דימה, סימנו חנינה באיקס, ותליה בעיגול. דימה שיחק ראשון. הוא חילק את הכדורים ל- $[2,3]+[3,2]$; התוצאה הייתה 5:5. הבא בתור היה יבגני. הוא התלבט הרבה, הזיז כדורים לפה ולשם, ובסוף עצר ב- $[2,3]+[3,2]$. רמזתי לו שזה אותו סידור שדימה עשה, אבל שיחקנו, והתוצאה הייתה 3:7, כלומר 3 חנינות ו-7 תליות. ואז פיטר גם שם $[2,3]+[3,2]$! הייתי די המום. הסברתי שוב שהרגע בדקנו פעמיים את הסידור הזה, ושראינו שהוא או נייטרלי או לא טוב.

אבא חזר כמה פעמים על זה שהסטיסטיקה מראה שהסידור הזה קצת הפסדי, וזה בלבב אותי לגמרי. ניסיתי לחשוב על סיבות לזה שהסידור הפסדי למרות שהוא סימטרי.

למרות זאת שיחקנו שוב; התוצאה הייתה 5:5. שוב היה תור דימה, והוא ניסה את הסידור הגרוע והחביב עליו: $[0,1]+[5,4]$ (כלומר כדור שחור אחד בנפרד, ושאר תשעת הכדורים בשורה השניה). ההדגמה הייתה יעילה למדי: הוא הפסיד בכל עשרת הסבבים. כולם השתעשעו מזה, כולל הוא עצמו. לקראת הסוף הייתה לו הארה והוא אמר:

— אה! אני יודע איך אני אשחק בפעם הבאה! — היה ברור שהוא הבין באותו רגע מה הפתרון. התור עבר ליבגני והוא שוב סידר $[2,3]+[3,2]$. אפילו דימה התפלא ואמר: — שוב אותו דבר!

ואני עצמי די התבאסתי. שיחקנו שוב, שוב יצא 5:5. החלטתי לדבר הפעם יותר בפירוט, והתחלנו לדון בפתרון הזה. בין השאר, סכמנו את תוצאות כל המשחקים באסטרטגיה הזו, יצא 22:18. כך שצריך לנסות משהו אחר, כך אמרתי, צריך לחשוב, ולא רק לבנות על המזל. יבגני, למשל, בנה על המזל... — ולדימה יצא יותר גרוע, — העיר יבגני.

הסכמתי, ואמרתי שמצד שני דימה ניסה משהו חדש, ושהוא "שילם בחייו" כדי למצוא פתרון טוב, והוא עוד יראה אותו בהמשך. ככה דיברתי כחמש דקות. הבא בתור היה פיטר. לתדהמתי וליאושי הוא שוב הלך על $[2,3]+[3,2]$.

להקלתי. כל הזמן הזה חשתי שעוד משהו הבין מה הפתרון הכי טוב, ושלא אהיה ראשון. כדי שאף אחד לא יחשוב על הפתרון שלי, ניסיתי לעשות את עצמי כאילו לא המצאתי שום דבר מיוחד (למרות שהשיניים שלי נקשו מהתרגשות). המשפט שלי "שוב אותו דבר!" נבע מאותה העמדת פנים: הנה תראו, הכל כרגיל, אני אפילו מתפלא ששוב אותו הדבר. אבל אז אבא התחיל להגיד לכולם שהמצאתי פתרון טוב! רק כשפיטר שם $[2,3]+[3,2]$ נרגעתי. — דימה.

לא הצלחתי להתאפק מלהעיר:

— גם פיטר מעדיף להסתמך על המזל ולא לחשוב על פתרון יותר טוב. טוב, פיטר, זה הראש שלך וגזר הדין שלך, בעיה שלך.

פיטר רק ציחקק בתגובה, ויבגני אמר:

— לדימה יצא עוד יותר גרוע!

שיחקנו. התוצאה, כרגיל, 5:5.

שוב תור דימה. כמו שציפיתי, הוא שיחק הפעם בסידור האופטימלי $[1,0]+[4,5]$ — וניצח 9:1. יבגני אמר שהוא גם רוצה לשחק ככה, וגם ניצח 9:1. לבסוף גם פיטר שיחק בסידור הזה, וגם ניצח, אבל רק 4:6. אחר כך חישבנו את הסטיסטיקה הכוללת וקיבלנו 24:6.

זה הפתיע אותי: הרגע התחרינו, ועכשיו פתאום סוכמים את התוצאות של כולם. — דימה.

נשים לב שהסיכוי לניצח באסטרטגיה הזו הוא $\frac{13}{18} < \frac{24}{30} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$, כך שהמזל

שיחק לנו קצת בזה שהיתרון של האסטרטגיה הזו היה מובהק יותר.

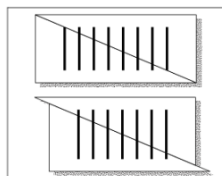
כמו שקרה גם בעבר, הבנתי משהו אחרי שהמפגש הסתיים: הילדים התווכחו הרבה על איך כדאי לסדר את הכדורים בתוך השורה. כך שהייתי לא כל כך הוגן, ואולי אפילו מאד לא הוגן, כשהחשבתי את כל הסידורים $[2,3]+[3,2]$ כאותו סידור — יכול להיות שבעיניהם אלה היו סידורים שונים לחלוטין. יכול להיות שהם אפילו ניסו לראות, כמו במשחק רולטה, איזה מספרים יוצאים יותר מאחרים, וניסו להציב

את הכדורים במקומות האלה. אם זה כך, אז לצערי פספסתי את זה לחלוטין בזמן המפגש. הידע שלי – שמוכן מאליו שהסידור הפנימי לא חשוב – סינוור אותי. ביחס לתופעות של פיאז'ה, הספרות הכינה אותי למה אפשר לצפות, כלומר לתגובות נורמליות של ילדים נורמלים. אבל לא היה לי שום רקע שנוגע ליחס של ילדים למקריות, כך שדי מהר הפכתי למורה סטנדרטי שיודע מה נכון ודורש מהילדים רק להשמע לידע שלו.

קסם גיאומטרי.

התרגיל הקודם לקח כמעט שעה, כך שלא היה לנו זמן לתרגיל נוסף. בחמש הדקות שנותרו הספקתי להראות לילדים את הקסם הבא. ציירתי על דף מספר קווים מקבילים, ואז גזרתי את הדף לאורך האלכסון שעובר בקצה העליון של הקו השמאלי ביותר ובקצה התחתון של הקו הימני ביותר. הסטתי את החצאים אחד לכיוון השני, כמו שמתואר באיור 113, כך שמספר הקווים קטן באחד. הילדים עלו על הטריק בקלות, ובזה הסתיים המפגש. – מה עם תמונות? – שאל פיטר. הבעיה היא שהתמונות שרצייתי שנעייין בהן היו קשורות לתרגיל שלא הספקנו לפתור. הסברתי את זה לילדים והבטחתי להם שבמפגש הבא אראה להם אותן.

איור 113. שמונה קווים הפכו לשבעה. לאן נעלם השמיני?



מפגש 65. הומומורפיזם

שני, 21 במרץ 1983. 10:17-10:16. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. קטעי סיכויים.

חזרנו לתרגיל עם התליין ועשינו מעיין חישוב של סיכויי החנינה. כמובן שלא היה מה לדבר על חיבור שברים, ובטח שלא על שימוש בנוסחת ההסתברות השלמה. אבל השתכנעתי שאינטואיטיבית הם מבינים את הנוסחה הזו. מה שעשיתי היה כך: הכנתי הרבה פסי נייר ברוחב ס"מ וחצי ובאורך 40 ס"מ. באמצע כל פס היה קו שחילק אותו לשני חצאים זהים, באורך 20 ס"מ כל אחד – כך סימנתי שהסיכוי לבחור כל אחת מהקופסאות הוא חצי. אחר כך חילקתי כל חצי לכמות שונה של חלקים – למשל, את החצי השמאלי לשני חלקים שווים, ואת הימני לשמונה, או את החצי השמאלי ל-3 ואת הימני ל-7, וכיוצא בזה גם פסים שבהם חצי אחד לא היה מחולק בכלל והשני היה מחולק לתשעה חלקים.

הילדים מיקמו את הכדורים, כל אחד בתורו, ואנחנו "חישבנו" את סיכויי הנצחון וההפסד: גזרנו את הפס באמצעו, ואז כל חלק גזרנו בהתאם ליחס בין הכדורים הלבנים לשחורים בקופסה המתאימה. אחרי זה הנחנו את החלקים ה"לבנים" של הפס משמאל, ואת ה"שחורים" מימין. כך היה אפשר לראות, ויזואלית, איזה פתרון מוצלח יותר ואיזה פחות – פשוט על ידי השוואת אורכי הפסים.

צריך לציין ששני רעיונות נשארו קצת מעורפלים. ראשית, פיטר עוד לא לגמרי הבין את ההבדל בין חוק שימור הכמות לחוק שימור האורך (עסקנו בזה בזמנו בנפרד – ראו את התרגיל על השבילים הארוכים והקצרים במפגש 51; בזמנו רק יבגני הבין את ההבדל). פיטר התווכח איתי, טען טענות כמו "כאן יש חמישה סיכויים, וגם כאן יש חמישה", כשהוא מצביע על פסים באותה כמות אך באורך שונה. ניסיתי להסביר לו את העניין אבל אני לא חושב שהוא הבין.

שנית, הילדים עדיין ניסו לשחק עם מיקומי הכדורים בתוך כל שורה. חשבתי לגזור, ננית, מתוך תשעת החלקים של החצי המתאים, לא את ארבעת החלקים הראשונים, אלא את ארבעת החלקים שתואמים למיקומים של הכדורים הלבנים – כדי שהם יראו בעצמם שזה חסר משמעות. אבל חששתי שהתרגיל יהפוך לארוך ומשעמם מדי.

שכחתי לציין שלפני התרגיל הראיתי להם תמונה מהספר של קון, "אגדות ומיתוסים של יוון העתיקה", שבה מתואר הרמס כשהוא שוקל במאזניים את גורלם של אכילס וממנון, כדי להכריע מי מהם ניצח. אמרתי להם שבגלל שאין לנו מאזניים, אנחנו נשווה את התוצאות לא לפי משקל אלא לפי אורך.

תרגיל 2. הומומורפיזם של אותיות.

אומרים שזה תרגיל שו. ארנולד אוהב לתת לסטודנטים: צריך למיין את אותיות הא"ב לפי שקילות טופולוגית. בהתחלה ניסיתי לתת להם הסבר אינטואיטיבי של התרגיל, ואמרתי שהצורות שאצייר עשויות מחוט מתכת גמיש שאפשר לקפל, ליישר, לכווץ ולמתוח, אבל אסור לחתוך ולהדביק. אחר כך כל אחד מאיתנו צייר צורה הומומורפית למעגל. ואז התחלתי לכתוב את האותיות בזו אחר זו, ובכל פעם שנתקלנו באות הומומורפית לאות שכבר הופיעה, כתבנו אותה בטור המתאים, כמו בטבלה 4. חלק מהאותיות כתבתי בשתי גרסאות; למשל את האות פ"א אפשר לכתוב בשתי דרכים: פ או פ. במקרה הראשון היא שייכת לקבוצה של האות ו"ו; במקרה השני היא שייכת לקבוצה של האות ב"ת. לפעמים, תוך כדי דיון, קראתי בכוונה למשולש עיגול וכד'. צריך לציין שהילדים התמודדו עם התרגיל מצוין, הרבה יותר טוב משאפשר היה לצפות. הגענו לאות עי"ן. אני מתכנן להמשיך את התרגיל הזה במפגש הבא, ולהוסיף לרשימה גם את האלפבית הלטיני.

א	ב	ה	ו	ס
	ג	ק	ח	ם
	ד		ט	
	ז		י	
	מ		כ	
	ע		ל	
	פ		נ	
	צ		ר	
	ש		ך	
	ת		ץ	
	ף			
	ץ			

טבלה 4. האותיות מחולקות לעמודות לפי יחס ההומומורפיזם.

תמונות

הפעם הראיתי לילדים את הספר של א. פומנקו וא. מישנקו, "גיאוריה דיפרנציאלית וטופולוגיה". אמרתי להם שזה ספר לא לילדים אלא לסטודנטים.

קודם הראיתי להם ציור של ג'רפה, שהופכת באופן הומומורפי להיפופוטם, ואז את שאר הציורים, עם הסברים איפה שנדרשו. כשהגענו לטבעת מוביוס, יבגני העיר להפתעתי שהדבקנו פעם כזה באחד המפגשים שלנו. זה היה לפני יותר משנתיים, בפברואר 1981! בעקבות יבגני, גם דימה ופיטר נזכרו. ללמדנו שמה שהילדים פוגשים בחוג לא הולך לאיבוד: אפילו מה שהם לא מבינים עשוי לצוף בהמשך. לקראת הסוף לא התאפקתי והראיתי להם את ההקדשה האישית שפומנקו כתב לי בספר.

תרגיל 3. קסם.

לא תכננתי להציג להם קסמים במפגש הזה, אבל בגלל שדימה כבר גילה לפיטר את הטריק של הקסם עם הטבלה, ופיטר לקח את הטבלה הביתה להראות להורים, חשבתי שמן הראוי שנגלה את הטריק גם ליבגני, כך שגם הוא יוכל להציג את הקסם להורים.

סוניה, אחותו הקטנה של פיטר, קרעה את הטבלה, ולכן החלטתי להכין אחת אחרת עם דימה. לצורך זה גזרנו ביום שישי 25 ריבועים מנייר, כתבנו על כל אחד מספר (וידאנו מראש שהסכום שלהם הוא $100 = 5 \times 20$), ואז דימה סידר אותם כך שיתקבל "ריבוע קסם" ושכל שורה ועמודה לא יהיו מספרים זהים. עזרתי לו קצת לקראת הסוף. בסוף קיבלנו את הטבלה הבאה:

4	0	2	8	6
5	7	1	4	3
1	3	9	5	2
7	4	8	1	0
3	6	0	2	9

הטבלה של הקסם בנויה מתשעה ריבועים זהים. סכום כל חמישה מספרים רצופים שווה ל-20 אפילו כשהם שייכים לתתי-טבלאות שונות. לא הצלחתי להבין איך זה קורה, אבל גם לא שאלתי. – דימה.

על בסיס הריבוע הזה, אלה הכינה ביום ראשון טבלה בגודל 15×15 , כך שעוד ביום ראשון דימה יכול היה להציג את הקסם הזה לסבא וסבתא.

על הדרך צץ לנו רעיון לעוד קסם: במקום להסתיר ארבע משבצות, אפשר להסתיר שש, ואז הסכום יהיה $20 +$ המספר שבקצה. את המספר הזה אפשר לגלות בעזרת המחזוריות.

את הקסם הנוסף הזה הצגתי כמה פעמים לקראת סוף המפגש, אבל על הדרך, כחלק מהשיחה. בעיקר הסברתי ליבגני את הרעיון שבבסיס הקסם. התגובה שלו הייתה, איך נאמר, "בית ספרית". כמו שקורה הרבה כשפונים אליו ישירות, הוא התכנס והתאבן. הוא הנהן על כל מילה שאמרתי, אבל ראיתי שהוא לא איתי. אחרי שסיימתי להסביר, שאלתי האם הוא הבין. הוא המשיך להנהן. כיסיתי ארבעה מספרים ושאלתי מה הסכום שלהם. העיניים שלו נפערו באימה: מסתבר שלא הרפו ממנו למרות כל ההנהונים, ועכשיו הוא אמור לענות על השאלה, למרות שפספס את כל ההסבר! ראו שהוא נלחץ ומנסה להריץ בראש מה הרגע אמרתי. כעבור חצי דקה הוא כבר קלט את הרעיון ואמר:

– צריך להחסיר ארבע...

לקח לו עוד דקה לחסר ארבע מעשרים – היה לו קשה להשתחרר מהמכווצות שלו. אבל כשהוא כבר הצליח, הוא התחיל להציג את הקסם במהירות ובחופשיות כמו דימה.

מפגש 66. טופולוגיה

שני, 28 במרץ 1983. 17:15-18:00. דימה ופיטר.

המפגש היה קצר מהרגיל: ציפינו לאורחים, וקצת מיהרתי.

תרגיל 1. הומומורפיזם של אותיות (המשך).

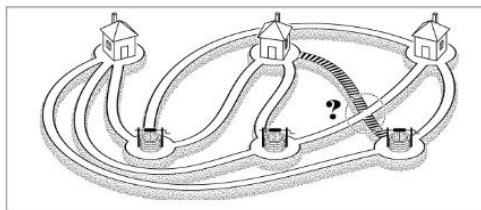
סיימנו את האלפבית, ואז הוספנו גם את אותיות האלפבית הלטיני, ואז את הספרות, ואז גם את התווים ועוד סימונים מוזיקליים (במול, דיאז, בקר). את הכל מיינו לפי שקילות טופולוגית. הילדים עבדו לבד רוב הזמן ופתרו מצוין. היו רק מעט מקרים שבהם הם לא הצליחו לנחש את השקילות המתאימה: למשל, שהסימון בקר (4) שקול ל-A, ושהאות W שקולה ל-H. אבל גם במקרים האלה, ברגע שהסברתי הם הבינו, ולפעמים היה מספיק רק שאגיד להם מה התשובה. צריך לחשוב על עוד חידות בנושא הזה.

תרגיל 2. בתים ובארות.

חידה קלאסית: יש שלושה בתים ושלוש בארות, וצריך לסלול שביל בין כל באר לכל בית כך שאף זוג שבילים לא יחתך (איור 114).

יש לי זכרון ילדות שקשור לחידה הזו. לא זוכר בן כמה הייתי. השכנה שלנו בדירת הקומנה, שנפטרה מאוחר יותר מצריכת יתר של אלכוהול, חדה לי את החידה הזו, ואמרה שמי שיפתור אותה ירוויח מלא כסף. אני זוכר שניסיתי הרבה... אחרי כמה שנים פגשתי אותה (לא את השכנה; את החידה) באיזה ספר על מתמטיקה פופולרית.

איור 114. שלושה בתים, שלושה בארות ותשעה שבילים. אי אפשר לצייר את השבילים כך שלא יחצו אחד את השני.



כידוע, אין לחידה הזו פתרון – הגרף התואם, המסומן ב- $K_{3,3}$, הוא לא מישורי. לכן הילדים עבדו על זה קצת, ואז השארתי להם את זה בתור תרגיל לבית. דימה מאד התפלא שכל פעם הוא מצליח לשרטט את כל השבילים חוץ מהאחרון.

מפגש 67. ארבעה צבעים

חמישי, 28 באפריל 1983. 17:00-18:20. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. המשחק "נים".

השחקן הראשון כותב מספר בין 1 ל-10, השני מוסיף לו מספר בין 1 ל-10, השלישי גם, וכן הלאה. המנצח הוא הראשון שכותב את המספר 100. בעקרון המשחק מיועד לשני שחקנים. כאשר יש שלושה שחקנים, אף אחד מהם לא יכול להבטיח לעצמו נצחון, אבל מגיע שלב במשחק שבו אחד השחקנים יכול להבטיח נצחון או לשחקן הבא או לבא אחריו, לבחירתו. למשל, אם מגיע המספר 88, השחקן לא יכול לנצח (אלא אם שאר השחקנים לא ישחקו טוב), אבל הוא יכול לכתוב 90 או 89, כך שהשחקן שינצח יהיה או השחקן הבא או הבא אחריו, בהתאמה. מישהו מהשחקנים בהכרח יגיע לעמדה כזו במוקדם או במאוחר. דימה העניק את הנצחון פעם אחת ליבגני ופעם שניה לפיטר, ויבגני – פעם אחת לדימה ופעם שניה לי (השתתפתי במשחק האחרון).

תרגיל 2. ארבעה צבעים.

הראיתי לילדים את מפת העולם, והסברתי להם למה מדינות שונות צבועות בצבעים שונים. דיברנו על זה שלא כל הצבעים חייבים להיות שונים זה מזה (צריך רק שיהיה קל להבדיל בין מדינות שכנות). אחר כך ציירתי לילדים "מפות" שונות, מסובכות יותר ויותר, והם "צבעו" אותן בארבעה צבעים. אני כותב "צבעו" במרכאות, כי בפועל היו לנו אסימונים בארבעה צבעים, ופשוט הנחנו אותם על המדינות המתאימות בכל פעם. כך יכולנו לשנות את הצביעה בקלות – לבדוק אפשרויות, לתקן טעויות וכו'. צבענו שלוש מפות סך הכל. בסוף סיפרתי לילדים על בעיית ארבעת הצבעים, על זה שבמשך מאה שנים אף אחד לא הצליח לפתור אותה, וגם על הפתרון ועל המחשבים שעושים מליוני פעולות בשניה, ושעבדו 1200 שעות בשביל לפתור אותה.

תמונות.

הפעם עיינו בספר של א. דפמן, "עולם המספרים". השיחה הייתה מאד מעניינת ומעשירה. עברנו על כמה עמודים ונתקלנו בציור קטן של סטונהנג'. הילדים שאלו אותי מה זה, התחלתי להסביר, והבאתי שלושה ספרים על סטונהנג': "פענוח תעלומת הסטונהנג'", "שמש, ירח, ואבנים עתיקות", ו"חוץ מהסטונהנג'". הסתכלנו בתמונות שבספרים האלה. אחר כך דפדפנו עוד כמה עמודים בספר של דפמן ונתקלנו בפירמידות. התברר שהילדים לא שמעו עליהן מעולם. התחלתי לספר להם, הוצאתי את האלבום "אמנות מצרים העתיקה", ודפדפנו גם בו. בזה סיימנו את המפגש.

* * *

בזה למעשה הסתיימה שנת הלימודים; ככל הנראה, משהו מנע מאיתנו להפגש שוב במאי (חגים? מחלות? לא זוכר). ביומן יש רק משפט אחד שמתייחס לזה, שנכתב בסוף הקיץ: "אני מתכנן לחדש את מפגשי הבנים באוקטובר. אחרי הנובי גוד, אם יהיה לי כח, אתחיל ללמוד עם הבנות".

על דא ועל הא: בדיחות, שיחות, חידות

בספר "Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas", איש החינוך סימור פארט כותב: "מה אם יש בין המתמטיקה לבין בדיחות, חלומות והיסטריה יותר מן המשותף משמקובל לחשוב?". את החלומות וההיסטריה נשאיר לאנשים רציניים יותר; באשר להומור, אין ספק בקשר ההדוק בינו לבין הלוגיקה. העובדה שלואיס קרול היה גם ממייסדי הלוגיקה המתמטית של ימינו היא לא מקרית.

אחרי שכתבתי על השיחה שלנו על גן החיות והקופים (ר' עמ' 61) חשבתי על זה שאולי שיחות כאלו הן חלק אינטגרלי מהמפגשים המתמטיים שלנו. מדי פעם התחלתי לתעד גם אותן. לפעמים זה היה משהו "חכם" (למשל, השיחה שלי עם דימה על מהירויות נפילה של גופים שונים); ולפעמים סתם משהו משעשע. צריך להודות ביושר ששיחות כתובות הן מדומיינות במידה מסוימת. העניין הוא שהן מתפתחות באופן ספונטני – ונשכחות תוך רגע. ניסיתי להזכר בכמה מהן: אני זוכר את הסיטואציה, את תגובות הילדים ועוד הרבה דברים, אבל לא מצליח להזכר מה היה נושא השיחה. אבל אפילו אם אני מצליח לזכור את הנושא, שיחה שמשוחזרת מהזכרון היא כמעט כמו שיחה שהומצאה מחדש. מה עוד ששיחה אמיתית יכולה להקטע במקום שרירותי לחלוטין, ולא איפה שהיינו מצפים מצד ההגיון של התפתחות העלילה. ובכלל, אני לא חושב ששיחות מומצאות-למחצה זה כל כך נורא. אני מניח שכך נהג גם קרול: דיבר עם אליס לידל האמיתית, ואז המציא משהו מסביב... כך או אחרת, הספר הזה הוא יומן ולא ספרות בדיונית, כך שאני נצמד למה שרשמתי אז.

השיחות שלהלן מתפתחות בהדרגה – מהתקשקשויות רגילות בהתחלה לנושאים רציניים יותר בהמשך, ולקראת הסוף גם לדיון בנושאים מתמטיים; הרי דימה ואני דיברנו על מתמטיקה גם מחוץ לחוג.

מתקשקים

1. שיחה בארוחת הצהריים.

סוף מרץ 1983. כולם מקבלים דג.

אני: ג'ני, מה את יותר אוהבת – את הרגל של הדג או את הכנף שלו?
ג'ני: את הרגל.

דימה: ג'ני, יש לדגים רגליים וכנפיים?

ג'ני: כן.

דימה: לא נכון. דגים שוחים במים, הם לא צריכים רגליים.

ג'ני: אבל דימה, זה לא דג אמיתי! הוא לא שוחה! כי אנחנו אוכלים אותו.

דימה: כן, אבל קודם הוא שחה!

אני: אני לא מבין משהו; גם אני שחיתי קודם, אבל יש לי רגליים.

ג'ני: אבא שחה באגם!

דימה: אז מה! דג כמעט תמיד נע במים, ואבא ביבשה!

אלה: כמו רכבת.

(צוחקים).

דימה: לא, לא מהר כמו רכבת... אה, אני יודע, עכשיו תגידי "חלזון". (חושב). אבל בכל זאת – רכבת

נוסעת, חלזון זוחל, ואבא הולך.

אלה: כמו גשם³⁵.

(כולם צוחקים).

דימה: לא! הגשם נופל מלמעלה למטה, אבא לא נופל!

אני: אני חושב שאם ישימו אותי על ענן, גם אני אפול...

דימה: לא, גשם נופל בטיפות. בכלל, גשם מטפטף, ואבא לא מטפטף.

אלה: למה, גם אבא לפעמים מטפטף.

(אני ואלה מחליפים מבטים: יצאה לה בטעות הערה דו-משמעית).

דימה: לא נכון! מתי הוא מטפטף?

אלה: למשל אחרי שהוא מתקלח...

³⁵ ברוסית, הביטוי המקביל ל"יורד גשם" הוא "הגשם הולך" – ר.פ.

דימה : הוא לא מטפף, המים מטפפים ממנו !
אני (אחרי שתיקה קצרה) : טוב, נניח שאני לא מטפף. אבל למה זה אומר שלדגים אין רגליים ? זה
מה שאני לא מצליח להבין.
(שוב כולם צוחקים).
בשלב הזה דימה כבר מלוכלך לגמרי מהאוכל ; אנחנו שולחים אותו לרחוץ פנים והשיחה נקטעת.
2. תמרונים.

תחילת מאי 1983. הילדים חזרו מטיול. ג'ני מתבכינת, צועקת על דימה שיעזור לה לפתוח את
המעיל. דימה עונה לה בגסות:
– תבקשי בצורה נעימה.
(כיאה לאח בכור, הוא לא מפספס הזדמנות לחנך אותה). ג'ני צועקת:
– אני מבקשת בצורה נעימה ! !
אני מתערב.
אני : ג'ני מתוקה, מה הצורה הכי הכי נעימה שלך ?
ג'ני : אין לי שום צורה, רק ראש ! ! (?? תשובה קצת מוזרה, אבל זה מה שהיא אמרה. היא הייתה בת
שלוש וחצי).

אני : מה זה ראש ?
ג'ני : זה מה שעומד ! (???)
אני, מצביע על הארון : הנה, זה עומד. אז זה ראש ?
ג'ני : לא, זה ארון.
אני : ואיפה הראש ?
ג'ני (מתרככת קצת ומצביעה) : הנה הראש.
אני : לא, זה כובע.
ג'ני (מורידה את הכובע) : הנה, נו, הנה !
אני : לא, זה שיער.
דימה מתערב, הוא נורא אוהב שיחות כאלו :
דימה : נו, הראש הוא פה, הנה, הנה (מקיף את הראש באוויר עם היד).
אני : מה "הנה, הנה" ?
דימה : הראש זה האף, הפה, השיער, הסנטר, השפם, העיניים, נו – הכל !
ג'ני (מחקה את התנועות של דימה) : פה הראש, הנה ! (הקול שלה כבר שמח).
אני : אז אתה אומר שהראש זה העיניים, הפה, השפם... נגיד, העיניים שלך, השפם שלי, האף של ג'ני.
דימה : לא, רק העיניים שלי והאף שלי !
אני : טוב, אז כמעט הבנתי ; אני רק לא מבין מה זה "שלך".
דימה : שלי זה מה ששלי, מה שאצלי, חלק ממני !
אני : ומה זה "אתה" ?
דימה : אני זה אני. הנה אני (מצביע על עצמו).
אני : מה, "אתה" זה הכפתור הזה ?
דימה : לא, הנה אני !
אני : אה, החולצה הזו !
דימה : לא, גם החולצה, גם הכפתור, ובכלל כל מה ששלי.
אני : אז "אני" זה "כל מה ששלי" ?
דימה : כן.
אני : למשל ג'ני היא שלי ? שלי ! הרי היא הבת שלי.
דימה : לא, ג'ני היא לא חלק ממך ! אתה זה כל החלקים שלך.
אני : איזה חלקים ?

דימה: נו, הידיים, הרגליים, הראש...

אני: ראש! אבל אני לא יודע מה זה ראש! בדיוק היית באמצע להסביר לי.

דימה: אבל כבר הסברתי.

(הוא לא שם לב למעגליות הלוגית).

האמת היא ששמתי לב, אבל לא רציתי להודות בזה. – דימה.

אני: כשהסברת לי מה זה ראש, השתמשת במילה "שלי". לכן לא הבנתי מה זה ראש, וביקשתי שתסביר לי מה זה "שלי". ועכשיו אתה מגדיר את המילה "שלי" בעזרת המילה "ראש", שאני עדיין לא מכיר.

ג'ני: אני רוצה לשתות! אבא, תן לי בבקשה מיץ. אבא, אני ילדה טובה ולכן אני אומרת "בבקשה".

אני (מסכם): אתה רואה, דימה, לפעמים קשה להסביר את הדברים הכי פשוטים.

[אני לא רוצה שהקוראים יחשבו שאני תמיד פותר קונפליקטים בכזו קלות. אבל כיף יותר לכתוב על ההצלחות].

3. על עקרון ההפרכה של קרל פופר.

חופשת קיץ באוקראינה. טיילנו לאורך הנהר, והיו על החוף המון צפרדעים. אלה שאלה כמה צפרדעים ראינו לדעתנו. היא עצמה חשבה שבערך מאה. דימה אמר שלדעתו בערך שלושים. אני אמרתי ששלוש מאות. וכששאלנו את ג'ני, היא אמרה שהרבה. שאלתי:

– דימה, מה אתה אומר, מי מארבעתנו בטוח צודק?

– בטוח אתה, – ענה דימה.

– לא, – אמרתי, – ג'ני בטוח צודקת. כל אחד מאיתנו אולי טעה, אבל ג'ני בטוח אמרה משהו נכון:

באמת יש הרבה צפרדעים.

כמובן שהיה פה תירוץ להתלהב מהתמימות המתוקה של ג'ני. אבל לא יכולתי לפספס את ההזדמנות

להסיק מסקנות פילוסופיות:

– מה מוסר ההשכל? – המשכתי, – אם מישוהו כל הזמן אומר רק דברים נכונים, זה עוד לא אומר שהוא הכי חכם.

– למה?

– כי אדם חכם הוא מי שאומר לא רק דברים נכונים, אלא גם דברים לא מובנים מאליהם, לא

טריוויאליים. גם אם הוא טועה מדי פעם, הוא בכל זאת חכם. ומישוהו אחר שאומר רק דברים שברור

שהם נכונים גם בלי שהוא יגיד אותם – למרות שכל מה שהוא אומר נכון, זו לא חכמה גדולה.

דימה הרזה קצת ושאל:

– אבא, למה אתה תמיד מדבר על מוסר ההשכל?

4. הפרדוקס של זנון.

5 במאי 1983. לא מזמן הכנו, בעזרת הוראות מהספר "פיזיקה לקטנטנים", סוג של סטרובוסקופ –

מעין מכשיר שמאפשר לעשות אנימציות פשוטות. השאלה של דימה הגיעה כנראה בעקבות זה:

– אבא, אני מבין איך סרט עובד: מראים שם את הרגל ככה, ואז ככה, בקפיצות קטנות, ולנו זה נראה

כאילו היא זזה. אבל איך הרגל עצמה עובדת? הרי אין לה קפיצות קטנות. אז איך היא זזה?

ואז הוא תיאר, אמנם בניסוח מעט צולע, את המקבילה של הפרדוקס של זנון עם החץ. כאן מגיע

החלק שלי, שהוא לא כל כך מעניין. סיפרתי לו על זנון, ועל דיוגן, ועל השיר של פושקין ("אין תנועה –

אמר החכם המזוקן..."), ואפילו משהו על מכניקה קוונטית (למה אי אפשר לראות יריה של אלקטרון).

אבל הרעיון העיקרי שניסיתי להסביר לו הוא שהשאלה שלו לא עוסקת בתופעה עצמה אלא במה שאנחנו

חושבים עליה, בזה שאנחנו "לא יודעים מה קורה באמת", ויכולים רק לחשוב על זה באופן חסר סתירות.

לפי ההערות שלו היה נדמה לי שהוא מבין, אבל בערב הוא שוב שאל אותי איך הרגל זזה באמת.

אם אני זוכר נכון את השיחה הזו, אז נראה לי שאבא באמת לא ענה לי, אלא רק אמר שזנון שאל את אותה שאלה. אם כי,

אני חושב שלא הייתי מסתפק בתשובה האמיתית (שאיפת הזמן והמרחק לאפס), אפילו אם הייתי מבין אותה. – דימה.

אמרתי לו גם שבעוד שאנחנו חושבים שאנחנו "פשוט רואים", זה לא כל כך פשוט: גלי האור חוזרים מהחפץ, נשברים בעדשה שלנו, מוטבעים ברשתית, הקווים והעקומות שולחים אותו למוח שלנו, הוא מעבד אותם וכו'. ולנו נדמה שאנחנו "פשוט רואים".
מה שאופייני הוא לא שדימה שואל שאלות חכמות (הוא שואל יותר שאלות טפשיות), אלא תחומי העניין שלו. השאלות החכמות של ג'ני, למשל, הן מסוג אחר לגמרי:

– למה פינוקיו משקר אם זה מאריך לו את האף וממילא תופסים אותו?
5. סמנטיקה.

תחילת ספטמבר 1983.

– אבא, אתה יודע מאיפה הגיעה המילה "nonetheless"?
עניתי שלמעשה אלו שלוש מילים: none the less, כלומר לא פחות מכך, כלומר "יותר מזה".
– לא נכון, – אמר דימה, – זה לא חייב להיות יותר מזה. זה יכול להיות יותר, אבל יכול גם להיות אותו דבר.

עוד על מתמטיקה

נחזור לנושא העיקרי שלנו, ונחזור גם קצת אחורה בזמן.

1. הבעיה של גאוס.

3 באפריל 1983. לפני עשרה ימים, ב-23 במרץ, חוג הבית שלנו חגג שלוש שנים. ואתמול, ב-2 באפריל, קרה משהו שנראה לי מספיק חשוב בשביל לציין אותו פה: דימה פתר את הבעיה של גאוס, כלומר חיבר את כל המספרים מ-1 עד 100.
זה קרה כך. בערך לפני שנה סיפרתי לו על גאוס, שבגיל 7 חיבר תוך דקה את כל המספרים מ-1 עד 100 (בעוד שהמורה ציפה שהתלמידים יפתרו את התרגיל הזה במשך כל השיעור). דימה שאל כמובן איך הוא עשה את זה. ואני, כמובן, לא סיפרתי לו. בשנה שחלפה מאז הוא נדנד לי לגבי זה פעמיים או שלוש:

– נו, אבא, נו, בבקשה, תגלה לי איך עשה את זה.
אבל סירבתי. אתמול הוא קרא לי והכריז שפתר את התרגיל (צריך לציין שהוא חולה עכשיו, ואלה בדיוק הזמנים שבהם הוא עושה קפיצות אינטלקטואליות משמעותיות – אולי מהשעמום).
– איך? – שאלתי.

– אתה יודע איך? אתה לוקח 0 ו-100; אחר כך 1 ו-50; ואז 2 ו-... רגע, לא, לא ככה. אתה לוקח 0 ו-100, ואז 1 ו-99, ואז 2 ו-98. ובפעם האחרונה אתה מקבל 50 ו-50.
– נכון מאד. רק טעות אחת: אתה מקבל 50 רק פעם אחת.

– אז מה עושים?

– פשוט מאד: לוקחים כל פעם 100, ורק בפעם האחרונה 50.

– אהה, אוקיי.

– אז אולי כבר תחשב כמה יוצא.

– טוב, רגע.

אחרי דקה קורא לי שוב:

– אבא, כל פעם שאני מגיע ל-700, אני מתבלבל משום מה.

– אז למה אתה מחשב ככה?

– אז איך אני אחשב?

– פשוט תספור כמה מאות יש.

– אה...

הייתי בטוח שהוא יתבלבל איפשהו בדרך: או בכמות המאות, או בהכפלה, או שישכח להוסיף 50.

אבל לא: אחרי דקה הוא צעק לי מהחדר הסמוך את הפתרון: 5050.

יכול להיות שהסיפור הזה מרשים אותי יותר מדי בגלל ההקשר ההיסטורי, גאוס וכו'. ואף על פי כן, צריך להודות שבאמת מדובר בהישג מרשים, במיוחד לאור זה שהוא פתר את התרגיל בעל פה, ולאור זה שהוא עוד לא בן 7 (יש לו יום הולדת עוד חודש וחצי). סכום סדרה חשבונית זה חומר של כיתה ח' (ומגיעים לנוסחה באותה דרך בדיוק! ועם זאת, הרבה תלמידים לא מבינים אותה). אבל מה שחשוב יותר הוא שדימה זכר את הבעיה, חשב עליה, ולבסוף הגיע לפתרון. כלומר, הוא לא עושה רושם של גאון, אבל יש לו תכונה חשובה: הוא חושב לעומק, ובמשך הרבה זמן, על דברים שהוא לא מבין, ומפרק אותם בעקשנות עד שהוא מפענח אותם. האופי שלו פחות דומה לשל גלואה, ויותר לשל דרווין או בוהר. (אני כמובן לא משווה את סדר הגודל של האישיות, אלא את הסגנון; לא את גודל הוקטור אלא את כיוונו).

שיבחי אתו; הוא חיך וציין בענווה שהוא לא פתר את התרגיל ממש לבד – הטבלה שהרכבנו בשביל הקסם עזרה לו. אמרתי שאני רוצה לתת לו איזושהי מתנה לכבוד המאורע. חיפשתי משהו על המדפים, אבל הדבר הכי מוצלח שמצאתי היה הספר "מגלי השמיים" של הרמן – תמונות אסטרונומיות גדולות ויפות. דימה הסתכל על התמונה הראשונה בשוויון נפש:

– מה זה, הירח?

– כן.

– ומה זה? (מצביע על התמונה השנייה).

– כתוב מתחת, תקרא.

אבל הוא התעצל לקרוא, ואמר, כשהוא מצביע על הקוביה ההונגרית:

– זה מה שאני רוצה...

– אתה רוצה קוביה הונגרית במתנה?

– לא, אני רוצה שתלמד אותי לפתור אותה.

כך סיכמנו, רק הזהרתי אותו שזה מסובך ולכן יקח זמן.

אני לא מצליח לגרום לו לאהוב ספרים, בינתיים.

2. כמה שניות יש ביממה?

27 באפריל 1983. היום דימה הפתיע אותי שוב, כשחישב (בעל פה, כרגיל) את מספר השניות ביממה: 86,400. עזרתי לו קצת: ראשית, אמרתי לו שביממה יש 24 שעות (ובכלל הסברתי לו מה זה יממה). לפני כן הוא חישב כמה שניות יש ב"יום", כשמבחינתו יום היה 12 שעות. שנית, אמרתי לו שאם הוא כבר הכפיל 36 ב-12 אז הוא לא חייב להכפיל מחדש 36 ב-24, אלא הוא יכול פשוט להכפיל את התוצאה ב-2. אחרי שהוא כבר חישב $2 \times 432 = 864$, $12 \times 36 = 432$, $60 \times 60 = 3600$, הוא שכח מה הלאה ושאל אותי. הפעם לא עזרתי לו; אמרתי שזה החלק הכי חשוב בחישובים – לא החישוב עצמו אלא לדעת מה אתה מחשב ובשביל מה. לקח לדימה שתי דקות לעשות סדר במהלכים שלו ולהבין שנותר להכפיל את התוצאה ב-100. אבל בינתיים הוא שכח את התוצאה עצמה. זו הייתה הנקודה השלישית שבה עזרתי לו: הזכרתי לו שהוא קיבל 864, והוא אמר לי את הפתרון: 86,400. בסיכומי של עניין, נראה לי שהגישה שלי הצדיקה את עצמה. ב"גישה" אני מתכוון לזה שמעולם לא לימדתי אותו לחשב, לא הראיתי לו שיטות, לא תרגלתי איתו וכו'. בחוג עצמו גם לא היו יותר מדי תרגילים עם מספרים, ואפילו כשהיה צריך לחשב משהו, מעולם לא שמתתי על זה דגש. חישבנו בדרך כלל כשסכמנו תוצאות של קוביות, כששיחקנו "נים", וכד', מעולם לא כמטרה בפני עצמה.

למרות כל ההישגים של דימה, החישובים שלו לא בהכרח אמינים. לא מזמן הוא הכפיל 60 ב-10

וקיבל 320!

עוד שבועיים הוא יהיה בן 7.

3. כמה אנשים גרים בבניין שלנו?

עוד סיפור על חישובים, שלא רשמתי בזמן אמת. הוא קרה בסוף 1982 או תחילת 1983. באיזשהו שלב הילדים קלטו שהגלקסיה העצומה שהם נעים סביבה כמו כוכבי לכת קטנים היא הבניין שלנו. ענק, בצורת חצי עיגול – יש הרבה כאלה בשכונה שלנו; לוקח בערך עשרים דקות להקיף אותה.

– כמה אנשים גרים בו? – שאל דימה.
התחלנו לחשב: 12 כניסות; בכל כניסה 16 קומות; בכל קומה ארבע דירות.
– ובכל דירה ארבעה אנשים, – החליט דימה.
אנחנו ארבעה, סימן שכולם ארבעה.
אני לא זוכר את פרטי החישוב, אבל אני זוכר שהוא לקח לא מעט זמן. דימה התגבר על כל המכשולים, טעויות החישוב והנתונים שנשכחו שוב ושוב, עד שהצליח להגיע סוף סוף לפתרון.

4. לעולם אל תשוויצו בילדים שלכם!

זו לא עצה לכם, קוראים יקרים, אלא לעצמי. אמנם אני יודע את זה, אבל לפעמים קשה להתגבר...
קצת אחרי הסיפור הקודם התארחנו אצל בת דודה שלי, אירנה, שהיא מורה בבית ספר יסודי, אחת המעולות שאני מכיר. בהמשך, כשאני עצמי עבדתי בבית ספר, התייעצתי איתה לא מעט. אבל גם לפני כן, אפילו לפני שהתחתנתי, בכל פעם שביקרתי אותה היו לנו שיחות מרתקות על בית הספר. כך היה גם הפעם. דיברנו על זה שדימה עולה לכיתה א', ואירנה החליטה לבדוק את המוכנות שלו. היא ביקשה ממנו לסכום 5 ו-3. וזה מה שהקפיץ אותי.

– בוא, דימה, – אמרתי, – אולי במקום זה תכפיל 33 ב-17.

(או משהו ברמת קושי דומה, אני לא זוכר בדיוק).

– איך? – שאל דימה בתמהון, כאילו זו פעם ראשונה שהוא שומע על כפל.

התחלתי להסביר; הוא לא ממש הבין; יכול להיות שהסיטואציה הלחיצה אותו; הוא הוסח גם מההערות של אירנה על זה שהשתגעתי. בכל מקרה, הוא התחיל לחשב, הצליח להכפיל 17 ב-30 (בקושי רב ועם הרבה טעויות בדרך), ואז התחיל להחסיר מזה 17 שלוש פעמים, במקום להוסיף. אמרתי לו את זה; הוא לא ממש הבין; כשהוא כבר הבין הוא שכח עם איזה מספר אמורים לסכום. בקיצור, הוא הרגיש שהוא נכשל במבחן, ואפילו בכה. התביישתי נורא.

אבל אם נתנתק לרגע מכל הרגשות האלה, יש פרמטר חשוב שצריך לשים לב אליו, ושאנחנו נוטים להזניח: המוטיבציה. במקרה אחד אתה מתפקע מסקרנות וחייב לגלות כמה אנשים גרים בבניין העצום שלנו. במקרה אחר אתה מתבקש פשוט להכפיל וזהו, בלי סיבה. בשביל מה, בעצם?

5. קומות.

שאלתי את דימה:

– איש אחד עלה לקומה החמישית, ואז עלה אותו מספר קומות. באיזו קומה הוא?

בבניינים מהסוג שגרנו בו אז, המספר של קומת הכניסה היה 1 ולא 0.

דימה, כמובן, ענה מיד:

– בקומה העשירית.

– לא נכון, – ענית.

דימה חשב קצת ואמר:

– אני זוכר שאמא אמרה פעם שעד הקומה החמישית יש אותו מספר קומות כמו מהחמישית

לעשירית, ואמרת לה שזה לא נכון, אבל לא הבנתי למה.

אחר כך הוא חשב עוד קצת ואמר שזה בטח קשור לזה שלקומה הראשונה לא צריך לעלות בכלל. אבל

הוא לא הצליח להסביר מה הקשר בין הדברים.

6. מאה אווזים.

קיץ 1983. באחד הטיולים חדתי לדימה את החידה הבאה:

אווז אחד פוגש להקת אווזים ואומר להם: "שלום לכם, מאה אווזים!"

האווזים עונים לו: "אנחנו לא מאה אווזים. אם היינו כמה שאנחנו, ועוד כמה שאנחנו, ועוד חצי ממה

שאנחנו, ועוד רבע ממה שאנחנו, ועוד אתה – אז היינו מאה".

השאלה: כמה אווזים יש בלהקה?

קשה לדעת לפי התגובות של דימה מה קורה בראש שלו. לחידה הזו הוא הגיב בצורה קלאסית: שמע והמשיך בעיסוקיו כאילו שהיא לא מעניינת אותו. אבל למחרת בבוקר, כשהוא עוד שכב במיטה, הוא קרא לי ואמר שפתר אותה: 36 אווזים.

7. הביצה והתרנגולת.

ספטמבר 1983. באחת מארוחות הערב חדתי לדימה את החידה הבאה. שתי תרנגולות מטילות שתי ביצים ביומיים. כמה ביצים יטילו ארבע תרנגולות בארבעה ימים? זו גרסה פשוטה יותר של החידה המעולה של א. אזימוב מהסיפור "escape". תרנגולת וחצי מטילה ביצה וחצי ביום וחצי. כמה ביצים יטילו 9 תרנגולות ב-9 ימים? (אקל על הקוראים: התשובה היא 54). הפעם דימה הגיב אחרת: הוא שמע את החידה, הגיב כאילו שהיא לא מעניינת אותו, ואכן לא חזר אליה בהמשך. אולי זה בגלל ההשפעה של בית הספר? נדון בזה בפרק נפרד...

8. איך מחלקים 18 גמלים?

ספטמבר 1983. סיפרתי לדימה לפני השינה סיפור בחשבון (אני לא זוכר איפה ומתי קראתי אותו, אבל הוא מוכר):

זקן אחד הוריש לשלושת בניו 17 גמלים. בצוואה שלו הוא כתב שהוא מוריש לבכור מחצית מהעדר, לשני שלישי מהעדר, ולשלישי תשיעית. הבנים לא ידעו איך לחלק ביניהם את הירושה, שכן 17 לא מתחלק ב-2, לא ב-3 ולא ב-9.

הם ביקשו את עצתו של חכם אחד, שאמר להם:

– קחו במתנה את הגמל שלי. אולי הוא יעזור לכם למצוא פתרון.

עכשיו היו לאחים 18 גמלים. הבכור לקח לעצמו חצי מהם (כמה זה יוצא? – נכון!) – תשעה גמלים; השני לקח שלישי, כלומר ששה גמלים, והשלישי תשיעית – שני גמלים. סך הכל הם לקחו $9+6+2=17$ גמלים, וגמל אחד נשאר – הגמל של החכם. החכם לקח בחזרה את הגמל שלו, ונפרד מהאחים לשלום.

למעשה אין בסיפור הזה שום חידה. זו פשוט דרך סיפורית לטעון ש- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, ולא 1, כפי שאפשר היה להניח מהצוואה. למרות זאת, ילדים נוטים להתייחס לסיפור הזה כאל פרדוקס. דימה היה בהלם ולא הפסיק לשאול, "אז בעצם 17 מתחלק ב-2...?". אני שתקתי, וכך הסיפור נשאר בגדר תעלומה.

* * *

מפה לשם, הגיע אוקטובר, ואיתו גם שנת הלימודים החדשה – ואני לא מתכוון לשנת הלימודים בבית הספר, אלא בחוג שלנו.

7 החוג של הבנים – חצי השנה האחרונה

מפגש 68. תעלומות לוח השנה

שני, 3 באוקטובר 1983. 18:00-19:00. דימה, פיטר ויבגני.

מוזר: היומן מתחיל ישר ולעניין, מהתרגיל הראשון. שום ברכות ואיחולים.

תרגיל 1. לוח השנה.

שאלה לדימה:

– בן כמה אתה?

– שבע.

– וכמה שנים ימלאו לך בשנה הבאה?

– שמונה.

זו, בינתיים, שאלה קלה.

השאלה הבאה לפיטר:

– בין כמה אתה?

– שמונה.

– וכמה שנים ימלאו לך בשנה הבאה?

– תשע.

– עכשיו שאלה יותר קשה ליבגני: בן כמה אתה?

– שבע.

– וכמה שנים ימלאו לך בשנה הבאה?

יבגני הוא יליד נובמבר, ולכן ימלאו לו שמונה השנה, ובשנה הבאה ימלאו לו תשע שנים. בהתחלה

יבגני עונה:

– שמונה.

– לא נכון, – אני עונה.

– אה, נכון, תשע, – הוא קולט.

– איך זה יכול להיות?! – נדהמים דימה ופיטר.

פיטר פתאום מביין. דימה אומר:

– בטח זה כמו עם המעלית.

– לא נכון, – אני עונה.

אלה מתערבת ושואלת:

– אתם יודעים מתי יום ההולדת של יבגני?

דימה לא יודע. אלה אומרת:

– עוד חודש, בנובמבר.

בשלב הזה גם דימה מביין את התשובה ומסביר אותה.

ועכשיו לתרגיל עצמו. ילד אחד אמר: "שלשום הייתי בן עשר, ובשנה הבאה ימלאו לי 13". איך זה יכול להיות? דימה אומר שאולי זה קשור לשנים מעוברות. אני אומר שלא. הם מתחילים לזרוק עוד השערות, לפעמים בכיוון הנכון, ואז אני מחזק אותן. כך, בהדרגה, ועם רמזים קטנים מצדי, אנחנו מגיעים לפתרון: האמירה נאמרת ב-1 בינואר; הילד חגג 11 אתמול, כלומר ב-31 בדצמבר; שלשום, כלומר ב-30 בדצמבר, הוא עוד היה בן 10; בסוף השנה הזו, כלומר ב-31 בדצמבר השנה, הוא יחגוג 12; ולבסוף, בשנה הבאה ימלאו לו 13 שנים.

פיטר מנחש את הפתרון ראשון. דימה עוד לא ממש מביין מי נגד מי, ואני מצייר על דף מקטעים-שנים, ומראה עליהם את ימי ההולדת וכו'. דימה אומר:

– אהה, בטעות חשבתי שבשנה אחת לא יכולים להיות שני ימי הולדת, – כלומר, הוא שוב לא הביין.

לא הבנתי גם את ההבדל בין "יהיה בן 13" ל"מלאו לו 13". לכן היה נראה לי הגיוני יותר להגיד שבשנה הבאה ימלאו לו 12 שנים, ולא 13 (הרי כמעט כל השנה הוא יהיה בן 12). הטיעון לגבי 13 השנים היה נראה לי נכון, אבל בקושי. אם יום ההולדת היה ב-30 בדצמבר, אז הוא היה יותר נכון: היה קיים יום (31 בדצמבר) שבו הילד בן 13. אבל כשיום ההולדת חל ב-31 בדצמבר, אז כדי שהטיעון יהיה נכון, צריך לטעון שביום ההולדת הילד כבר בן 13. זה ייתכן, אבל בקושי. – דימה.

פיטר מתערב וממשיך את הציור שלי שמאלה, כדי להראות את הנקודה בזמן שבה מלאו לילד 10. דימה מבין סוף סוף.

תרגיל 2. שאלה מילולית – פונטיקה.

שאלתי ממה מורכבות מילים. פיטר ענה שמאותיות. דימה חלק עליו:

– אותנו לימדו שאפשר לחלק מילים להברות.

– והברות? – שאלתי.

– הברות לצלילים.

– אז פיטר אומר שמילים בנויות מאותיות, ודימה אומר שהן בנויות מצלילים, – סיכמתי.

פיטר הסביר מיד את ההבדל בין מילה כתובה למילה שנאמרת. דיברנו גם על זה שאותיות הן תווים לסימון צלילי הדיבור. האם נכון שכל צליל מסומן באות אחת ולהפך? בחנו דוגמאות והגענו למסקנה שלא.

אחר כך נתתי לילדים תרגיל: למצוא שתי מילים שנכתבות אותו דבר אבל נקראות שונה. לצערי, אף אחד מהם לא הצליח למצוא דוגמה כזו, אפילו אחרי שנתתי להם דוגמה משלי: רושם, במלעיל ובמלרע. אמרתי להם שאשאיר להם את זה כשיעורי בית, אבל הם היו כל כך המומים מהמילים "שיעורי בית" (כנראה שיש להם אסוציאציות שליליות לזה), שנאלצתי לחזור בי ולהגיד שרק יחשבו על זה בבית, אולי ימצאו משהו.

תרגיל 3. תכנות.

הזכרתי לילדים את המשחק עם הרובוט. אמרתי להם שכמו שמילים מורכבות מאותיות, כך התנועות של הרובוט מורכבות מתנועות בסיסיות פשוטות; וכמו שהאותיות משמשות לסימון צלילי דיבור, והתווים משמשים לסימון צלילים מוזיקליים – כך הריבועים והאופרטורים שלנו משמשים לסימון התנועות הבסיסיות האלו, והחצים – לסימון סדר הפעולות. (לצערי לא אמרתי להם משהו ברור לגבי בדיקת התנאים). אחר כך הצעתי להם להרכיב תרשים זרימה שרירותי, ולבדוק מה הרובוט יעשה.

כמובן שהם הרכיבו תרשים זרימה ענק, מסובך וחסר פשר. במהלך הבניה הסבתי את תשומת ליבם לטעויות סינטקטיות: שני חצים מאופרטור של פעולה, שלושה מבדיקת תנאי, חץ שלא מגיע לשום דבר וכד', כשבכל פעם אני מסביר להם למה הרובוט לא יכול להבין תרשים כזה. אחר כך העמדנו את הרובוט בכל מיני משבצות ב"חדר" ועם הפנים לכל מיני כיוונים, והילדים הזיזו אותו לפי התרשים, כל אחד בתורו. לפעמים הוא התרוצץ בלי הגיון ברור, לפעמים נתקל בקיר ו"שבר את האף", מה ששעשע את כולם. אחר כך הם שמו לב שהתנאי הראשון שבדקים משום מה לא מתקיים אף פעם. התחלנו לנתח את התרשים, עד שמצאנו נקודת התחלה שבה התנאי כן מתקיים. אחרי זה הרובוט מיד נתקל בקיר. התברר שהאלגוריתם בודק האם יש קיר מלפנים, ואם יש, עושה צעד קדימה. הראיתי את זה לילדים.

הילדים תיקנו את התרשים. אחר כך הרכבתי תרשים זרימה משלי, שגרם לרובוט ללכת הלך ושוב בין שני קירות, ולא לעצור לעולם. הם התלהבו מאד. ערכנו קצת את התרשים כך שהוא ילך במעגלים, לאורך הקירות. באופן כללי התרגיל זרם וכולם מאד נהנו, היינו יכולים להמשיך עוד הרבה זמן אם לא הייתי קוטע את הפעילות.

קריאה

לסיום הקראתי להם את שני הפרקים הראשונים מהספר "עולם המספרים", מאת א. דפמן.

מפגש 69. הרבה שאלות מילוליות

שני, 17 באוקטובר 1983. 18:00-19:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

החלק הזה נמשך חצי שעה; הילדים ביקשו עוד ועוד שאלות.

- א. בחנו מספר זוגות של מילים שנכתבות בצורה זהה אבל נקראות בצורה שונה (חבל, ספר וכד').
- ב. המשימה השניה הייתה למצוא מילים שנכתבות שונה אך נקראות זהה (עת-עט, לא-לו, כן-קן וכד'). בעיקר אני נתתי דוגמאות, דימה מצא במקרה דוגמה אחת. דיברנו גם על השימוש במילים כאלו כחרוזים והקראתי להם שיר לדוגמה.
- ג. בהמשך לשני התרגילים הראשונים דנו בעוד כל מיני דברים, למשל ביחס בין המילה הכתובה למילה הנקראת בשפות שונות, בפלינדרומים (הילדים ביקשו שאכתוב דוגמאות), ובעוד דברים שאני כבר לא זוכר.
- ד. את התרגיל הבא דימה מכיר, אז ביקשתי ממנו לא לגלות.

איש אחד עלה לקומה החמישית, ואז עלה את אותו מספר קומות. באיזו קומה הוא?

כמובן שפיטר ויבגני מיד ענו שבקומה העשירית. התחלתי "לרדת", כלומר לשאול את אותה שאלה אבל עם הקומה הרביעית, השלישית, וכן הלאה. יבגני היה הראשון שקלט את הכשל, אבל ההסבר שלו לא היה ברור, ובמקום להפחית 1 הוא הוסיף 1: כשהאיש עלה לקומה השלישית ואז עלה את אותו מספר קומות, יבגני אמר שהוא יגיע לקומה השביעית. כששאלתי לגבי הקומה השניה גם פיטר כבר הבין את העניין, וענה נכון (האיש הגיע לקומה השלישית). אחר כך ציירנו את הבניין.

ה. איש אחד קנה ספר ושילם שקל, ואז נשאר לו לשלם כמה שהיה נשאר לו לשלם אם הוא היה משלם כמה שנשאר לו לשלם. כמה עולה הספר? ("קוואנט", גליון מס' 5, 1983).

הילדים לא פתרו את התרגיל הזה כמובן, סתם נכנעתי לבקשות שלהם לעוד תרגיל. דימה אמנם ניחש את הפתרון (שני שקלים), אבל הוא הבין את התרגיל בערך כך: "שילמו על הספר רובל, ונשאר לשלם את אותו הסכום". לדבריו, הוא הבין את ההסבר שלי מהפעם השלישית.

ו. הילדים ביקשו עוד תרגילים, אבל מעיינותי כבר יבשו. אני מסביר להם שאין לי עוד תרגילים, כי אף אחד לא ממציא תרגילים לילדים קטנים כמוהם. דימה התפלא:

— ומה עם בית הספר?

אמרתי לו:

— אוקיי, מה יותר גדול, 5 או 3?

הוא התכווץ כאילו אמרתי משהו מעליב, ומלמל:

— לא, לא צריך...

אבל פיטר המשיך:

— היו חמש מכוניות, שתיים נסעו, כמה נשארו?

ואני הוספתי:

— היו חמישה נרות דולקים, שניים כבו, כמה נשארו?

הפתרון הצחיק את הילדים (נשארו שני הנרות שכבו, כי שלושת האחרים בערו).

תרגיל 2. תכנות.

התרגיל נוסח כך: להגיע לפינה כלשהי בלוח ולעצור שם. דימה הציע בעל פה פתרון נכון: ללכת ולברוק לפני כל צעד האם יש מלפניך קיר, להתקדם כך עד הקיר, וכשמגיעים אליו להסתובב לאחד הצדדים, נניח לצד שמאל, ולהגיע שוב לקיר; כשמגיעים, לעצור.

אבל הוא לא הרכיב נכון את תרשימי הזרימה: אחרי הבדיקה האם מלפניך יש קיר הוא מתח חץ לאופרטור "צעד", ואז, במקום לחזור לבדיקת התנאי, הוא שם תנאי חדש (איור 115).

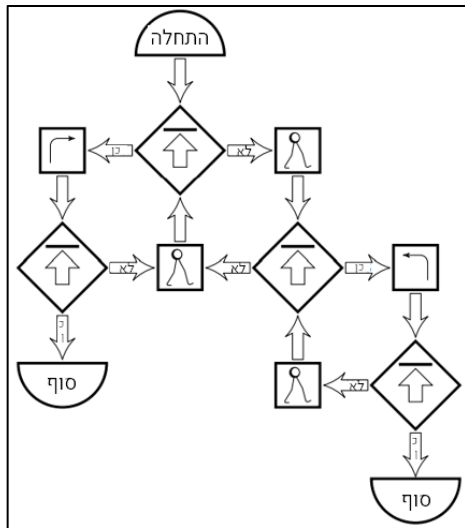
בשלב הזה הוא עזב את החץ של "לא" ועבר לחץ של "כן" וסיים את הרכבת התרשים. יבגני הצביע על הטעויות הסינטקטיות (חלק מהחצים לא הובילו לשום מקום), אבל דימה התעלם מההערה והתחיל

להריץ את האלגוריתם. אחרי שניה כולם שכחו מהטעויות, כי צצה שאלה חשובה יותר: מי יפעיל את הרובוט ראשון, מי שני וכו'. איכשהו הצלחנו לפתור את הויכוח.

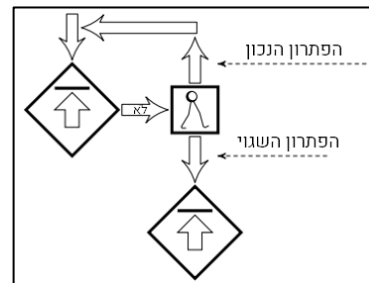
כמוכן שהאלגוריתם של דימה לא עבד: לפעמים הוא הביא את הרובוט לא לפינה, לפעמים נתקע באמצע העבודה (בגלל החצים שלא מובילים לשום מקום). הילדים התחילו לתקן אותו, הפעם כולם ביחד. אבל כל התיקונים היו מקומיים: בכל פעם שהתגלתה טעות, הילדים שינו רק את המקום המתאים בתרשים, ולא חשבו על האופן שבו זה ישפיע על האלגוריתם בכללותו.

אחרי בערך חצי שעה של עבודה, אינספור נסיונות, בדיקות ותיקונים, התקבל תרשים הזרימה המסובך להחריד שמתואר באיור 116. מה שהכי מדהים הוא שהאלגוריתם הזה עבד! בכל ההרצות, הרובוט תמיד סיים את הטיוול בפינה.

נגמר הזמן, ובקושי רב הצלחתי לגרום לילדים להפסיק להריץ את האלגוריתם. לא הספקתי להקריא להם את הספר של דפמן, וגם לא להראות להם את הקוביות מ-Scientific American. אבל הייתה לי משימה חדשה, לא קלה: להבין בעצמי האם האלגוריתם שהילדים בנו באמת עובד. ישבתי עליו כמעט שעה והבנתי אותו כמעט עד הסוף. האלגוריתם הזה אכן מביא תמיד את הרובוט לפינה בלוח המשחק שלנו, כי הגודל שלו אי זוגי. הוא יעבוד גם בלוחות שבהם לפחות אחד מהמימדים בגודל אי זוגי. אבל בלוחות משחק שבהם שני המימדים באורך זוגי (למשל, בלוח בגודל 6×4), הוא יכנס ללולאה אינסופית. אני אראה את זה לילדים בפעם הבאה.



איור 116. האם אפשר להבין תכנית כזו?



איור 115. השגיאה של דימה.

מפגש 70. עוד תכנות

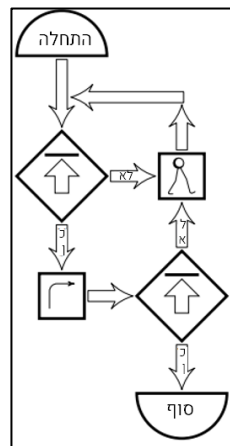
חמישי, 27 באוקטובר 1983. 18:00-19:15. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. תכנות.

כמו שתכנתתי, הראיתי לילדים שהאלגוריתם שלהם נכנס ללולאה אינסופית בחדר בגודל 6×4 . זה ממש לא הטריד אותם. כשהם גילו שהרובוט פונה "לכיוון הלא נכון", הם פשוט החליפו את החץ שמאלה בחץ ימינה. בהרצה אחרת, מנקודת התחלה אחרת, הפניה "לכיוון הלא נכון" הייתה דווקא פניה ימינה (זו שנמצאת בתרשים משמאל למעלה), אז הם פשוט החליפו אותה בפניה שמאלה. כאן ציפתה לי הפתעה. התברר שהאלגוריתם החדש עובד! ניסינו להריץ אותו מנקודות התחלה שונות, על לוחות במימדים זוגיים ואי-זוגיים, והוא תמיד הביא את הרובוט לפינה. כך נשמטה הקרקע מתחת לכל הטיעונים שלי לגבי המבנה של האלגוריתם ("אפשר לעשות אלגוריתם פשוט יותר וטוב יותר") – כי מה זה אלגוריתם טוב יותר, אם האלגוריתם הנוכחי עובד?

לא נכנעתי, מה עוד שדימה שאל איך אפשר לעשות את האלגוריתם פשוט יותר. שלפתי את המחברת הישנה שבה רשמתי את האלגוריתמים שהרכבנו בעבר, והראיתי לילדים את האלגוריתם שהם בנו עבור "להגיע לקיר ולעצור". (האמת היא שזה לא היה ממש אלגוריתם שהם בנו לבד, נתתי להם הרבה רמזים, אבל הם כבר שכחו מזה, ואני לא הזכרתי להם – נראה לי נכון יותר, מבחינה פסיכולוגית, לייחס להם את ההצלחות המשותפות שלנו). שאלתי האם הפתרון הזה יכול לעזור להם איכשהו. הילדים התעמקו במשימה ובאופן שבו האלגוריתם עובד. הם עבדו בנחת ובענייניות, ממש כמו מבוגרים. ואז דימה, כמו בפעם הקודמת, הסביר בעל פה מה צריך לעשות: צריך להריץ את האלגוריתם, ואז להסתובב (הוא התלבט אם ימינה או שמאלה), ואז לעשות את אותה בדיקת תנאי, – הוא הציע (כלומר לחזור אחרי הפניה לאותו מעוין של בדיקת תנאי מההרצה הראשונה).

כבר התחלתי לנסח טיעון נגד ההצעה הזו, אבל אז דימה פתאום חשב ואמר שלא, בדיקת תנאי אחת לא תספיק, צריך שתיים. שמחתי לשמוע את זה ממנו, ראיתי בזה הדגמה ראשונה של חשיבה לא לוקאלית. אבל למעשה לא ידעתי למה הוא חושב שלא מספיקה בדיקת תנאי אחת, ובתרשים הזרימה שהוא הרכיב הלוקאליות ניצחה (איור 117).



איור 117. יותר טוב, אבל עדיין שגוי.

דימה הבין שדרושות שתי בדיקות תנאי, אבל לא הבין שדרושים גם שני אופרטורים של "צעד", ולכן לא בנה שתי לולאות עוקבות. כמובן שהאלגוריתם שלו נכנס ללולאה אינסופית. השעה הייתה כבר שש וחצי, והחלטתי לסיים עם התכנות להפעם.

פיטר הציע להכניס אופרטור חדש של סיבוב ב- 45° . החלטתי לזרום עם הרעיון הזה – פחות בשביל הסיבוב עצמו, ויותר בשביל עצם הכנסת הסימונים החדשים, ובפרט, כמבוא לסימון קריאה לפונקציות.

תרגיל 2. שאלה מילולית.

יעל, מיכל, יוסי ומשה יצאו ללקט פטריות ביער. יעל ליקטה יותר מכולם, ומיכל ליקטה לא פחות מכולם. מי ליקט יותר פטריות: הבנות או הבנים? כולם ענו שהבנות.

– למה?

– כי יעל ליקטה יותר מכולם, – ענה פיטר.

– לא נכון!

– איך לא נכון?

– התשובה נכונה, אבל ההסבר לא נכון.

– גם בגלל שמיכל ליקטה לא פחות מכולם, – הוסיף מישהו מהם.

אבל כבר לא הייתי בטוח שמדובר בהסבר ולא בדקלום של נתוני השאלה. ניסיתי לחלוב מהם הסברים, נדנדתי והתקלתי אותם ככל יכולתי, אבל זה לא נתן כלום. הם בעיקר הביאו דוגמאות שמאשרות שהם צודקים.

אז אמרתי להם את ההסבר שלי, אבל אף אחד לא הבין במה הוא טוב יותר משלהם.

אני חושב שהיה עדיף לשאול האם ייתכן שהבנים ליקטו יותר פטריות מהבנות. הרי ברור מנתוני התרגיל שהבנות ליקטו יותר, השאלה היא רק האם יש קאץ'. כשאבא אמר את ההסבר שלו, הרגשתי שהוא באמת לא משאיר מקום לספק, בניגוד להסברים שלנו. אבל מצד שני גם ההסברים שלנו היו נכונים... – דימה.

בקיצור, נדנדתי להם עשרים דקות, שיגעתי את כולם כולל את עצמי, ובכלל הייתי קצת קצר. אני מרגיש שהמפגש הזה היה לא כל כך מוצלח, בעיקר בגלל התרגיל הזה.

תרגיל 3. צפנים.

פיטר ודימה ממש בקטע של כתיבת מכתבים מוצפנים. החלטתי לתמוך בפעילות הזו ולראשונה נתתי לילדים שיעורי בית. שיעורי הבית היו להרכיב צופן, כלומר טבלה שבה מתאימים לכל אות איזשהו סימון (סימונים שונים לאותיות שונות), ואז לקחת משפט אקראי מספר אקראי, להצפין אותו, ולתת לי (בלי הטבלה של הצופן, כמובן). אני אצטרך לגלות את הטקסט המוצפן. המשימה התקבלה בהתלהבות רבה.

גרסאות של קוביה הונגרית.

השעה הייתה כבר שבע כשנזכרתי פתאום שכבר פעם שלישיית שלא הספקתי להראות לילדים את הטור של ד. הופשטדטר מה-Scientific American, "קסם המתמטיקה", עם הוריאציות על הקוביה ההונגרית. מכיוון שכבר הייתי צריך להחזיר את העיתון, החלטתי למשוך את המפגש עוד חמש דקות, והראיתי לילדים את התמונות.

צפנים.

כל הילדים נתנו לי צפנים שהם הכינו – פיטר ודימה כבר ביום ראשון, ב-30 באוקטובר, ויבגני הביא את שלו למפגש הבא, ב-3 בנובמבר.

הצופן של פיטר היה הכי קל – הוא החליף עיצורים קוליים במקביליהם האטומים וכד'. חוץ מזה, הדף שלו נפתח במילים "מתוך הספר... עמ' 72". לכן פענחתי את המשפט שלו בקלות. הצופן של דימה היה הרבה יותר קשה, אבל בסוף הצלחתי לפענח גם אותו. נעזרתי בטבלת שכיחות של האותיות, מתוך הספר של א. וא. יגלום, "הסתברות ואינפורמציה". דימה עמד לידי בזמן שעבדתי על הפענוח, ולכן "חשבתי בקול". דימה היה נרגש. הצופן של יבגני היה עוד יותר קשה משום מה, כך שלקח לי שעה וחצי לפענח אותו. הקושי הכי גדול בפענוח הצפנים היה שגיאות הכתיב – והן הופיעו בכלם. עכשיו האתגר העיקרי שלי יהיה להדוף את מכול הצפנים שהולך לשטוף אותי. כבר באותו יום דימה הכין לי עוד שלושה מכתבים (!), כל אחד בצופן אחר. גם פיטר מכין עוד אחד.

ראיתי שאבא משתמש בשכיחות שבה מופיעות האותיות בטקסט, וניסיתי למצוא משפט שבו יו"ד היא לא האות הכי נפוצה. – דימה

מפגש 71. תרגילי בית ספר... טוב, כמעט

חמישי, 3 בנובמבר 1983. 19:05-17:55. דימה ויבגני.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

בעקבות הכשול של תרגיל 2 במפגש הקודם, הרגשתי שקצת נסחפתי, ושהגיע הזמן להכניס למפגשים שלנו תרגילי בית ספר רגילים.

צדקתי!

מצאתי על אחד המדפים שלי את הספר של טרודנייב, "לספור, להרהר, לשער" (לכיתות א'-ג'), היחיד שבו כותרת המשנה הייתה "חוברת עזר לתלמיד" ולא "חוברת עזר למורה". היו שם חידות פשוטות אבל נחמדות, והחלטתי שפשוט נפתור אותו ברצף. תכננתי שנסיף היום עשר חידות, אבל נתקענו כבר בשלישית...

החידה השלישית הייתה כזו: "אמא השאירה שתי צלחות עם כמות זהה של תפוחים, וכשהיא חזרה, מספר התפוחים בהן היה: (ציור של שתי צלחות, באחת שלושה תפוחים ובשניה שמונה). מאיזו צלחת לקחו יותר תפוחים, ובכמה יותר?".

הילדים ענו נכון על השאלה הראשונה, אבל הסתבכו עם השניה – לא דימה ולא יבגני ידעו לענות. מדהים. מסתבר שבכלל לא ברור שאם נשארו חמישה תפוחים פחות, סימן שלקחו חמישה תפוחים יותר. בעיקר לא ברור שהתוצאה לא תלויה בכמות התפוחים שהיו בצלחות מלכתחילה. דימה ניסה לדלות ממני מידע לגבי כמות התפוחים שהיו שם בהתחלה: הוא רצה לספור כמה לקחו מכל צלחת ואז לחשב את ההפרש. עניתי שזה לא נתון בשאלה. יבגני שיער שחמישה תפוחים יותר. ההסבר שלו היה שמהצלחת השניה לא לקחו תפוחים בכלל, כי אין בה יותר מקום. דימה התחיל להתווכח איתו ושיער שמהצלחת הראשונה לקחו 16 תפוחים יותר, אבל לא היה לו הסבר להשערה הזו.

יבגני התעקש על חמש. הוא אמר:

– אם שואלים בכמה יותר, סימן שצריך לחסר.

הצעתי לו את התרגיל הבא: "בצלחת היו מספר תפוחים. אבא הוסיף שני תפוחים, ואמא ארבעה. כמה תפוחים התווספו לצלחת?". הילדים הסכימו איתי שגם בתרגיל הזה שואלים בכמה יותר, אבל צריך לסכום את המספרים ולא לחסר.

לבסוף, לקחנו שתי "צלחות" (דפים), שמנו בהן "תפוחים" (חיילי משחק), וערכנו חמישה ניסויים. בכל פעם הפתרון יצא חמש. אבל הם לא הצליחו לנסח טענה כללית. יבגני טען בעיקר "אמרת לי לך", בלי להבין את ההבדל בין תשובה לפתרון; גם דימה לא הבין למה זה יהיה כך לכל כמות התחלתית של תפוחים. הוא אפילו אמר שאולי עבור מליון תפוחים זה יהיה אחרת.

פיאז'ה כנראה היה אומר שהם עוד לא מבינים שחיבור וחסור הן פעולות הופכיות. ואולי משהו אחר, מתוחכם יותר. בכל מקרה, ברור שיש איזה חוק שימור שהם עוד לא מבינים.

תרגיל 2. משחק הסתברותי.

פיטר חולה, ולכן החלטתי שהיום נדלג על התכנות. דימה ביקש שנשחק שוב במשחק ההסתברותי שבאיור 118 (כבר שיחקנו בו בעבר – ר' עמ' 67).

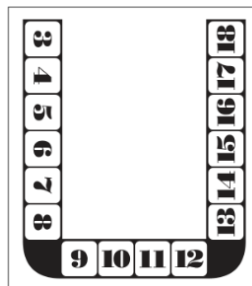
הטלנו קוביה כדי להחליט מי יהיה באמצע – אני הייתי הזוכה המאושר – ואז נתתי לכל ילד 15 אסימונים ולעצמי לקחתי 10. הדגשתי שיש לי פחות אסימונים ופחות מספרים, והתחלנו לשחק. הילדים מאד נהנו מהמשחק ולא רצו להפסיק. אבל בהיבט של "מוסר ההשכל המתמטי", כלומר המסקנות, התרגיל לא היה מוצלח. הסיבה היא שבחמש עשרה ההטלות הראשונות דימה לא זכה אפילו פעם אחת, ולכן פשט את הרגל. לפי חוקי המשחק, הוא היה אמור להפסל, אבל ריחמתי עליו, ולכן כשבאחת ההטלות יצא הסכום "שלו", אני ויבגני נתנו לו אסימון מכל אחד.

ככה זה המשיך: דימה ויבגני פשטו רגל לסירוגין, אבל בכל פעם קיבלו עוד אסימונים. כמובן שבתנאים האלה לא ממש יכולתי לנצח אותם, מה עוד שסכום הסתברות הנצחון שלהם גדול מהסתברות הנצחון שלי. סיימנו בזה שהיו לי 25 אסימונים, לדימה שמונה, וליבגני שבעה.

קריאה.

לסיכום הקראתי להם את הפרק השלישי מהספר של דפמן. אגב, יבגני זיהה את הציור של הסטונהנג' ואפילו אמר שכבר הקראתי להם את זה, אבל נזכרנו ביחד שרק הראיתי להם את התמונות.

איור 118. הלוח של המשחק ההסתברותי.



מפגש 72. תתי-תוכנות

שלישי, 8 בנובמבר 1983. 15:30-16:30. דימה, פיטר ויבגני.

הצופן של יבגני.

הראיתי ליבגני את פענוח הצופן שלו. הוא קרא את הטקסט, ראה שהוא נכון, אבל לא הסיק מזה שפענחתי נכון את כל האותיות. הוא שלף את הטבלה שלו, ובדקנו את שכל האותיות מפוענחות נכון. אחר כך סיפרתי לילדים בקצרה איך מפענחים.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

המשכנו לפתור תרגילים מהספר של טרודנייב, הפעם פתרנו חמישה. הפעם זה הלך חלק. התברר שגם לאבא של יבגני יש את הספר הזה, ושהוא אפילו חד לילדים כמה חידות ממנו באיזו נסיעה משותפת.

תרגיל 2. תכנות: היכרות עם תתי-תוכנות.

הפעם, סוף סוף, התרגיל בתכנות היה מוצלח. קיוויתי הרבה זמן שהילדים יחשבו בעצמם על המושג "תת-תכנית", פונקציה; בסוף הבנתי שאני עלול לחכות עוד עשור. כנראה שהרעיון הזה חדשני מדי. חוץ מזה, בשפת התכנות שלי חסר משהו שידגיש את רעיון המבניות. בקיצור, לא התאפקתי והמצאתי סימון חדש לפונקציות.

הסימון הוא מלבן בגודל 3×6 שמשני צדדיו יש חצאי עיגול, שמסמלים "התחלה" ו"סיום" (איור 119). רושמים במחברת נפרדת את כל האלגוריתמים שבנינו, עם תיאור הבעיה שהם פותרים. כל אלגוריתם מקבל מספר סידורי. בהמשך, אם לצורך תכנית מורכבת יותר אנחנו רוצים להשתמש באחד האלגוריתמים, אנחנו פשוט שמים שם את הסימון החדש, וכותבים עליו את מספר האלגוריתם. מומלץ לכתוב את המספר בעפרון, כדי לאפשר מיחזור של הכרטיסים.

הסברתי את כל זה לילדים. בהתחלה הם לא הבינו כלום, אחר כך הבינו, ואז פתרנו שוב את הבעיה שעסקנו בה בפעמיים הקודמות: להגיע לפינה ולעצור. השתמשנו בתת-אלגוריתם מס' 1: להגיע לקיר ולעצור. בנינו שתי גרסאות לתכנית הזו: אחת פשוטה, והשנייה קצת מתוחכמת יותר, שלא קוראת פעם שניה לפונקציה "להגיע לקיר ולעצור" אם כבר הגענו לפינה אחרי הקריאה הראשונה. שתי התוכניות מוצגות באיור 120. (לצערי, אלגוריתם שלא עושה שום צעד אם הרובוט כבר עומד בפינה ועושה רק קריאה אחת אם הרובוט עומד סמוך לקיר אבל לא בפינה הוא מסועף מדי).

"פענחנו" את התכנית הפשוטה יותר, כלומר החלפנו את הקריאות לפונקציות בפונקציות עצמן. התכנית שהתקבלה מתוארת באיור 121.

הרצנו כמה פעמים את התכנית שקיבלנו, אבל די מהר היה ברור שלא צריך להמשיך לבדוק אותה, כי כבר ברור איך היא עובדת. הזכרתי לילדים שהבטחתי להראות להם אלגוריתם פשוט יותר שפותר את הבעיה, ובכן, זה האלגוריתם.

לא אהבתי את הרעיון של תת-תכנית. כל עוד אין תתי-תכניות, זה מעניין לבנות תכנית שמביאה את הרובוט לפינה. צריך לחשוב, לנסות, לבדוק, לשנות וכו' – כמו שמתואר ביומן. לעומת זאת, אם משתמשים בתתי-תוכניות, אז כמעט כל תהליך הרכבת התכנית הופך לרוטיני. צריך להגיד מילולית מה צריך לעשות (להגיע לקיר, להסתובב, להגיע שוב לקיר ולעצור) – עד כאן זה מעניין – אבל אחר כך צריך לפתוח את המחברת, לקרוא מה עושה כל תכנית, למצוא את התכנית המתאימה. (את הקריאה אמנם אפשר להשאיר לפיטר – הוא קורא ממש טוב – אבל אז בשביל מה צריך אותי). במקום לקחת ריבוע מוכן צריך לכתוב מספר. ואז מקבלים תכנית שאי אפשר להראות לאף אחד, ואפילו אי אפשר להריץ בלי המחברת. – דימה.

לסיכום הצגתי להם "שאלת מבחן": מה לדעתכם עושה התכנית הבאה (איור 122)?

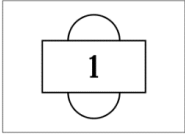
הילדים עטו על המחברת, אבל גילו שיש בה רק ארבע תכניות. שאלתי:

– מה דעתכם, מה תהיה התכנית החמישית?

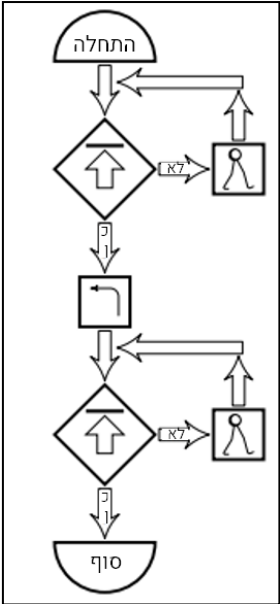
ואז כולם הבינו שזו תהיה התכנית שמביאה את הרובוט לפינה, ושעכשיו אפשר לתת לה מספר חדש.

קריאה.

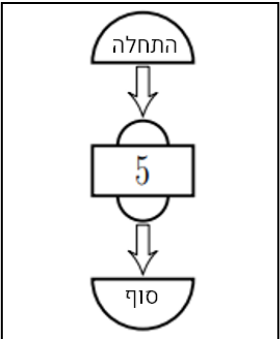
דפמן – קראנו חצי מהפרק הרביעי.



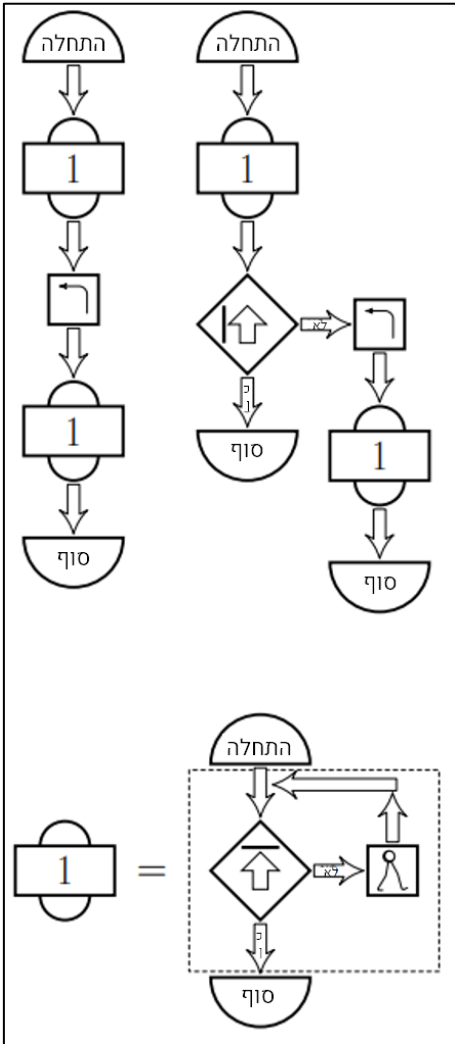
איור 119. רושמים את תת-תכנית מס' 1 במחברת ייעודית, כולל תיאור מילולי של מה שהיא מבצעת (למשל: "להגיע עד הקיר ולעצור"). כשנרצה לקרוא לתכנית הזו במסגרת תכנית אחרת, נכניס את הסימון הזה.



איור 121. התכנית "להגיע לפינה ולעצור", בלי תתי-תכניות.



איור 122. התכנית החדשה שבנינו קיבלה את המספר 5.



איור 120. למעלה משמאל: הגרסה הכי פשוטה של התכנית "להגיע לפינה ולעצור". למעלה מימין: גרסה מורכבת יותר של אותה תכנית, שמזהה חצי מהמקרים שבהם אנחנו כבר בפינה. למטה: תת-תכנית מס' 1.

מפגש 73. מספרים אי-זוגיים וריבועיים

חמישי, 17 בנובמבר 1983. 18:00-19:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. ספרות רומיות.

במפגש הקודם קראנו בספר של דפמן על ספרות רומיות. לכן במפגש הזה הצעתי לילדים לכתוב בספרות האלו כמה מספרים. המצאנו כל מיני מספרים וכתבנו אותם, למשל MMCDXCVIII=2498.

תרגיל 2. שאלות מילוליות.

פתרנו עוד כמה תרגילי בית-ספר מהספר של טרודנייב.

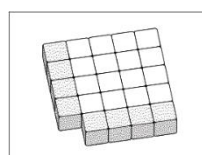
תרגיל 3. מספרים אי-זוגיים וריבועיים.

ניסיתי להגיע לנושא הזה עוד מהמפגש הראשון בשנת הלימודים הזו, אבל לא הספקנו. הייתי רוצה שכל מפגש יהיה בנוי מארבעה חלקים: שאלות מילוליות, תכנות, סדרות של מספרים וקריאה מהספר של דפמן, אבל לא הצלחתי לדחוס לשיעור אחד את כל ארבעת הנושאים. הפעם לא הספקתי להמציא תרגיל מוצלח בתכנות, ולכן התפנה זמן לדבר על סדרות. קודם כל, שאלתי את הילדים איזה מספרים הם מכירים. הם לא הבינו את השאלה. אז רמזתי:

– יש למשל מספרים זוגיים...

הם נזכרו מיד: אי-זוגיים, ראשוניים... התברר שלא כולם זוכרים מה זה מספרים ראשוניים; דיברנו על זה. שאלתי האם הם זוכרים מה זה מספרים ריבועיים. הם זכרו, אבל במעומעם. התחלנו להרכיב ריבועים מקוביות קטנות, ורשמנו כל מספר שקיבלנו. אחרי המספר 16 ביקשתי מהילדים להגיד מה לדעתם יהיה המספר הבא. פיטר אמר שצריך להוסיף ארבע קוביות מכל צד – הוא התלבט אם משני צדדים או מכל הארבעה. הראיתי לו מה נקבל: ריבוע שחסרה לו משבצת אחת (איור 123).

איור 123. כדי להפוך ריבוע בגודל 4×4 לריבוע בגודל 5×5 , צריך להוסיף לו שני פסים באורך 4 ריבועים, ואז עוד ריבוע אחד.



דימה הביין פתאום שצריך להוסיף ל-16 את המספר 9, ולא 8, ואמר את התשובה: 25. ל-25 הוא כבר הוסיף את המספר הנכון, 11, וקיבל 36. כך המשכנו לחבר מספרים – 13, 15, 17, 19, עד שהגענו ל-100. משעשע שהם קלטו מיד את החוקיות שכיוונתי אליה, שסכום מספרים אי זוגיים הוא מספר ריבועי; אבל הם לא חשבו על מה שנראה לי מובן מאליו: שמספר ריבועי הוא למעשה מכפלה של מספר בעצמו. על השולחן היה מונח ריבוע בגודל 5×5 , ואני שאלתי את הילדים שוב ושוב איך אפשר לחשב מכמה קוביות הוא מורכב, והילדים ספרו אותן בכל פעם בסדר אחר – בזיגזג, בספירה ומה לא, ולא חשבו על זה שאפשר פשוט להכפיל חמש בחמש. בסוף, אחרי אינספור רמזים והכוונות מצדי, הם הגיעו לזה. שאלתי אותם כמה זה 6×6 , 7×7 וכן הלאה, אבל הם כבר לא חישובו אלא הקריאו את התשובה מהמספרים שרשמנו: האמון שלהם בחוקיות היה בלתי מעורער. לסיכום נתתי להם שיעורי בית: לחשב את הסכום $1+3+5+\dots+99$. פיטר ויבגני רק צחקקו, "אוהו, תשעים ותשע!"

דימה לקח את המשימה יותר ברצינות ואמר:

– כבר פתרתי תרגיל דומה, אבל אני לא זוכר איך...

אחר כך, כשכולם התפזרו לבתים, הוא נזכר שצריך לחבר את המספרים שבקצוות – ואז בכל פעם מקבלים את הסכום 100: $1+99=100$, $3+97=100$, ...

5000. אמרתי לו שזה לא נכון. בערך חמש דקות הוא התעקש שזה נכון, ואז ניחש פתאום:

– אה, זה לא חמישים פעמים מאה, אלא חצי מזה!

ומיד אמר את התשובה הנכונה: 2500.

אחרי כמה ימים, דימה החליט בעצמו לחשב את סכום המספרים האי-זוגיים עד 199, וקיבל את התשובה הנכונה: 10000. הצעתי לו לחשב את הסכום עד 999. הוא קצת נבהל, אבל התחיל לחשב. כשהוא חילק 500 ב-2 הוא התבלבל וקיבל 270, כך שהסכום יצא לו 270000. אמרתי שלא נכון; הוא תיקן. כרגיל, השיטה שלו היא לא זו שניסיתי לכוון אליה את הילדים, כלומר, הוא לא מחשב ריבוע. אני התכוונתי שהם ישתמשו בנוסחה $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$, והוא השתמש במקום זה בנוסחה $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = 2n \cdot \frac{2n}{4}$. פעם שוחחנו ואמרתי לו שניסיתי לרמוז להם שיחשבו את כמות הנסכמים, ויכפילו את המספר הזה בעצמו. דימה חשב על הטענה שלי והדהים אותי בתובנה לא טריוויאלית:

– השיטה שלך טובה יותר, כי שלי מתאימה לא לכל המספרים, אלא רק לאלה שמתחלקים ב-4.

(הכוונה שלו הייתה ש- $2n$ צריך להתחלק ב-4).

מפגש 74. גיאומטריה של מספרים

חמישי, 24 בנובמבר 1983. 18:00-19:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. קסם – משבצת מיותרת.

הראיתי לילדים את הקסם עם המשבצת המיותרת. לוקחים ריבוע בגודל 8×8 (לוח שחמט), וגוזרים אותו לארבעה חלקים: שני משולשים ושני טרפזים. מהם מרכיבים מלבן בגודל 5×13 (איור 124). את כל הפעולות האלו ביצענו פיזית, כמוכּן: ציירנו, גזרנו, סידרנו מחדש וכו'. על הדרך דיברנו על כל מיני דברים: על מה זה סנטימטר רבוע, ועל זה ששטח של חדר בגודל $8 \text{ ס"מ} \times 8 \text{ ס"מ}$ הוא לא 8 ס"מ רבוע, אלא 64 ס"מ^2 רבוע (או, כמו שהילדים קראו לזה, "שמונה-סנטימטר ריבועי"), וכד'. כנראה שמתחיל להתעצב אצלם המושג "שטח": בהתחלה הם לא הבינו למה אני מתכוון, ולא תיארו לעצמם ששטח של חדר הוא מכפלת אורכי הצלעות שלו, אבל התפלאו מאד כשצצה משבצת נוספת. כמוכּן שלא גיליתי להם איך זה קורה.

חשבתי שפשוט טעינו בחישוב וניסיתי לחשב בדרכים אחרות, אבל זה לא עזר. – דימה.

היה משעשע כשדימה ניסה לחשב את כמות המשבצות בלוח השחמט. משום מה הוא לא חשב על הדרך הכי פשוטה, של ספירת שורות של 8 משבצות. בהתחלה הוא חישב בספירה (איור 125), אבל כמוכּן שאחרי כמה פיתולים הוא איבד את הסדר. פיטר העיר לו שהוא סופר את השורה הלא-נכונה, הם התחילו להתווכח, ובסוף שניהם שכחו לאן אמורים להתקדם וכמה משבצות הם כבר ספרו. ואז דימה החליט לחשב לפי "פינות" (איור 126).

– בפניה הראשונה, – הוא אמר, – יש 16 משבצות (פעמיים 8), בשניה 7×2 , וכן הלאה. ניסיתי להמשיך איתו בקו הזה, כדי לקבל $2+4+\dots+14+16=72$ משבצות (למרות שלקראת הסוף כבר רואים שבמקום 4 יש 3 ובמקום 2 יש 1), אבל הוא הבין את הטעות בעצמו. אחר כך הוא ניסה לחשב $15+13+11+\dots$ ונזכרנו שבמפגש הקודם קיבלנו ככה מספרים ריבועיים. הסתכלנו בדפים מהמפגש ההוא ומצאנו בהם את הפתרון: 64. בסוף הגענו לפתרון גם דרך סדרת הכפלות: $8 \times 2 = 16$, $16 \times 2 = 32$, $32 \times 2 = 64$ (במקביל, דימה הצביע על שתי שורות מתוך הלוח, אחר כך על חצי לוח, ואז על כל הלוח).

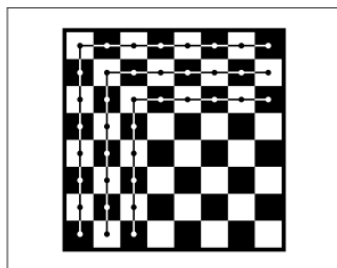
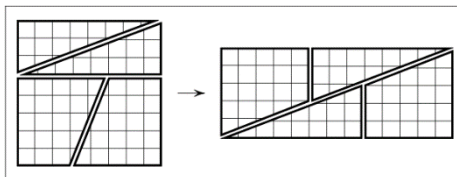
תרגיל 2. ספרות רומיות.

רשמנו עוד כמה מספרים בספרות רומיות.

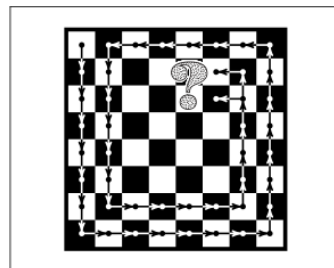
קריאה.

סיימנו את הפרק מהספר של דפמן. בין השאר, קראנו על שיטת הספירה של שבט המאיה. אני מתלבט אם לעשות על זה כמה תרגילים במפגש הבא, או שזה אקזוטי מדי.

איור 124. גוזרים ריבוע בשטח $8 \times 8 = 64$, ומרכיבים מהחלקים מלבן בגודל $5 \times 13 = 65$. מאיפה צצה עוד משבצת?



איור 126. הדרך הזו קצת יותר מוצלחת, אבל היא עדיין לא הדרך הכי פשוטה.



איור 125. אפשר לספור את מספר המשבצות בסדר הזה, אבל זה מבלבל.

מפגש 75. שבט המאיה.

שני, 5 בדצמבר 1983. 17:00-18:10. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. סכום מספרים אי-זוגיים.

סיפרתי לילדים שדימה פתר את התרגיל של חיבור כל המספרים האי-זוגיים מ-1 עד 99, והצעתי לדימה לספר איך הוא הגיע לפתרון.

לצערי, דימה התחיל לקשקש משהו לגמרי לא ברור. הוא אמר משהו כמו:

– צריך להוסיף 1 – ואז זה 100 – ואז מחלקים ב-4 – ואז שוב מכפילים ב-100 – ויוצא 2500.

כמוכן שאף אחד לא הבין כלום. ניסיתי לחלוב ממנו הסברים, אבל הוא אמר שהוא כבר לא זוכר. ואז הוסיף:

– תן לי דף נייר רגע. הנה, לוקחים 199...

קטעתי אותו והתחלתי להסביר בעצמי: מחברים 1+99, ואז 3+97, ואז 5+95, וכן הלאה, ובכל פעם

הסכום הוא 100. הילדים בוהים בי; נראה שההסבר שלי לא אומר להם כלום.

– אז אם נחשב כמה מאות יש, נגלה את התשובה!

– וואו, איך?

– אתה לא מסביר טוב, – מתערב דימה, – צריך לחלק ב-4 ו...

– אבל למה מחלקים ב-4? תנסה להסביר.

– כי כשחיברנו את כל המספרים חילקתי בשתיים, ויצא 5000.

– 5000? לא נכון.

– איך לא נכון?

– לא הבנתי כלום, – מכריזים פיטר ויבגני ביחד.

ככה התבחבשנו חצי שעה, בסוף נראה לי שהצלחתי להסביר את העניין לפיטר, בקושי רב. נדמה לי

שיבגני עדיין לא הבין, הוא רק צחקק ואמר:

– אוי, שוב הסתבכתי.

כמעט רבתי עם דימה, כי אי אפשר היה להשתיק אותו. לא ראיתי את זה מגיע.

מדהים עד כמה קשה יותר להסביר את הרעיונות שלך באופן ברור ומסודר מאשר לחשוב עליהם.

יומיים לפני המפגש אבא אמר לי שהוא יבקש ממני לספר בחוג על הפתרון שלי. קצת נלחצתי: למעשה, הייתי עוד בשלב שפיתחתי מחדש פתרון לכל חידה בסגנון "לסכום את כל המספרים מ-1 עד 100". ידעתי מה העקרון הכללי: צריך לחבר את המספר הראשון לאחרון, את השני ללפני-אחרון, וכן הלאה. אבל משם הייתי צריך ממש להתאמץ: $0+100=100$, $1+99=100$, $2+98=100$, ... את הכלל הבא (בעזרת הדוגמה $1+3+\dots+99$):

(א) לחבר 1 ו-99, מקבלים 100.

(ב) לחלק 100 ב-4. מקבלים 25: זו כמות המאות שצריך לסכום.

(ג) להכפיל 25 ב-100. זה הפתרון.

המצאתי כלל תואם גם לסכום $1+2+\dots+100$, רק ששם התבלבלתי. ואז כבר לא חששתי לטעות וציפיתי לחוג... – דימה.

שבט המאיה.

החצי השני של המפגש היה יותר היסטורי מאשר מתמטי. דיברנו על למה תושבי אמריקה נקראו אינדיאנים, עקבנו על הגלובוס אחרי המסלול של קולומבוס ומגלן, עיינו בתמונות שבספרים "תרבות שבט המאיה" מאת קינז'לוב ו"מאיה: תעלומתה של הציוויליזציה האבודה" מאת צ' גלנקמפ – כל מיני ארמונות, פירמידות ועוד. אחר כך עיינו בכתבים של בני השבט, מתוך אותם שני ספרים, וגם מתוך "היסטוריה של הכתב" מאת פרידריך ו"חקר הכתב" מאת א. גלב. סיפרתי להם שכל הארמונות האלה נחרבו, וכל הכתבים נשרפו, ועכשיו נשארו רק ארבעה, ולכן היה קשה לפענח אותם. לבסוף, סיפרתי להם איך מחשבים עזרו לפענח את הכתבים וקישרתי את זה לתרגילי הצפנים שלנו – הסברתי איך מחשב היה יכול לעזור בפענוח הצפנים האלה.

אחרי כך עברנו לשיטת הספירה שלהם. הגעתי למסקנה שזה יהיה גם נחמד וגם מועיל בכמה היבטים (זו התשובה שלי להתלבטות מסוף המפגש הקודם). ראשית, זה מטפח את העניין והרצון ללמוד דברים לא שימושיים אך מעניינים – בעיני זה אורח חיים בריא. שנית, צריך להרגיל את הילדים לחשוב על מה שהם קוראים, להתעמק בפרטים, ולא פשוט להאמין למחבר ולהמשיך הלאה. שלישית, התרגיל הזה ספציפית טוב בכך שהוא עושה שימוש בבסיס 20, ולכן הוא יכול לשמש כמבוא לשיטות ספירה בבסיסים שונים.

הילדים עוד לא ממש הבינו את שיטת כתיבת המספרים של שבט המאיה, כך שעוד נצטרך לחזור לזה.

תמונות – פרקטלים.

לסיום עיינו בתמונות מספר מדהים: "The Fractal Geometry of Nature", מאת B. B. Mandelbrot. בהתחלה סיפרתי לילדים שלא רחוק מאיתנו, באזור 17 של שכונת יסנב, גר המתמטיקאי הדגול ולדימיר ארנולד, שקיבל את הספר הזה במתנה מהמחבר. ארנולד השאיל את הספר הזה למיכאל שובין, הוא השאיל לי, ואני משאיל להם (לילדים). אחר כך אמרתי שמחשבים יודעים לא רק לחשב ולפענח צפנים, אלא גם לצייר. ואז הסתכלנו על התמונות שבספר – שפע של דוגמאות לפרקטלים.

משחקים בדרך לבית הספר.

יש לנו נוהג כזה, שכשאנחנו מלווים את הילדים (דימה ופיטר) לבית הספר, אנחנו משחקים בכל מיני משחקים מתמטיים. דימה המציא בעצמו אחד מהמשחקים האלה: הוא אומר שתי שלשות של מספרים, למשל, 2, 3, 5 ו-1, 4, 7. צריך להמציא סדרה של פעולות חשבוניות שייצרו משוואה בין שתי השלשות (בדוגמה שלנו, למשל, $7+1-4 = (3+5)/2$). אחר כך השחקנים מתחלפים ביניהם – השני ממציא מספרים והראשון חושב על פעולות מתאימות. הילדים התחילו לשחק בזה בלעדי, כך שגיליתי על קיומו של המשחק הזה יומיים אחרי שהוא הומצא. משחק אחר התפתח בעקבות חידה שחדתי לילדים: "פיטר ודימה חשבו על אותו מספר. פיטר חילק אותו ב-2 והחסיר 3, ודימה חילק ב-3 והחסיר 2. הם קיבלו את אותו מספר. על איזה מספר הם חשבו?" עכשיו הילדים ממציאים כל מיני וריאציות על החידה הזו. למשל, דימה המציא את החידה הבאה: "חשבתי על מספר, חילקתי אותו ב-2, הוספתי 15, וקיבלתי את המספר שחשבתי עליו. על איזה מספר חשבתי?"

תוך כדי שאנחנו פותרים, אנחנו דנים בכל מיני עניינים חשבוניים: כמה זה $0.5*0.5$, $(-1)*(-1)$, $2*0$ ועוד. לגבי שתי השאלות הראשונות, עזרתי לילדים להגיע לפתרון בעזרת שאלות מכווניות; את התרגיל השלישי דימה פתר לבד והסביר כך:

– אם לוקחים חצי כיכר לחם חצי פעם, מקבלים רבע כיכר.

מפגש 76. לכל דבר יש סוף

שני, 12 בדצמבר 1983. 17:00-18:00. דימה, פיטר ויבגני.

תרגיל 1. תרגילים מס' 12 ו-13 מהספר של טרודנייב.

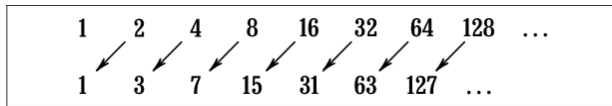
עצרנו בתרגיל מס' 14, כי הוא עסק בחילוק עם שארית, אז דיברנו על הנושא ואפילו על השאלה מה השארית הכי גדולה שיכולה להתקבל כתוצאה מחילוק ב-4.

התברר שדימה מגלה את שארית החילוק של 19 ב-4 כך: 19 לא מתחלק ב-2 – קיבלנו שארית 1; נחלק 18 ב-2, נקבל 9; 9 גם לא מתחלק ב-2; נוסיף עוד 1 לשארית; קיבלנו שארית 2. הוא היה מופתע מאד שהשארית האמיתית היא לא 2 אלא 3.

תרגיל 2. סכום חזקות של 2.

סיפרתי לילדים את האגדה על ממציא השחמט, שביקש לקבל בתמורה גרגרי חיטה: על המשבצת הראשונה יונח גרגר אחד, ועל כל משבצת יונחו פי שניים גרגרי חיטה מאשר על הקודמת, וסיפרתי על מה שקרה בעקבות הבקשה הזו. אחר כך חישבנו ורשמנו חזקות של 2. סכמנו אותן, ורשמנו כל סכום מתחת לחזקה המתאימה (איור 127).

איור 127. בשורה העליונה: חזקות של 2. בשורה התחתונה: סכומי החזקות. ניתן לראות שכל סכום שווה לחזקה הבאה פחות 1.



ביקשתי מהילדים לנחש מה החוקיות. פיטר ניחש והסביר ראשון. את הסכומים הבאים (אחרי 511) כבר רשמנו בלי לחשב. דימה החליט לחשב עד החזקה ה-64, אבל הצלחתי לעצור אותו.

רק בזמן החוג. אחרי החוג החלטתי לחשב בכל זאת, ובאמת חישבתי. חישבתי כמה ימים, על פני כמה דפים. אבא לא בדק, כמובן, אבל וידא שכמות הספרות והספרה האחרונה נכונים. כשסיימתי לחשב כבר הספקתי לשכוח על מה דיברנו, וחשבתי שהמספר שחישבתי הוא רק כמות הגרגרים במשבצת האחרונה. אפילו כשאבא הזכיר לי שמדובר בסכום של כולם, לא הבנתי. – דימה.

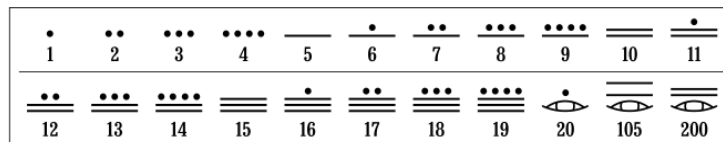
לסיכום קישרתי בין התרגיל הזה לתרגיל סכימת המספרים האי-זוגיים (כשמגלים את החוקיות, אפשר לחשב הרבה יותר בקלות).

תרגיל 3. מספרי שבט המאיה.

הפעם לא נתתי לילדים להמציא מספרים, אלא אמרתי מספרים בעצמי, והלכתי כמעט לפי סדר המספרים הטבעיים. הילדים הבינו את השיטה טוב יותר מאשר בפעם הקודמת, אבל עדיין לא עד הסוף. גילינו, אגב, שהשיטה לא חד-חד-ערכית ועל. למשל, המספרים 105 ו-200 נכתבים אותו דבר. יכול להיות שכשכותבים את המספר 105 צריך להרחיק יותר את הקו העליון מהתחתון, אבל זו רק השערה שלי (אם כי גם הילדים חשבו עליה).

שבט המאיה כתבו מספרים בשיטה הבאה³⁶. המספר 1 סומן על ידי נקודה עבה; 2 – על ידי שתי נקודות, 3 – שלוש נקודות, ו-4 – ארבע נקודות. המספר 5 סומן בקו אופקי; 10 – שני קווים; ו-13, למשל – שני קווים ומעליהם שלוש נקודות. לבסוף, המספר 20 קיבל סימון קצת מסובך: נקודה, ומתחתיה עין (עם הילדים ציירנו אליפסה). לעין היה תפקיד דומה לתפקיד האפס אצלנו, רק שבמקום להגדיל את המספר פי 10, היא הגדילה אותו פי 20. המשמעות של מספר ומתחתיו עין הייתה: הכפל את המספר ב-20. מספר ומתחתיו שתי עיניים: הכפל ב-400. ובכן, שאלה: עין ומעליה שני קווים – זה עשר פעמים עשרים, או חמש פעמים עשרים ועוד חמש (איור 128)?

איור 128. כתיבת המספרים בשיטת שבט המאיה. המספרים 200 ו-105 נכתבים באותו אופן; לא מצאנו התייחסות לזה בספרים.



בתרגילים האלה, כמו גם בתרגילים של הספרות הרומיות, פיטר מצליח יותר מדימה.

קריאה.

התחלנו לקרוא פרק מהספר של דפמן שעוסק במצרים העתיקה. הפרק ארוך, אז לא הגענו אפילו לאמצע. על הדרך סיפרתי להם על הפירמידות, על שבעת פלאי תבל וכו'. הילדים לא הבינו את החלקים שקשורים לשברים. סיפרתי להם על פ. שמפוליון שפענח את הכתב המצרי הקדום, ועל זה שהמשימה שלו הייתה הרבה יותר קשה משלי – הרי אני ידעתי באיזו שפה כתוב הטקסט, ופענחתי אותיות ולא הירוגליפים. יהיה טוב אם נמשיך לעסוק קצת בהיסטוריה; אני רוצה להראות להם עוד תמונות ממצרים.

סיכום

המפגש הזה היה האחרון לשנה זו: ב-14 בדצמבר אני נוסע לכנס כמעט עד הנובי גוד. בשנה הבאה אני מתחיל להעביר עוד שני חוגים: אחד לבנות, ואחד נוסף בבית הספר, בכיתה של דימה. לכן אני לא

³⁶ קראתי על השיטה הזו לראשונה בספר של גלייזר שכבר הזכרתי לעיל, לכיתות ד-ו. בהמשך, גיליתי ממקורות רציניים יותר ששיטת הכתיבה של שבט המאיה הייתה קצת יותר מורכבת: חוץ מהבסיס 20 היה בה גם תפקיד חשוב למספר 18. אבל זה לא קשור לסיפור שלנו.

חושב שיהיה לי פנאי להמשיך את היומן הזה. חוץ מזה, מרגישים שהמפגשים האלה נהיים יותר ויותר דומים לחוג בית ספרי רגיל, עם נושאים רגילים, ובהדרגה הם מאבדים מהייחודיות שלהם. לכן החלטתי להפסיק את כתיבת היומן הזה, וזה העמוד האחרון שלו.

מצד שני, נראה שכדאי שאתחיל לנהל יומן לחוג של הבנות, ולהשקיע במיוחד בשלב ההתחלתי שלו, שלא מופיע ביומן הזה. זו התכנית.

13 בדצמבר, 1983.

8 בבית הספר ובבית

החוג של הבנים התכנס עוד כמה פעמים, אבל כמעט אין תיעוד של המפגשים האלה. בחלק הזה אתאר כמה חידות שנראו לי מעניינות. אני ודימה המשכנו ללמוד, בלי תכנית סדורה, לרוב במקטעים, אבל הצטבר מזה חומר לפנקס קטן. החלק השני של הפרק הזה הוא אוסף של סיפורים ותובנות לגבי כיתות א' בשני בתי ספר שונים.

שיחות על מתמטיקה ומחשבות מצערות על בית הספר

3 באוקטובר 1983. אחרי החודש הראשון בבית הספר.

[נכתב אחרי מפגש 68 (עמ' 137) – כשפתרנו את התרגיל עם הילד שבשנה הבאה ימלאו לו 13]. משום מה, עד לאחרונה חשבתי שבית הספר לא ישפיע על דימה כמו שהוא משפיע על ילדים אחרים (מלחיץ להשתמש במילה "מקהה" בהקשר שלו; נסתפק ב"השפעה שלילית"). לאחרונה אני שם לב שהוא קצת ירד מהמסלול. למשל, לא מזמן הוא שאל אותי:

– אבא, כמה ימים זה ארבעה שבועות? צריך להוסיף ארבע פעמים שבע ל-228, או לחסר? לא הצלחתי להבין איך הוא הגיע למספר 228.

פעם אחרת חזרנו מבית הספר וניסינו לחשב האם מורה אחד לספורט יכול ללמד את כל הכיתות. הוא לא הבין איזה חישובים צריך לעשות ולמה, לא הצליח לחשב כמה שיעורים יש בשבוע, לא ידע אם להכפיל ב-2 או לחלק (שני שיעורים שבועיים לכל כיתה), וכו'. גם היום הוא לא היה בשיאו. העניין הוא לא שהוא חשב יותר לאט, אלא שהיו לו פחות רעיונות, ואלה שהיו היו פחות מגוונים.

מה שמזכיר את הסיפור של גליה ז. על הבן שלה. בספר הלימוד של הבן שלה (לכיתה ב', נדמה לי) יש חלק של בעיות "לא סטנדרטיות". במהלך השנה, הבן שלה לא הצליח לפתור אף אחד מהן. שבועיים אחרי תחילת החופש הגדול הוא כבר פתר את כולן. משהו השתחרר בו.

נובמבר 1983. המפלצת של מערכת החינוך.

[נכתב כשדימה סכם את כל המספרים האי-זוגיים מ-1 עד 99, ואחר כך מ-1 עד 999].

יצא שביום של החוג (17 בנובמבר) דימה חזר מאוחר מבית הספר, והיה מזג אוויר נעים, אז אחרי ארוחת הצהריים שחררתי אותו להסתובב בחוץ. לכן הוא התיישב לפתור את שיעורי הבית אחרי החוג, והפער בין ההישגים שלו בחוג להישגים שלו בבית הספר היה בולט במיוחד. העניין הוא שמתחילים לתת ציונים בכיתה א' רק ברבע השני, כלומר החל מה-10 בנובמבר. בשבוע שחלף מאז דימה קיבל ארבעה ציונים במתמטיקה: 2, 3, 2, 3. בסדר הזה. ביום חמישי ב-17 לנובמבר דימה קיבל את המחברת שלו הביתה, ואנחנו, בתור הורי התלמיד הכושל, היינו צריכים לחתום ליד כל ציון, כדי להראות שאנחנו מודעים להישגים שלו.

מה הבעיה? עינתי במחברת שלו. היא הייתה מלאה בערך עד השלישי. בכל המחברת לא הייתה אף טעות חשבונית. אפילו הופתעתי: הייתי רגיל שהוא מתבלבל לפעמים בחישובים. הציון הכי גבוה – 3 – היה על פתרון של תרגילים חשבוניים פשוטים, בסגנון $2=3-4-9$. הבעיה היחידה שם הייתה הכתב. אם הוא היה כותב יפה, הוא היה יכול לקבל גם 5. שאר הציונים היו על בעיות מילוליות, ושם המצב היה יותר גרוע. כמובן שכל הפתרונות היו נכונים, ונראה היה שגם המורה מודעת לזה, אבל הכתיבה הייתה שורש כל הצרות. היו הערות גם על הכתב, כמובן, אבל הן לא היו העיקר. ההערות האחרות היו כאלו (אני מערבת פה "טעויות" מכמה בעיות שונות): במילה "פתרון" יש שגיאת כתיב; אחרי המילה "שלו" אין נקודה; גם במילה "תרגיל" יש שגיאת כתיב; באחד המקומות במקום "תשובה" כתוב בקיצור "ת.". הלאה: אחרי המילה "פתרון" צריך לשים נקודתיים. בהתחלה דימה לא שם לב לזה, ואחרי ששאלתי אותו בבית הוא בדק במיוחד בזמן השיעור וגילה שאכן צריך. אבל בפעם הבאה הוא כתב את הנקודתיים במקום הלא-נכון: "פתרון 6: שקלים" (מה המשמעות של הסימון הזה עבורו?). עוד עניין הוא השימוש

ביחידות (וזה מופיע בכל התרגילים). נניח שצריך לסכום 3 ו-4 פרות. בחלק שבו כותבים את נתוני השאלה באופן מקוצר, צריך לכתוב 3 פ' ו-4 פ', למשל: "ברפת – 3 פ', באחו – 4 פ'". אחר כך, כשעושים את החישוב עצמו, לא כותבים את היחידות בכלל: $3+4=...$. כשמגיעים לפתרון, היחידות חוזרות, אבל בסוגריים: (פ') $7 = ...$. (זה הגיוני, אחרת מצד שמאל של השוויון היו מספרים חסרי יחידה, ובצד ימין היו פרות. אבל מה ילדים בכיתה א' מבינים בזה?). לבסוף, בחלק של התשובה המילולית, ה"פ'" הזה שוב יוצא מהסוגריים. דימה בהתחלה לא קלט את העניין והיה רושם סוגריים במקומות הלא נכונים, ולפעמים גם היה שוכח לרשום יחידות. עוד עניין שהוא התקשה בו היה המיקום של סימן השאלה. אם בשאלה שואלים כמה משהו יש למישהו, אז סימן השאלה מופיע באותה שורה, למשל: "באחו יש – ? – שהן 1 פ' יותר מברפת". לעומת זאת, כשצריך לסכום מספרים, כותבים את שני הנתונים בשתי שורות נפרדות, מימינן סוגר מרובע, ולידו סימן שאלה. גם את המוסכמה הזו דימה לא קלט. הוא לא חשב שיש משמעות ספציפית לסוגר המרובע, או שהוא הבין אותו בתור "צריך לגלות משהו". כך, הוא היה רושם את הסוגר הזה לפעמים גם בתרגילי חיסור (זה כבר לא היה במחברת אלא בלמידה שלנו בבית).

בקיצור, כמו שהקוראים כבר בטח מנחשים, התחלנו להתאמן בבית. אלה נתנה לדימה את התרגיל הבא: "לשרה יש 8 חרציות. היא נתנה 3 חרציות לילדה אחרת. כמה חרציות נשארו לה?" (וזה אחרי ההישגים שלנו בחשבון!). כמובן שהמטרה הייתה לא לפתור את התרגיל אלא לרשום נכון את נתוני השאלה ואת הפתרון.

בהתחלה הכל הלך חלק: הוא כתב את המילה "פתרון" בלי שגיאות ולא שכח לכתוב נקודה בסוף משפט. אחר כך התחלנו להתווכח: אני חשבתי שצריך לכתוב "לשרה – 8 ח'", והוא טען שבמקרים כאלה הם תמיד כותבים "שרה – 8 ח'". מדובר בסוגיה חשובה – מורידים להם נקודות גם על סטיות הרבה יותר קטנות מהתבנית. זה נשמע לי מוזר, אבל באמת התרגילים הקודמים היו כתובים כך. נסוגתי, למרות שלא הייתי לגמרי בטוח שהוא צודק. אחרי שדימה כתב את השורה הראשונה הוא עצר רגע לחשוב, ואז שמעתי ממנו לראשונה בחיי משפט שחשבתי שלא אשמע ממנו לעולם: – עוד לא פתרנו תרגילים כאלה.

מה קרה? ! מתברר שלא ברור איך כותבים את השורה השנייה. אם כותבים "לשרה – ? – שהן 3 ח' פחות" אז זה לכאורה סותר את השורה הקודמת. – צריך שלמישהו אחר יהיה פחות, – מסביר לנו דימה.

אני ואלה רצינו לדפוק את הראש בקיר, אבל השתדלנו לשרר עסקים כרגיל ושינינו את השאלה: "... וליעל היו שלוש חרציות פחות", אבל גם זה לא סגר את הפינה. האם צריך לכתוב מקף אחרי סימן השאלה, או רק לפניו? האם אחרי המקף צריך לכתוב אות גדולה? הרגשתי חסר אונים. והרי צריך לכתוב גם יפה, ומסודר, ובכתב מרובע, אבל במחברת משבצות. מפתיע שאחרי כל זה דימה הצליח לחסר 3 מ-8 בלי לטעות. אגב, גם בתרגילי החיבור יש כללים.

– נגיד שצריך לסכום 7 ו-3, – מסביר דימה. – אם תחשב 7+3 זה לא יהיה טוב, צריך לחשב 7+2+1. (בהתחלה לא האמנתי לו, אבל התרגילים שהופיעו בהמשך הראו שהוא דובר אמת). ואם רוצים לסכום 6 ו-4, צריך לחשב 6+2+2. נניח, המורה אולגה שואלת:

– כמה יצא לך?

– 10.

– ואיך חישובת?

– 6+4.

– שב, תשובה לא נכונה. ואיך אתה חישובת?

– 6+1+1+1+1.

– שב, תשובה לא נכונה! ואתה?

– 6+2+2.

– נכון!

– ואיך אתה מחשב? – שאלה אלה.
– האמת היא שאני מחשב $6+4$, אבל אם שואלים אותי אז אני עונה שחישבתי $2+2+6$, – ענה דימה,
גאה בעצמו על התחכום.

נראה שהשיטה היא ללכת על ציר המספרים בצעדים של 1 או 2. ייתכן שיש לזה איזשהו יתרון עבור ילדים שעוד לא יודעים חשבון בכלל, אבל המפלצת הזו (אני מתכוון למערכת החינוך – המורים ממש לא אשמים) מכריחה את כולם להכנע לעקרונות הפרימיטיביים שלה. ואין לאן לברוח!

30 בדצמבר 1983. *כפל במאונך.*

לימדתי את דימה לחשב סכום ומכפלה במאונך. חישבנו כמה שניות יש בשנה (ליתר דיוק, ב-365 יממות). עכשיו הוא ממציא לעצמו כל יום תרגילי כפל ופותר אותם. עושה הרבה טעויות.

2 בינואר 1984. *מספרים בבסיס בינארי.*

בדרך לקולנוע ובחזור דיברנו על שיטת הספירה הבינארית. הרעיון היה של דימה: הוא לא אהב את השיטה של שבט המאיה, כי ה"עין" מגדילה את המספר פי 20 וזה יותר מדי. היה פשוט יותר אם כתיבה של אפס הייתה מגדילה את המספר, נניח, פי שניים. הוא לא הבין לבד שבבסיס כזה דרושות רק שתי ספרות, אבל הגיע לזה בעזרת שאלות מכווונות שלי. המרנו מספרים לייצוג בינארי, וזיהינו כמה חוקיות (למשל, אילו מספרים מורכבים רק מהספרה 1). סיפרתי לו על מחשבים. בערב הוא הסביר לאלה שאפשר לייצג מספרים גם בבסיס שלוש, ארבע, חמש וכו', למרות שלא דיברנו על זה.

(מה המטרה של השיחות האלו? זו שאלה שקשה לדון בה, מאותה סיבה שקשה להסביר למישהו אחר את עולם הערכים שלך. דמיינו חברה שבה מכבדים רק אנשים עם תיקים גדולים – ככל שהתיק גדול יותר, כך האדם מכובד יותר. אתם רוצים לשכנע את האנשים שחיים בחברה הזו שהקריטריון שלהם לכבוד שגוי. אבל קודם אתם צריכים שהם יקשיבו לכם, ובשביל זה תצטרכו להשיג תיק גדול. אני עצמי מהווה חברה כזו, במובן מסוים. התלבטתי האם כדאי בכלל ללמוד איתם דברים לא שימושיים, למשל, לכתוב מספרים בשיטה של שבט המאיה. ייתכן שהסיפור הזה נראה לחלק מהקוראים עוד פחות הגיוני. לכאורה, אפשר לטעון "כן, כדאי ללמוד דברים לא שימושיים, כי זה מועיל! הרי השיטה של שבט המאיה נתנה לדימה את הרעיון של השיטה הבינארית, ואין שום ספק שהשיטה הבינארית היא שימושית ביותר!". נותר רק לתהות האם טיעון כזה עושה לי שירות טוב או להפך. האם הוא מחזק את הרעיון שבחיים כדאי לעסוק גם בדברים לא שימושיים, או רק מערער אותו עוד יותר?).

5 בפברואר 1984. *אני עושה חזרות.*

דימה ישב איתי שעה בשיעור פרטי עם תלמיד כיתה י'. לפני כן הוא הציג בפתרונות של התרגילים. הופיע שם: $x > 0, x < -2$. הוא שאל אותי איך x יכול להיות גם קטן מ-2 וגם גדול מ-0. הסברתי לו. הוא עבר על כמה דוגמאות כדי לבדוק אם הוא הבין נכון את ההסבר שלי; בין השאר הוא שאל לגבי הערכים הגבוליים: 2 ו-0. הוא אמר:

– אז יש רק שלושה מספרים שלמים שלא מתאימים?

– איזה?

– -1, -2, ו-0.

– נכון. וכמה מספרים לא שלמים?

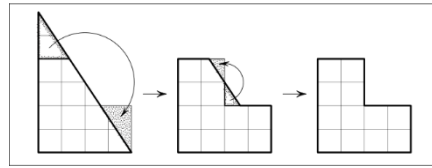
– מלא; אפשר להמציא כמה שרוצים.

בקיצור, הוא הבין את החומר הזה טוב יותר מהתלמיד הפרטי שלי.

11 בפברואר 1984. *שטחים של צורות שונות.*

(באחד המפגשים של החוג). דיברנו על כל מיני דברים שקשורים לשטח, למשל, חלוקה של יחידת שטח לחלקים קטנים יותר. בין השאר, שקלנו כל מיני גזרים של נייר במאזני מעבדה. אחר כך דיברנו על שטח של משולש ישר זווית. כמובן שבסוף סיפרתי להם על שיטת החישוב הסטנדרטית – השלמת המשולש למלבן. אבל לפני כן הילדים הציעו שיטה משלהם – קצת מסובכת, אבל נכונה (איור 129).

איור 129. שיטה קצת מסובכת, אבל עובדת, לחישוב שטח משולש ישר זווית.



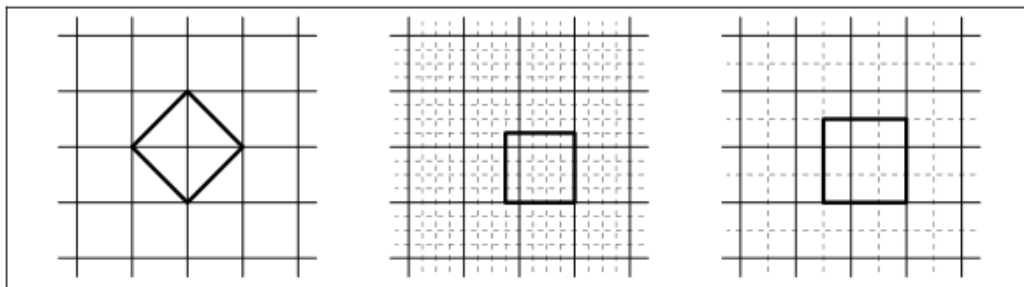
16 בפברואר 1984. מוזר: מספרים בבסיס בינארי זה יותר קל משרים?

אתמול והיום דימה התעסק בלהכפיל מספרים בינאריים במאונך, ואז לבדוק את התוצאה בבסיס עשרוני. הוא המציא בעצמו את העיסוק הזה. היה מכפיל, למשל, 10 ב-100 או 1000 ב-1000, ואז בודק האם יוצא 1000 או 1000000, בהתאמה. מה שמשמעותי בעיני הוא שהוא הבין בעצמו שכשסוכמים הרבה אחדות, "זוכרים" את הסכום כמה מקומות אחורה ("1+1+1+1" – פה נרשום 0, כאן נזכור 0, וכאן 1). היו לו טעויות – רובן נבעו מזה שהוא התבלבל בטור שבו זכר ספרה כזו או אחרת. לימדתי אותו לרשום את הספרות שהוא זוכר.

היום דיברנו על הקשר בין השיטה הבינארית לאוקטלית ולהקסדצימלית. הוא הבין הכל. אבל הוא לא יודע להשוות בין $\frac{3}{5}$ ל- $\frac{4}{7}$, למשל. סגנון החשיבה שלו פורמלי מדי: הוא מנסה להמציא פעולות שצריך לעשות בשביל לגלות, אבל לא מתעמק בתוכן של מושג השבר.

20 בפברואר 1984. ריבוע בשטח שתי משבצות.

(שוב בחוג). הפעם פיטר הפתיע אותי. המשימה הייתה כזו: לצייר ריבוע בשטח שתי משבצות בדיוק. בהתחלה דימה ניסה שטח של $1 + \frac{1}{2}^2$ (איור 130 מימין) ושטח של $1 + \frac{1}{4}^2$ (איור 130 במרכז); בשתי הפעמים הוא חישב את השטח נכון והבין שזה לא 2. חשבתי שתכף אדהים את הילדים בפתרון שלי, אבל כמעט מיד פיטר לקח עפרון וצייר אותו בעצמו (איור 130 משמאל)³⁷.



איור 130. מימין: נסיון ראשון. כל צלע של הריבוע היא באורך $1\frac{1}{2}$, והשטח הוא $2\frac{1}{4} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}$ משבצות. במרכז: נסיון שני. כל צלע היא באורך $1\frac{1}{4}$, והשטח הוא $1\frac{9}{16} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$. מימין: ריבוע בשטח 2. ניתן לראות שהוא מורכב מארבעה חצאי משבצות.

לא מזמן דיברתי עם דימה על אי-הרציונליות של המספר $\sqrt{2}$. הוא שאל שאלות חכמות:
– אז גם המספר $1 - \sqrt{2}$ לא רציונלי? וגם $2\sqrt{2}$?

³⁷ הנושא של "שטח ריבועים נטויים" התברר ככר פורה לשפע של בעיות מתמטיות, אבל לגיל קצת יותר גדול. ב-1989, בקייטנת המחשבים בפרסלבל-זלסקי, עסקנו בנושא הזה עם קבוצת ילדים בגילאי 10-14 במשך שבועיים. הנושא הזה התפתח מאליו למשפט פיתגורס, ואז לבעיה של אוילר לגבי המספרים המשולשים-ריבועיים (מכמה אבנים אפשר להרכיב גם משולש וגם ריבוע), ומשם למשוואת פל (פתרון בשלמים למשוואה $x^2 - 2y^2 = 1$), ולבסוף, לתחרות מציאת השלשה הפיתגורית הגדולה ביותר (שלושה מספרים שלמים a, b, c שמקיימים את המשוואה $a^2 + b^2 = c^2$). המנצח היה ילד בן 9 בשם דימיטרי. בהמשך, בעקבות השיעורים האלה, דימיטרי שאל אותנו אם קיימת כמות כדורים (גדולה מ-1) שאפשר להרכיב ממנה גם פירמידה וגם קוביה. הבעיה הזו שייכת לתחום מתמטי שלא לומדים אפילו באוניברסיטה – אריתמטיקה של עקמות אליפטיות. עם קצת מאמצים, אחד המורים מצא מאמר מדעי שמראה שחוק מ-1 אין מספרים כאלה.

אבא הסביר לי את ההוכחה לגבי אי-הרציונליות, אבל לא הבנתי. ראשית, היא נראתה לי ארוכה מדי, ושנית, עד אז מעולם לא נתקלתי בהוכחות על דרך השלילה. מניחים שאי אפשר לצמצם שבר, ואז מגיעים איכשהו למסקנה שבעצם כן אפשר לצמצם אותו. מסיקים מזה משום מה שהשבר לא קיים. – דימה.

כפל מספרים זוגיים ואי-זוגיים.

באותו מפגש שיחקנו במשחק הבא: בכל פעם אני משחק מול אחד הילדים. כל אחד מאיתנו מראה בו זמנית כמות כלשהי של אצבעות ואנחנו מחשבים את המכפלה; אם המכפלה זוגית אני מנצח, ואם אי-זוגית אז היריב שלי מנצח. כמובן שתמיד ניצחתי. דימה ניחש מיד למה (ואולי הוא ידע מראש – לא זוכר), לפיטר לקח זמן, ויבגני באופן כללי היה לא כל כך בעניינים.

8 במרץ 1984. חילוק במאונך.

היום לימדתי את דימה לחלק במאונך. בינתיים הוא עוד לא הבין את זה עד הסוף. לקראת סוף היום התברר ששכחתי ללמד אותו חיסור במאונך (כלומר, את העקרון של "לשאול" מספרים מעמודות אחרות – כל השאר ברור גם כך). הוא המציא שיטה משלו: הגדיל את המחוסר ואת המחוסר כך שהספרה המתאימה של המחוסר תהיה קטנה יותר מזו של המחוסר (למשל, $54-57=47-50$).

23-25 במרץ 1984. שיטות ספירה.

הרבע השלישי של שנת הלימודים הסתיים, ודימה קיבל 4 במתמטיקה (ה-5 היחיד שלו הוא בספורט, בשאר המקצועות הוא קיבל 4). גם החבר שהוא יושב לידו, קונסטנטין, קיבל 4 במתמטיקה (וזה ה-4 היחיד שלו; בכל שאר המקצועות הוא קיבל 5). דימה סיפר לי שבמבחן האחרון קונסטנטין שאל אותו כמה זה $6-12$. דימה לא רצה לרמות ולכן לא אמר לו; קונסטנטין חשב קצת ויצא לו $8=6-12$. צץ לי רעיון לתרגיל חדש: שאלתי את דימה באיזה בסיס המשוואה $8=6-12$ נכונה. הוא אמר מיד שאם משתמשים בספרה 8 אז הבסיס צריך להיות לפחות 9. אחר כך הוא מלמל הרבה "לא יודע, לא יודע...". לצערי לאחרונה הוא תמיד מתחיל מזה: קודם משכנע את עצמו ואת כולם שהוא לא יצליח לפתור, ורק אחרי זה פותר. גערתיו בו, ואז הוא פתר ואמר שזה נכון בבסיס 12. – אתה רואה, – אמרתי, – כנראה שקונסטנטין פשוט פתר את התרגיל הזה בבסיס 12. דימה ביקש עוד כמה תרגילים כאלה ופתר אותם. ביומיים הבאים הוא המציא תרגילים כאלה בשבילי. למשל, באיזה בסיס נכונה המשוואה $1E=7-22$? (בבסיסים גדולים מ-10, מסמנים את הספרות 11 ואילך באותיות A ואילך). הפתרון: בבסיס 19. הוא הופתע מאד מהפתרון המהיר שלי: הוא עצמו פותר בשיטת האלימינציה.

באיזשהו שלב תהינו למה יש משוואות שנכונות בכל שיטות הספירה שבהן יש להן משמעות (כלומר, כל הספרות קיימות; למשל, $55=23+32$ בכל בסיס החל מ-6), ויש כאלו שנכונות רק בשיטות מסויימות. בהתחלה הייתה לדימה השערה מוזרה ולא קשורה לעצם העניין. אחר כך הוא הבין שזה תלוי האם יש carry בין העמודות או שהחישובים מתבצעים בכל מיקום בנפרד. כשהוא הסביר לי את זה, לא התאפקתי ואמרתי לו בטון מעודד: – כל הכבוד! אולי עוד תצליח לקבל 5 במתמטיקה ברבע הבא.

מרץ, אפריל, מאי.

במהלך החודשים האלה דימה ביקש מדי פעם לחשב דברים במחשבון שלי. על הדרך הוא למד, וממשיך ללמוד, כל מיני מושגים. בהתחלה הוא למד מה זה שבר עשרוני. אחר כך גילה את פעולת ההעלאה בחזקה (שלמה). הכיר את המספר π ואת המשמעות שלו. אחר כך, לבקשתו, סיפרתי לו על מדידת זוויות במעלות וברדיאנים. הסברתי לו גם מה זה סינוס. – ואיפה ההפכי לסינוס? – הוא שאל באגביות, כאילו הוא כבר מזמן מכיר את המושג של פונקציות הפכיות.

הוא עוד לא לגמרי מבין ייצוג של מספרים בשיטת הנקודה הצפה (מנטיסה וחזקה).

היו פעמים שהוא פתר בעיות עם תוכן ברור, כמו "כמה שניות יש בשנה?", או "כמה ימים אני חי?", אבל זה היה היוצא מן הכלל שמעיד על הכלל. מה שהוא התעסק בו המון זו הבעיה הבאה³⁸. נתבונן בסדרה שמתקבלת על ידי הכלל הבא: נסמן ב- u_n את המספר ה- n בסדרה. אם u_n זוגי אז $u_{n+1} = u_n/2$, ואחרת, $u_{n+1} = 3u_n + 1$. אם מתחילים מהמספר $u_0 = 1$, מקבלים לולאה: 1, 4, 2, 1. לכן נגדיר כלל: כשמגיעים ל-1, עוצרים. אם נתחיל ב-7, למשל, נקבל את הסדרה: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 1, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. הבעיה הפתוחה היא: האם לכל מספר שנתחיל בו, נגיע מתישהו ל-1. דימה בדק את השאלה הזו לגבי כל מיני מספרים התחלתיים³⁹.

חוץ מזה, החישובים שלו היו די חסרי משמעות. למשל, הוא חישב עשרות פעמים את החזקות של 2. כשטיילנו הוא היה מנדנד לי שאתן לו תרגיל. נתתי לו תרגילים בעיקר בשברים. בהתחלה הוא הצליח בקושי, או אפילו לא הצליח בכלל. אחר כך הגלגלים התחילו לזוז בכיוון הנכון, ובהדרגה הוא הגיע לרמה שכמעט תמיד הוא פתר נכון תרגילים כמו $\frac{4}{7} + \frac{3}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ וכד'. אין לי מושג איך הוא מחשב את זה, ואני לא מצליח להבין את ההסברים שלו. הרושם הוא שבכל פעם הוא עובד אחרת ושהוא עדיין לא הבין (כלומר, לא המציא) את הרעיון של מציאת מכנה משותף.

אם אני זוכר נכון, בפועל חיפשתי מכנה משותף. עבדתי כך: לקחתי $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{3}$ ממספר כלשהו שקל לקחת ממנו את החלקים האלה – למשל מ-6 או מ-12, חיסרתי את האחד מהשני, ושוב חילקתי באותו מספר. לא ידעתי למה אני בהכרח אקבל את אותו פתרון לכל בחירה, אבל הנסיון הראה לי שזה מה שקורה (כלומר שתמיד אבא אומר שהתשובה נכונה). השתדלתי שהמספר יהיה כמה שיותר קטן, לכן בדרך כלל זה אכן היה המכנה המשותף הנמוך ביותר.

אחרי אחת הפעמים שהוא ביקש תרגילים נתתי לו את הספר של טרודנייב ואמרת לי שיש לי שחפשי שם. במשך כמה ימים הוא פתר את התרגילים בספר בזה אחר זה, עד שנמאס לו. כנראה שיותר משחשבה לו המתמטיקה, חשובה לו "התקשורת המתמטית".

כשהוא היה חולה הוא ביקש שאתן לו ספר מתמטיקה של כיתה ב'. נתתי לו, וגם של כיתות ג' וד', אבל הוא רק דפדף בהם בלי להתעמק.

הרושם שלי הוא שאם הייתי לומד איתו כמו בבית הספר, שיעור אחד בכל יום, היינו יכולים ללמוד בשנה הבאה את תכנית הלימודים בערך עד כיתה ח'. אבל כמובן שלא אעשה את זה. אני חושב שלמידה כזו היא קבילה רק החל מגיל 11-12, לא לפני כן.

[במילים "למידה כזו" אני מתכוון להוראה מונחית-תוכן. למשל, אם הייתי מסביר לדימה מה זה מכנה משותף ואיך סוכמים ומחסרים שברים, זה היה לוקח לכל היותר חצי שעה, אבל במקום זה אני מנסה לגרום לו להמציא את זה בעצמו, כך שהסיפור נמשך כבר כמעט שנה. בעיני, למידת הוראות כזו היא לגיטימית (ואפילו הכרחית, אחרת קשה להגיע רחוק), אבל רק החל מגיל מסוים – אחרי שהילד מגיע למה שפיאז'ה קורא "שלב האופרציות הפורמליות"].

10 ביוני 1984. ציון שנתי 4.

היום קיבלנו את התעודה של דימה. הציון השנתי שלו במתמטיקה הוא 4. מכל הציונים זה נראה לי היחיד שלא הוגן. מה שהכי מצער אותי הוא שהמורה אפילו לא חושדת כמה הוא מתקדם יחסית למה שמצופה ממנו. מאיפה היא יכולה לדעת?

³⁸ ברבות השנים, הבעיה הזו נהייתה מאד מפורסמת וזכתה לכמה שמות (למשל, "בעיית סירקיוז", שקשורה ל"השערת גולדבך", היא "השערת אולם" ו"השערת ה-3n+1").

³⁹ ההשערה נבדקה בעזרת מחשב ונמצאה נכונה עבור מספרים עד סדר גודל של $10^{16} \cdot 2.7$ (מאז כתיבת הספר, אפילו יותר – ר.פ.). הבעיה הכללית עדיין פתוחה.

17 ביוני 1984. בעיה ממבחני הקבלה לפקולטה לפיזיקה.

היום דימה פתר בעיה ממבחני הקבלה בכתב לפקולטה לפיזיקה באוניברסיטת מוסקבה, משנת 1983 (טור א', שאלה 4 – כלומר שאלות ברמה בינונית⁴⁰). הבעיה נוסחה כך:
אם מחלקים מספר דו-ספרתי מסוים בסכום הספרות שלו, מקבלים מנה 7 ושארית 6. אם מחלקים את אותו מספר במכפלת הספרות שלו, מקבלים מנה 3 ושארית 11. מהו המספר?
כך זה קרה: התלמיד הפרטי שלי, אנדריי, לא הצליח לפתור את הבעיה הזו. ניסיתי להסביר לו את הפתרון במשך חצי שעה. לקראת הסוף העצבים שלי היו כבר כל כך מרוטים שעניין אותי לראות איך דימה יתמודד עם הבעיה הזו. לא רציתי שישתחצן, אז במקום לתת לו את הספר עם שאלות המבוא, העתקתי את השאלה הזו על דף נפרד. הדבר הראשון שהוא אמר אחרי שקרא את השאלה היה:

– אז חילקו לפחות ב-12, נכון?

(כלומר, הדבר העיקרי שהיווה מכשול עבור התלמיד שלי היה ברור לו מאליו). הוא התחיל לחשוב. צריך לציין שהסביבה הביתית לא ממש אפשרה לו להתרכז – בהתחלה אכלנו ארוחת ערב, אחר כך הוא ישב על הספה וחשב בזמן שג'ני הציקה לו, ואז אלה הושיבה אותו ללמוד אנגלית, אחר כך שוב ג'ני הציקה לו, וכן הלאה.

אסביר איך אני פתרתי את הבעיה – זה הפתרון שניסיתי להסביר לתלמיד. מהנתון הראשון אנחנו יודעים שהמספר הוא מהצורה $7k + 6$, כאשר $k \geq 7$ (אחרת שארית החלוקה ב- k לא יכולה להיות 6). המספרים הדו-ספרתיים מהצורה הזו הם: 55, 62, 69, 76, 83, 90, 97. בודקים את הנתון השני עבור המספרים האלה – הוא מתקיים רק עבור המספר 83, ולכן זה הפתרון.

אני מציג פה את הפתרון שלי בגלל שיש בו טעות, ומה שהדהים אותי הוא שדימה לא עשה את הטעות הזו (כך גיליתי שהיא קיימת – מהפתרון שלו!). לא רק שהמספר צריך להיות מהצורה $7k + 6$, אלא שסכום הספרות שלו צריך להיות שווה ל- k . לא בדקתי את השוויון הזה. לכן המספרים שמקיימים את התנאי הראשון הם לא כל המספרים שפירטתי לעיל, אלא רק שניים מהם: 62 ו-83.

כמה זמן אחרי ארוחת הערב דימה אמר:

– מצאתי פתרון למשפט הראשון, אבל הוא לא מתאים למשפט השני.

– מה המספר?

– 62. אבל אם מחלקים אותו ב-12 מקבלים 5 ושארית 2, ולא 3 עם שארית 11.

– איך מצאת את המספר הזה?

– הכפלתי 7 ב-8 והוספתי 6.

(שוב, מה שלא הצלחתי להסביר לסטודנט)

– ולמה הכפלת ישר ב-8 ולא ב-7?

– הכפלתי גם ב-7, יוצא 55. אבל סכום הספרות שלו הוא 10 ולא 7.

– הממ... נכון. אתה צודק, הממ...

זה שדימה אמר שהוא "מצא פתרון" לתנאי הראשון מראה שכרגיל, הוא לא דואג למצוא את כל הפתרונות (או להוכיח יחידות), אלא מסתפק בפתרון הראשון שהוא מוצא. לכן בשלב הזה נתתי לו רמז קטן שבלעדיו יכול להיות שהוא לא היה פותר את השאלה, אלא נשאר עם המספר 62. (ואולי כן היה פותר). אמרתי לו רק:

– אתה בכיוון הנכון.

הוא הבין אותי: הוא בכיוון הנכון, כלומר, צריך להמשיך להתקדם ולבדוק.

אחרי כמה זמן הוא ניגש אלי ואמר שגם המספר 83 מתאים לתנאי הראשון, אבל בחילוק מקבלים 3 (מה שנכון) ושארית 5. אמרתי לו שיבדוק את החילוק שוב. הוא בדק:

– נכון, באמת יוצא 11.

⁴⁰ לרוב מבחני הקבלה בכתב היו מורכבים מחמש שאלות: שלוש הראשונות קלות, הרביעית בינונית, והחמישית קשה.

ניגשתי רק כדי שאבא יגיד לי האם באמת 83 לא מתאים או שצריך לחלק שוב. התעצלתי לבדוק בלי לדעת שצריך. וכשאבא אמר לי לבדוק, הבנתי מה אמור לצאת, ולכן חיפפתי בבדיקה. – דימה.

אחר כך הסברתי לו שכדי לקבל פתרון מלא צריך לסיים את הבדיקה, לוודא שאין עוד פתרונות. בדקנו ביחד את $k = 12$ ו- $k = 13$.
– ומה הלאה? – שאלתי.

– הלאה זה כבר מספרים תלת-ספרתיים.
זה הסיפור. אוסיף שהבעיה נפתרה בעל-פה, ולא על דף, ושזה לקח בערך ארבעים דקות (ברוטו, כלומר כולל ההסחות; קשה להעריך מה היה הזמן נטו). אחר כך אני ואלה התלבטנו האם כבר אפשר להחשיב אותו לגאון, או שעדיין אין מספיק נתונים בשביל זה.

ספטמבר 1984.

בקין לא למדנו מתמטיקה. בתחילת שנת הלימודים (כבר כיתה ב') נתתי לדימה כמה תרגילים.
(1) את התרגיל הזה כבר הזכרתי בגרסה פשוטה יותר. תרנגולת וחצי מטילה ביצה וחצי ביום וחצי. כמה ביצים מטילות תשע תרנגולות בתשעה ימים?

כמובן שבהתחלה דימה ענה שתשע. אחר כך חשב רגע ואמר ש-18. הפתרון שלו היה כזה: 9 תרנגולות זה פי 6 מתרנגולת וחצי, ו-9 ימים זה פי 6 מיום וחצי. אז יהיו פי 12 ביצים. מכפילים 1.5 ב-12 ומקבלים 18. אמרתי לו להמשיך לחשוב. ואז הוא הבין שצריך להכפיל ביצה וחצי לא ב-6+6, אלא ב-6*6, ונתן את התשובה הנכונה: 54.

(2) שני מתמטיקאים נפגשים אחרי זמן רב שלא התראו, ואחד מספר לשני שיש לו שלושה בנים.

– בני כמה הם? – שואל המתמטיקאי השני.

– תגיד אתה: מכפלת הגילאים שלהם היא 36.

– אין מספיק נתונים, – עונה המתמטיקאי השני.

– אם כך, אוסיף שסכום הגילאים שלהם שווה למספר הספסלים בשדרה הזו.

המתמטיקאי השני סופר את הספסלים, חושב מעט ואומר:

– עדיין אין מספיק נתונים.

– אם כך, אוסיף שבני הבכור ג'ינג'י, – אומר המתמטיקאי הראשון.

– הו, זה כבר משהו אחר, – עונה המתמטיקאי השני, ואומר את גילאי הילדים.

בני כמה הבנים של המתמטיקאי הראשון?⁴¹

לצערי, לדימה לא היה שום כיוון לפתרון.

(3) דיברנו קצת על שברים. הוא פתר נכון שלושה-ארבעה תרגילים, אבל כל פעם בשיטה אחרת.

הוא נתקע בחישוב ההפרש $\frac{1}{9} - \frac{1}{7}$. מה שכן, בתרגיל הזה הוא הראה סימנים ראשונים של פתרון בדרך

הנכונה: הוא ניסה להציג $\frac{1}{7}$ כ- $\frac{2}{14}$ או $\frac{3}{21}$, ו- $\frac{1}{9}$ כ- $\frac{3}{27}$.

כמו שאמרתי, הסימנים הראשונים היו שם עוד קודם, פשוט המספר $7*9=63$ היה גדול מדי, אז לא חשבתי עליו. – דימה.

בבית הספר הציונים שלו במתמטיקה נעים בין 2 ל-4. המורה (מורה חדשה, לא אולגה אלא מרינה)

אמרה ביום ההורים:

– קליגרפיה היא מטרת העל שלנו כרגע.

⁴¹ פתרון: צריך לפרק את 36 לשלושה גורמים בכל הדרכים האפשריות: $1*36, 1*2*18, 1*3*12, 1*4*9, 1*6*6, 2*2*9$. אחר כך צריך לסכום את הגורמים האלה: $1+1+36=38, 1+2+18=21, 1+6+6=2+2+9=13$. מכיוון שהמתמטיקאי השני אמר שאין מספיק נתונים אחרי מזה, חוץ מהסכום 13 שמופיע פעמיים: $1+6+6=2+2+9=13$. המידע שמקבלים מהמשפט "בני הבכור ג'ינג'י" הוא שקיים בן בכור. לכן הפתרון הוא 2, 2, 9 (אם הילדים היו בני 1, 6, 6, לא היה בן בכור).

המשפט הזה נאמר בהקשר של מתמטיקה. אם כי, הכוונה ב"קליגרפיה" הייתה למוכן הרחב של המילה: כמה משבצות לרווח בין המילים, איפה שמים נקודה ואיפה לא, האם לכתוב "תרגיל 32" או "תרגיל מס' 32", ועוד ועוד. נראה לי שהשם הרשמי של זה הוא "שגרת כתיב אחידה". צריך לציין שלצערי דימה התחיל לעשות המון טעויות בחשבון. כנראה שיש לזה כמה סיבות: חוסר גיוון בסוג השאלות, דלקת באדנואידים שמעלה לו את החום, עייפות כללית...

25 באוקטובר 1984. מנסים ללמוד באופן יותר מסודר.

לבקשת דימה (וגם כי רציתי), החלטתי ללמוד איתו פעם בשבוע. היום היה השיעור הראשון שלנו. (1) ניתחנו את הטעות שהוא עשה כשחישב את הסכום $1+2+\dots+n$. הוא המציא שני פתרונות:

$$(א) \quad 1+\dots+10=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)=5*11=55$$

$$(ב) \quad 1+\dots+10=(0+10)+(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+(5+5)=6*10=60$$

הוא טען שהפתרון השני שגוי, כי "אסור להתחיל ב-0". לא היה לו שום הסבר הגיוני יותר (בערך שנה), בכל פעם הוא רק טען שזה בגלל ה-0. אפשר לומר שאלו שאריות של חוסר ההבנה של חוק השימור. ביקשתי ממנו לכתוב את כל הפעולות באופן מסודר. לקח לו המון זמן למצוא את הטעות, אבל בסוף הוא גילה אותה.

(2) פתרנו כל מיני תרגילים "עם איקס". הוא לא מבין את הנושא הזה. הייתי שמח אם אלה שטוענים שילדים בכיתה א' יכולים לעבוד עם משתנים בקלות היו שומעים על זה. עכשיו אני כבר בטוח שזו שטות. בבית הספר, אגב, הסימונים האלה מוצגים כשיטת כתיבה אחרת של התרגיל או של הפתרון. סימון אלגברי הוא כלי יעיל להפליא לפתרון תרגילים. אבל ילדים בכיתה א' לא חושבים על זה. מבחינתם זה פשוט עוד כלל חסר תוכן או הגיון, אחד מיני רבים שעוסקים כמה כותבים ואיך מסמנים.

מעניין שכשבתרגיל יש שני נעלמים, דימה לא מבין שצריך לסמן אותם בשתי אותיות שונות, נניח x ו- y . לא רק לא מבין אלא ממש מוחה: "גם את זה אנחנו לא יודעים, אז גם זה x ". נתתי לו שיעורי בית: לקרוא את הפרק על הרכבת משוואות מהספר "אלגברה בכיף" של פרלמן. אגב, מתברר שהוא שכח חיבור וכפל מאונך.

6 בנובמבר 1984. מכנה משותף.

שיעור לא מתוכנן במטבח, אחרי ארוחת הערב. דימה הגיע סוף סוף לרעיון של מציאת מכנה משותף, ולמד לחבר ולחסר שברים. אבל מבחינתו, עצם הקיום של מכנה משותף היה עניין של מזל (הוא בודק מספרים בזה אחר זה). אמרתי לו לחשוב למה תמיד קיים מכנה משותף.

18 בנובמבר 1984. עוד תרגיל ממבחן קבלה.

(1) עדיין לא יודע למה תמיד יש מכנה משותף. אומר לגבי זה כל מיני שטויות.
 (2) פירקנו לגורמים ראשוניים את המספרים 48, 216, 1001. הוא לא הבין למה אנחנו עושים את זה. לגבי המספר $1001=7*11*13$ אמרתי:

– נכון מעניין?

– מה מעניין? – הוא שאל בתמהון.

(3) פתרנו כמה תרגילים מהספר של טרודנייב. הוא פתר אותם די בקלות, אבל עם טעויות פה ושם.
 (4) נתתי לו את התרגיל הבא: "תלמיד אחד הכפיל שני מספרים, אבל התבלבל וקיבל תוצאה קטנה בחמש מהתוצאה האמיתית. כדי לבדוק את עצמו, הוא חילק את התוצאה שהוא קיבל באחד המוכפלים – וקיבל 29 ושארית 7. איזה מספרים הוא הכפיל?"

זו גרסה קצת קשה יותר של שאלה ממבחן קבלה לבית הספר להנדסת בניין של מוסקבה. בגרסה המקורית היה עוד נתון שאפשר להסתדר גם בלעדיו. לדימה לא היה מושג איך לפתור את זה; הוא ניסה לעבור על כל מיני אפשרויות, אבל בלי הגיון. התעצבנתי ביני לביני: איפה השכל שלו?!

מהאולימפיאדה.

לא מזמן נתתי לדימה חידה מהאולימפיאדה בנובוסיבירסק (לכיתות ז'-ט'): "סכום הגילאים שלנו הוא 35. אני גדול פי שניים מכמה שהיית כשאני הייתי בן כמה שאתה עכשיו. בני כמה אנחנו?"

למחרת הוא פתר אותה. הוא נוטה לפתור חידות בשיטת החיפוש הממצה: עובר על כל האפשרויות עד שמוצא פתרון. זו גם הסיבה שהוא לא הצליח לפתור את השאלה מהנדסת הבניין: חיפוש כזה לא עוזר שם; צריך להפעיל שיקולים (לא מסובכים).

19 בנובמבר 1984.

בארוחת הצהריים דימה פתר בחמש דקות את החידה על שלושת הדייגים, שכל אחד מהם זרק דג אחד ולקח שלישי מהנותרים. קיבל 25. אחר כך סיפרתי לו על הפתרון של דיראק, 2.

25 בנובמבר 1984. התחלקות ב-3 וסכום טור.

(1) האם המספר $101001000100001000001...10000...0$, שמסתיים ב-300 אפסים, מתחלק ב-3? (התשובה: מתחלק, כי סכום הספרות שלו הוא 300, שמתחלק ב-3).

בהתחלה דימה לא הצליח לפתור. דיברנו על התרגיל, חישבנו כמה ספרות יש במספר הזה (45450), והאם אפשר לרשום אותו במחברת. אחר כך דיברנו על פי כמה 10^{300} גדול מ- 10^{27} . ואז דימה סירב להמשיך להתעסק בתרגיל הזה, בטענה שיפתור אותו אחר כך, ועכשיו הוא רוצה כבר לפתור משהו. פתרנו כמה חידות מהספר "בממלכת התבונה", של איגנטיב. אחר כך אלה חזרה, וסיפרתי לה על התרגיל שממנו התחלנו. פתאום דימה הבין שצריך לסכום את הספרות ופתר את התרגיל, ואז פתר עוד אחד, לגבי ההתחלקות של אותו מספר ב-9.

(2) השאלה הבאה: האם המספר הזה ריבועי? (לא, כי הוא מתחלק ב-3 ולא מתחלק ב-9).

דימה ניסח השערה: "כמעט כל המספרים העגולים הם ריבועיים". התחלנו לבדוק במחשבון, וההשערה קרסה. אחרי כל הדיונים נשאר שתי שאלות לשיעורי בית: ראשית, לגבי המספר העצום הזה, ושנית, מתי 10^n הוא ריבועי.

(3) עוד תרגיל מהספר של איגנטיב – החידה המפורסמת עם הזבוב (עם נתונים מספריים קצת יותר פשוטים): המרחק בין הערים א' וב' הוא 300 ק"מ. שני רוכבי אופניים יוצאים מהן אחד לכיוון השני באותו זמן, במהירות 50 קמ"ש. באותו זמן, זבוב יוצא מעיר א' במהירות 100 קמ"ש ועף בין הרוכבי האופניים: כשהוא מגיע לרוכב שיצא מעיר ב' הוא מסתובב ועף עד שהוא מגיע לרוכב שיצא מעיר א', ואז שוב מסתובב עד שמגיע לרוכב השני, וכך הלאה עד שהם נפגשים. כמה קילומטרים עובר הזבוב? עד כמה שזה ישמע מוזר, דימה פתר את התרגיל הזה בעזרת סכימה של טור אינסופי. בהתחלה הוא התחיל לחשב כמה קילומטרים הזבוב יעבור עד שיפגוש את הרוכב השני בפעם הראשונה; קיבל 200. אחר כך חישב כמה הוא יעבור עד המפגש עם הרוכב הראשון; קיבל $66\frac{2}{3}$; ואז שוב עד המפגש השני עם הרוכב השני: $22\frac{2}{9}$. אז הוא הבין שהטור יוצא אינסופי ואמר:

– ארי, אבא! זה יוצא עד אינסוף!

– נכון.

– אז אין פתרון?

– למה? ראשית, אפשר לחשוב על פתרון אחר, מתוחכם יותר. שנית, לפעמים אפשר לסכום גם אינסוף מספרים.

– איך?

(4) עזבנו בינתיים את החידה המקורית וכתבתי לדימה את הסכום הבא: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

הסברתי שמספר הנסכמים הוא אינסופי ושאלתי:

– מה לדעתך הסכום?

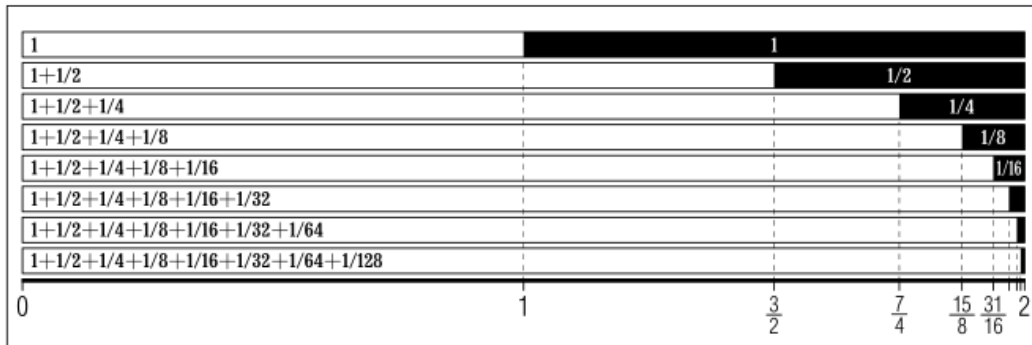
ואז קרה דבר מדהים. דימה לא התלבט לרגע, משך בכתפיו וענה:

– שתיים...

אחרי שתיקה קצרה, שאלתי למה. הוא הסביר:

– הנה תראה. בהתחלה חסר חצי משתיים. אחר כך רבע. אחר כך שמינית. וככה זה ממשיך.

מהותית, הוא תיאר הוכחה נכונה (איור 131).



איור 131. סכום הטור האינסופי $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$. "רואים" שהסכום הוא 2; בכל צעד, המרחק עד המספר 2 קטן פי שניים.

הסכמתי איתו, חזרתי על הטיעונים שלו ביתר פירוט, ואז ציירתי מקטעים צמודים זה לזה באורכים $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$, והדגמתי את אותם טיעונים על הציור. ניסיתי להעמיד פנים כאילו לא קרה שום דבר מיוחד, למרות שמאד התרגשתי, ואפילו הברכיים שלי קצת רעדו. מה, הוא באמת גאון?

השאלה הבאה:

– הזכוב שלנו – פי כמה פחות הוא עף בכל פעם?

דימה חשב וענה:

– פי שלושה.

(כנראה שקצת הקדמתי פה את המאוחר: דימה לא הבין בעצמו שהמרחק קטן פי קבוע בכל פעם. אבל אחרי השאלה שלי הוא שם לב שאכן יש חוקיות כזו – בלי הוכחה, כמובן). כתבתי את הטור הבא:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

– כמה זה יוצא?

– שלוש, – ענה דימה בבטחון (כנראה שהוא נשען על אנלוגיה למקרה הקודם).

נרגעתי קצת. לא, נראה שהוא לא גאון; פשוט ילד נורמלי ומאד מוכשר. צחקתי ושאלתי איך זה יתכן: כל נסכם קטן יותר והסכום גדול יותר? הוא לא הבין בהתחלה על מה אני מדבר; הסברתי; הוא ענה: – אז מה? – אבל אחרי זה עצר לחשוב.

הוא ניסה לחשב בעזרת אותו מהלך, כלומר בדק כמה פחות מ-2 יוצא בכל פעם, ואני רשמתי: $\dots, \frac{14}{27}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}$. די מהר הוא הבין שבגבול יוצא חצי, ולכן הסכום הוא $1\frac{1}{2}$. לא התעקשתי על הוכחה, אבל כן ציירנו את המקטעים.

היינו צריכים לבדוק שהמרחק עד $1\frac{1}{2}$ קטן בכל פעם פי שלושה. באותו זמן לא הבנתי עד הסוף את הפתרון " $1\frac{1}{2}$ ", וראיתי בו ניחוש. – דימה.

(5) חזרנו לחידה עם הזכוב.

– אז מה צריך להכפיל ב- $1\frac{1}{2}$? – שאלתי.

דימה הביט בי בתמהון. היה ברור שהוא שכח מאיפה הגענו לכל זה. ואז הוא אמר:

– אההה... – וחשב, וחשב, וחשב. אחרי הרבה זמן הוא אמר:

– מאתיים קילומטרים. אז יוצא שלוש מאות קילומטרים.

– אז מה התשובה?

– שלוש מאות קילומטרים.

אחרי זה סיפרתי לו את הפתרון הפשוט: הרוכבים רכבו שלוש שעות עד שנפגשו, כלומר הזכוב עף הלך ושוב במשך שלוש שעות, ובמהירות 100 קמ"ש, כלומר הזכוב עבר 300 ק"מ. דימה לא התלהב.

חשבתי וחשבתי, המצאתי איזה משהו די מסובך, ובסוף התברר שהכל לשוא ויש פתרון פשוט. – דימה.

לא הייתי בטוח שהוא הבין את הפתרון, ונתתי לו לפתור את אותה חידה עם מספרים אחרים – מהירות הרוכבים היא 20 ו-40 קמ"ש, ומהירות הזכוכית היא 80 קמ"ש. התברר שהוא הבין הכל, כי הוא עשה את החישובים הנכונים. אבל השעה הייתה כבר תשע וחצי בערב, והוא לא הצליח לחלק 180 ב-20 (יצא לו 8), ואחר כך לא הצליח להכפיל 80 ב-5 (יצא לו 450). כך שסיימנו את השיעור, למרות שחצי שעה אחר כך הוא עוד שאל אותי למה בבית הספר לא מלמדים מתמטיקה כמוני. נוגע ללב ומצער בו זמנית. אלהים, לו רק היה אפשר לוותר על בית הספר ולהסתפק בשיעור השבועי שלנו.

26 בנובמבר 1984.

התברר שדימה לא הבין מה זה סכום טור אינסופי, וחשב ששתי התשובות שלו היו קירוב.

19 בדצמבר 1984.

היום, אחרי הרבה ניסוי וטעיה, דימה למד להכפיל שברים.

26 בדצמבר 1984. מגדלי האנוי.

(1) מתישהו במהלך השבוע שעבר דימה למד לחלק שברים.
(2) ג'ני קיבלה במתנה ליום ההולדת גרסה של מגדלי האנוי. זה נקרא "משחק הסידור", ובמקום דיסקיות צריך לסדר לוחיות עם מספרים (מ-1 עד 8, לא עד 5), ואסור להניח מספר מעל מספר קטן יותר. בעיני 8 לוחיות זה מוגזם – צריך 255 מהלכים בשביל לפתור את זה. דימה ופיטר הבינו מיד שמדובר בוריאציה על מגדלי האנוי.

דימה גילה עניין מחדש במשחק הזה. הוא בילה איתו כמה ימים, ואז הודיע לי שהוא יודע מה האלגוריתם האופטימלי. הוא מאד התקשה לנסח. לא ידע מאיפה להתחיל, באיזה מילים לתאר את הרעיון, ורק חזר מונוטוני:

— קודם את זה שמים פה, ואז את זה פה, ואת זה פה, ואז את זה פה, ואת זה פה...

הפעולות היו נכונות. נדרשו הרבה סבלנות ומאמצים בשביל לגרום לו לנסח את האלגוריתם, שאכן היה אופטימלי. האלגוריתם היה כזה:

- א. צריך להזיז לסירוגין את הלוחית הכי קטנה ולוחית אחרת;
- ב. הצעד של הלוחית האחרת מוגדר בכל פעם באופן יחיד, כי אסור להניח לוחית על לוחית קטנה יותר;
- ג. הלוחית הקטנה צריכה להתקדם בסבב.

דיברנו על חובת ההוכחה, אבל כרגע אין מה לחשוב על זה אפילו. אני רוצה לציין שבזמנו לא המצאתי לא אלגוריתם (קראתי אותו איפשהו), ולא הוכחה (לבקשתי, דימה בוגיינקו המציא אחת). בסך הכל קיימנו ששה שיעורים בסמסטר הזה, לא כולל דיבורים "בין לבין".

על ילדי כיתה א'

אספתי פה כמה הערות שרשמתי לגבי שתי הכיתות הראשונות: במשך חצי שנה העברתי חוג בכיתה של דימה, ובמשך חודש עבדתי כמורה בכיתה "נסיונית". אם הייתי צריך לנהל יומן על הנושא הזה, לפחות 95% ממנו היו מוקדשים לשאלת המשמעות. אי אפשר להתקדם אפילו צעד אחד בלי להשליט סדר בכיתה, בלי לגרום לילדים להפסיק לעשות שטויות, לריב, לשיר, לרוץ (אתם יכולים להמשיך את הרשימה בעצמכם), בקיצור, בלי ליצור בכיתה אווירה של למידה. אין לי מושג איך אפשר ליצור אווירה כזו בלי לוותר על אפשרות החקירה העצמאית ועל היצירתיות; זה משהו שרק וירטואוזים אמיתיים מסוגלים לו. לא רק שאני לא אחד מהם, אני לא מגיע אפילו לקצות קרסוליהם. לכן אכתוב רק על דברים שאני מבין בהם.

מה מקור הכשרון?

זו שאלה מעניינת. האם פיתחתי את הכשרון של דימה למתמטיקה בעזרת החוג, או שמא להפך, הוא נולד מוכשר ובזכות זה החוג היה כל כך מעניין? אני אישית נוטה לאפשרות השניה. תפקיד החוג היה לאפשר לו לגלות שהמתמטיקה קיימת – שהיא תחום חי, מרתק, משמח. שאלה אחרת היא כמה ילדים

מוכשרים יש, וכמה מהם חיים שלמים בלי לדעת מה הייעוד האמיתי שלהם, מה החיים היו יכולים להציע להם. על זה אני רוצה להגיד שבכיתה הראשונה שלימדתי פגשתי ילד שהיה משמעותית מוכשר יותר מדימה (וזה בלי שלמדו איתו). קראו לו גלב. הציונים שלו היו בינוניים; אין לי מושג במה הוא עוסק היום. אבל הנה כמה התבוננויות.

1. התרגילים לגבי $\binom{5}{2}$: חלק מהילדים לא הבינו את תנאי השאלה; אחרים מצאו 3-4 פתרונות; עוד כמה "מצאו" 24-26 פתרונות, ולא שמו לב שיש חזרות; רק גלב מצא עשרה פתרונות בדיוק והודיע בבטחון שאין יותר. (אם כי ההסבר שלו היה ש- $5+5=10$).
 2. הוא ניחש במקום את הטריק של הקסם שמסתיים בו מספרים (ר' עמ' 120). גם הפתרון שלו, כמו של דימה, התבסס על המחזוריות של הטבלה, ולא על השלמה ל-20.
 3. הוא ניחש במקום גם את הטריק בקסם שמבוסס על זה שסכום פאות נגדיות בקוביה הוא 7 (ר' עמ' 121). המבט שלו חקוק בזכרוני: הוא מתבונן בקוביות, מסובב, בודק מה למעלה ומה למטה, פתאום הפנים שלו מוארות.
- נראה לי אופייני גם שפעם הכרזתי שהוא "אלוף", כי הוא חישב משהו הכי מהר, ובתגובה הוא הודה שהייתה לו טעות בחישוב.

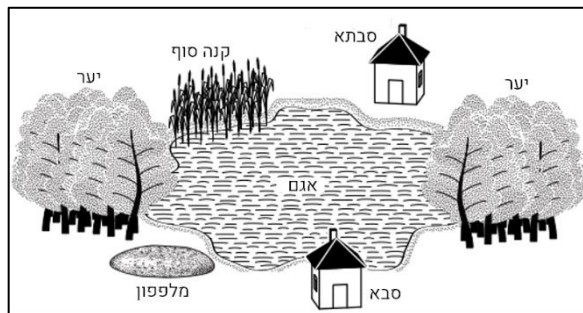
מהי חידה?

אחרי אחד השיעורים גלב חד לי את החידה הבאה (איור 132):
 – פה יש נהר (מצייר). בצד הזה גרה סבתא, ובצד הזה סבא. כאן יש קנה סוף. כאן יש מלפפון. ובאגם גרה מפלצת שלא נותנת לאף אחד לעבור. ואי אפשר לעבור מסביב לאגם כי יש שם יער. איך הסבא יכול להגיע לסבתא?

- יש לו סירה?
- לא.
- הוא יכול להקיף את היער?
- לאאא, אסור!
- ...?
- נכנע?
- כן.

– אז ככה. המפלצת הזו היא מאד ממושמעת. אז הסבא אומר לה: "מפלצת, תאכלי מלפפון!", והיא אוכלת. ואז הסבא אומר: "מפלצת, תכסחי את קני הסוף!". ואז היא מכסחת. ואז הסבא אומר: "מפלצת, הילדים שלך קוראים לך, הם בוכים". המפלצת צוללת לאגם עד שהיא מתנגשת בקרקעית, ואז נוצר שם חור, וכל המים נשפכים לתוכו. ואז הסבא חוצה את האגם ברגל ומגיע לסבתא.

האם הילדים רואים בחידות ההגיון שלנו את אותה רמת הגיון כמו בחידה הזו? האם מבחינתם חידה זה "כשמספרים משהו, ואז שואלים שאלה שלא ברור איך עונים עליה", ולא חייב להיות קשר בין תנאי השאלה לבין הפתרון?



איור 132. איך הסבא יכול להגיע לסבתא?

תלמיד מצטיין.

באחד השיעורים פתרנו תרגיל על $\binom{5}{2}$, ובשיעור שאחריו – על $\binom{5}{3}$. הסברתי לילדים למה הבעיות שקולות: לבחור שתי משבצות לצביעה מתוך חמש זה כמו לבחור שלוש משבצות ולהשאיר אותן לא צבועות. כך שהיינו יכולים לנחש שהתרגיל של היום דומה לזה שהיה בשיעור הקודם, ולדעת מראש שיש לו עשרה פתרונות. ילד אחד מצביע.

– מה, אולג?

– ידעתי שהתרגיל הזה דומה לזה שהיה בשיעור הקודם...

הוא לא נכח בשיעור הקודם.

תרגיל בחיסור.

הסיפור מתרחש בכיתה א' נסיונית; לומדים בה בסך הכל 18 ילדים. שפכתי שעועית לתוך בקבוק ריק וביקשתי מהילדים לנחש כמה זרעים יש שם. כולם צועקים "מאה!". אני אומר שככה זה משעמם, כי אף אחד לא ניצח, ומציע שכל אחד ינחש מספר אחר, נרשום את המספרים על הלוח, ונבדוק. רושמים. אחר כך סופרים בקול את הזרעים, ומתברר שיש 49.

– מי ניצח? – אני שואל.

– אף אחד.

הילדים מתכוונים שאף אחד לא ניחש את הכמות המדויקת.

– טוב, אבל מי היה הכי קרוב?

– טניה הייתה הכי קרובה.

(היא ניחשה 52).

– ובכמה היא טעתה?

– בשלושה זרעים, – עונה כל הכיתה.

הכל טוב ויפה. אנחנו עוברים לנושאים אחרים. בערך אחרי שלושת רבעי שעה אני נותן לילדים תרגיל בחיסור: לחשב כמה זה 52-49. התוצאה מדהימה: אף ילד לא פותר נכון את התרגיל. אף לא אחד! אני משאיר לקוראים לפרש את הסיפור כרצונם.

למשש בידיים.

אותה כיתה, אלא שהפעם אנחנו בחדר המחשבים. כבר הזכרתי את השפה Logo, שפותחה במיוחד עבור ילדים. בעזרת פקודות פשוטות הילדים יכולים לשלוט ברובוט-צב קטן שנע על פני המסך, אבל הם יכולים גם לכתוב חיבורים או לעשות כל מיני דברים אחרים. חלק מהילדים עובדים בהנאה; אחרים משועממים ואפילו מתחילים להסתובב בכיתה (משמעת, משמעת!). לפתע אחד מה"מסתובבים" מוצא בארון מכונה ישנה שמחברת מספרים מכנית.

– מה זה?

אני מסביר שזו מכונה שיודעת לחבר מספרים.

– מה, היא מחשבת בעצמה?!

העובדה שמחשב יודע לחבר מספרים לא מפתיעה אותו משום מה, אבל אם זו מכונה, זה משהו אחר.

– תראה לי...

כל ילדי הכיתה כבר מזמן עזבו את העמדות שלהם ומצטופפים סביבנו. אני ממקם בחלון של המכונה את המספר 6 ואומר שתכף אוסיף לו 1. מסובב את הידית – קליק-קליק – ובחלון מופיע המספר 7. – וואו! – מתלהבת הכיתה.

עכשיו כולם רוצים לסובב את הידית, לשמוע את "הקול המגניב הזה" ולראות איך המכונה מוסיפה 1. המחשבים המשועממים ננטשו: הרי פה אפשר ממש לסובב בעצמך ידית! אני נזכר בציטוט שרשמתי מעט קודם לכן במחברת שלי. המורה ט. סלז'בסקי במאמר "כלי תבניות" בכתב העת "נעורים" (גליון מס' 1 לשנת 1986) מספרת:

“עוד סיור, הפעם בגן חיות, עם כיתה ד’. אנחנו מסתובבים ברחבי הפארק ומסתכלים על טורפים, קופים, תנינים, פיל... הילדים נצמדו לכל כלוב, קראו את השלטים – הלמידה הייתה בשיאה. פתאום ילד אחד נעלם. עוד לפני שהספקתי להלחץ הוא מגיח בריצה מאיזו פניה, כולו אדום ומתנשף:
– מהר, מהר! תקראו לכולם! יש שם משהו... וואו!
אני תוהה לעצמי, מה יכול לרגש אותנו כל כך אחרי כל הנחשים וההיפופוטמים? והוא צועק:
– יש שם סוס שאפשר לגעת בו!
תוך שניה הפיל ננטש, הילדים טסים אל מעבר לפינה. ואכן, עומדת שם סוסה זקנה עם בטן נפולה, רתומה לעגלה שמשנעים בעזרתה את האוכל לחיות. ואכן אפשר ללטף אותה, ולהושיט לה עשב שהיא לוקחת בנימוס בשפתיה הרכות...”
איזה סיפור מקסים. הייתי יכול לחתום בו את כל הספר הזה.

9 החוג של הבנות – השנה הראשונה

חבוא

בחוג החדש שלנו יש שלוש משתתפות: הבת שלי, ג'ני, ושתי חברותיה, סוניה ודינה. המפגש הראשון של החוג התקיים בינואר 1984. ג'ני הייתה אז בת ארבע, סוניה בת ארבע ושמונה חודשים, ודינה בת חמש ושלושה חודשים.

תשובות לשאלות נפוצות.

הרבה פעמים שואלים אותי האם יש משמעות לכך שבחוג הראשון לימדתי רק בנים ובחוג השני רק בנות. לא, אין לכך משמעות, פשוט כך יצא: בהתחלה לימדתי את דימה ואת החברים שלו, ואחר כך את ג'ני ואת החברות שלה. לדימה ולפיטר, שהיו חברים-שכנים בני כמעט אותו גיל, היו אחיות קטנות, ג'ני וסוניה, שגם הן היו כמעט באותו גיל. כך זה התחלק ל"בנים גדולים" ו"בנות קטנות". על בסיס החברות בין הילדים, נוצרה בהדרגה חברות גם בין ההורים.

שאלה נפוצה שניה: האם החוג של הבנים היה שונה מהחוג של הבנות? כן, מאד. אבל גם לו היה חוג עם בנים אחרים, הוא היה שונה. לכל ילד אופי משלו, תחומי עניין משלו, ומשם נובעים ההבדלים. אני לא הן ברמת הקורלציה בין זה לבין מין הילד: בשביל זה דרושים מחקרים רציניים יותר. הקוראים וודאי ישימו לב שהחוג של הבנים התקיים לאורך ארבע שנים וכשמונים מפגשים, בעוד שבחוג של הבנות היו רק עשרים מפגשים. (ליתר דיוק: עשרים מפגשים מתועדים. ג'ני הייתה אחר כך תלמידה שלי גם במועדון המחשבים לילדים ובקייטנה בפרסלבל). למה זה קרה? האם זה בגלל שלקחנו פחות ברצינות את ההשכלה המתמטית של בנות?

אני לא יודע אם הקוראים יאמינו למילה שלי, אבל זה לא שיש לי ברירה אחרת חוץ מלכתוב את מה שאני חושב לנכון. התשובה הכנה שלי לשאלה הזו היא: לא, זה לא העניין. היו סיבות אחרות. ראשית, העניין העצום והכשרון המובהק של דימה למתמטיקה דרבנו אותי ללא ספק, בעוד שג'ני לא התעניינה במתמטיקה בכלל. אבל מבין שלל הסיבות, לסיבה הזו הייתי מייחס בערך 20%, לא יותר. העיקר היה שהתחילה הפרסטרואיקה. התייחסתי לזה גם כמבוא. הכל הסתחרר, כולל בחיים הפרטיים שלי. אני זוכר את זה כאילו זה היה אתמול: ארבע לפנות בוקר; חבר שלי, הביולוג בוריס ברנפלד מקפיץ אותי הביתה אחרי עוד דיון על רפורמות בהוראה שנמתח יותר מדי, ואני חושב באימה על זה שבשש וחצי אני צריך לקום לעבודה כרגיל. והכוחות שלי מוגבלים...

ולבסוף, עוד שאלה קנטרנית: למה בכלל העברתי חוג לג'ני אם היא לא התעניינה במתמטיקה?

איך אתם לא מתביישים לשאול שאלות כאלו, קוראים יקרים?

לא, ברצינות. תקשורת עם ההורים היא צורך חיוני של כל ילד. אפילו תקשורת שלילית, כמו כעסים ועונשים, טובה יותר מהיעדר תקשורת, וילדים הרבה פעמים יוזמים תקשורת כזו אם הם לא מצליחים למשוך תשומת לב בדרך אחרת. לרוב, התקשורת בין הורים לילדים היא עניינית עם גוון קל של שליליות: "לך תשטוף ידיים. הגיע הזמן לישון, תעזוב כבר את הטלוויזיה. ארגנת תיק למחר? שוב יש לו חום!". חלפו הימים שבהם המבוגרים – האיכרים ובעלי המלאכה – משכו את הילדים לעבודותיהם. הילד של היום יודע על העבודה של ההורים שלו דבר אחד: זה המקום שאליו הם יוצאים בבוקר ושומנו הם חוזרים בערב. וגם שמתעייפים שם: "אבא עייף אחרי העבודה, תעזבו אותו בשקט". הרגעים של השיחות הכלליות עם הילדים, העשייה המשותפת, נדירים כל כך, והם יקרים לאין ערוך. זה מה שהיה לי עם ג'ני. היא אהבה את החוג – לא בגלל שהוא עסק במתמטיקה, אלא כי אבא שלה הקדיש לה את הזמן ואת תשומת הלב שלו, למד איתה, ועוד למד איתה משהו רציני, שהוא למד קודם עם אחיה הבכור.

אגב, לא צריך להפריז גם במידת העניין של דימה במתמטיקה באותה תקופה. הרבה יותר עניינו אותו המפגשים שארגן בוריס, אבא של יבגני. הילדים יצאו איתו ליער, חצו גאיות בעזרת חבלים, "צדו איילים", למדו לקרוא מפה, ארגנו פינות מסתור במערות וכו'. אני חושב שגם בוריס עצמו נסחף באווירה

הכללית של "פיתוח הילדים": אני לימדתי אותם מתמטיקה, אלה – אנגלית, אמא של אנדריי – מוזיקה, בקיצור, כל אחד תרם את חלקו.

אם כך, למה לא לבחור נושא שיותר מתאים לתחומי העניין של ג'ני? פשוט כי לא היו לי נושאים אחרים. עשיתי מה שידעתי ואהבתי לעשות. ג'ני הכי אהבה לצייר (ארכיב על כך בהמשך), והיא השתתפה בחוג ציור של המורה והציירת הנהדרת נדיה סטולפובסקי. כך שיכולתי לטעון שמילאתי את חובתי ההורית, שלילדה יש מקום להתפתח בו, כך שאני זכאי "לנוח אחרי העבודה", ולהסתפק בזה. אבל החלטנו בכל זאת לקיים חוג מתמטיקה גם לג'ני. ותאמינו לי שההנאה הייתה הדדית.

כל ילד והאופי שלו.

לדינה יש אופי שקט ויציב, עם נגיעה קלה של נודניקיות, אבל במפגשים שלנו זה רק יתרון. לעומת זאת, עם סוניה וג'ני יש מה לצפות לבעיות. לשתיהן יש טמפרמנט, איך נאמר בעדינות, סוער. היחסים ביניהן מאד תנודתיים. רגע אחד הן החברות הכי טובות; רגע אחריו הן רבות ומנתקות קשר לתמיד, לכל החיים! אחר כך הן יכולות שוב להתנפל אחת על השניה בחיבוקים, להשבע זו לזו שהן חברות לנצח, ואז להתנהג כמו מלאכיות במשך בערך חצי שעה.

בקיצור, למרות שצברתי כבר נסיון בעבודה עם הבנים, עלולים לצפות לי פה קשיים מסוג אחר, או מאותו סוג, אבל בעוצמות גבוהות יותר. אבל נקפוץ למים ונראה מה הלאה.

הייתה עוד ילדה שביקשו ממני לצרף לחוג שלנו, קטיה, אבל התחמקתי. קטיה גדולה מג'ני כמעט בשנתיים, והיא מוכשרת במתמטיקה, כך שג'ני הייתה עלולה להדחק הצידה אם היא הייתה מצטרפת.

ג'ני מציירת (סוגריים ארוכים).

אספר על ג'ני מעט יותר בפירוט. מדהים כמה שונים יכולים להיות ילדים מאותה משפחה. לכאורה אותם גנים ואותו חינוך: אותם תנאי פתיחה. כמובן, אפשר לטעון שהילד הבכור גדל כילד יחיד בשנותיו הראשונות, בעוד שאחיו הקטן גדל עם אח בכור. יכול להיות שזה מסביר קווי אישיות מסוימים. אבל אני לא רואה איך נובעים מזה תחומי עניין וכשרונות כאלה או אחרים, ובזה, בעיקר, הספר עוסק. אם נקפוץ לרגע הרבה שנים קדימה, להיום, אני יכול להגיד דבר כזה: גם דימה וגם ג'ני גדלו להיות אנשים טובים, אבל זה פחות או יותר הדבר היחיד שיש להם במשותף.

יש לנו תמונה: ג'ני בת שנה ושלושה חודשים, והיא מחזיקה טוש – ומחזיקה אותו נכון, בדיוק כמו שמלמדים בבית הספר. לא בטוח שהייתי מאמין אלמלא היה לנו תיעוד.

אני לא זוכר מתי היא התחילה לצייר. לא ממש שמתי לב: כל הילדים מקשקשים משהו, זה נורמלי. אבל פעם, כשהיא הייתה בת שלוש, התעמקתי באחד הקשקושים, ופתאום זה הכה בי: דמיינו דף צהבהב באורך כ-15 ס"מ. בחלקו התחתון מצוירת נעל, וממנה יוצאת רגל שנמתחת לכל אורך הדף, עד אינסוף. זו רגל של מבוגר. מלמעלה מושטת יד. ביד הזו אוחז ילד, שממלא את כל שאר הציור. ננסח אחרת: זה ציור של ילד, ולידו רגל של מבוגר. הציירת אולי עוד לא מיומנת, אבל הקומפוזיציה מרשימה.

מאז אני ואלה התחלנו יותר לשים לב למה שקורה. לא יכולתי לקחת חלק בפעילות הזו – אני לא יודע לצייר. אלה, לעומת זאת, מציירת יפה מאד. אבל התברר שאין צורך בהשתתפותנו. או, ליתר דיוק, יש צורך בהשתתפותנו החומרית בלבד. דמיינו ילדה את חמש שמציירת שש שעות ברצף, למעט הפסקות שירותים קצרות. באופן טבעי, נוצר בבית מחסור בדפים. מחברות בית ספר רגילות אמנם לא היו מצרך נדיר באותה תקופה, אבל גם לא היו משהו שאפשר פשוט ללכת ולקנות. היה צריך להשיג אותן. התחלתי להביא דפי טיוטה מהעבודה. המבוגרים שבקוראים אולי זוכרים כמה מדובר: גלילי נייר רחבים מחוררים בקצוות, באיכות ירודה למדי. הטושים היו עוברים את הדף וצובעים את מה שמתחתיו, אבל לא הייתה ברירה, מה עוד שאפילו הגלילים האלה לא הספיקו. לפעמים גם עיתונים גויסו לפעולה: הקצוות שלהם היו מתמלאים ברגע בסיטואציות מחייהן של דמויות בדיוניות. זכור לי במיוחד צילום שהופיע בעיתון: בית עץ מתוך איזו תערוכה. לקחנו לג'ני את כל הדפים, כי היא לא הייתה מוכנה ללכת לישון, אבל על השולחן היה זרוק העיתון, ולפני שהספקנו לשים לב הבית כאילו קם לתחיה: ילדים שיחקו בחצר, דמויות הציצו מהחלון, מישהו דפק בפטיש על הגג....

באשר לטיבם של הציורים, מיום ליום הם הביעו יותר ויותר: רוכבי סוסים עם צעיפים מתנופפים, פסנתרנים, פרות רועות – נראה ששום דבר לא היווה בעיה בשבילה. הדמיון החיצוני לדמויות האמיתיות בלט יותר ויותר, כשאנחנו או מי ממכרינו היינו גיבורי הסיפור. עד היום תלוי ציור בבית שלנו: דימה מסביר משהו בהתרגשות, מנופף בידיו, וג'ני מסתכלת עליו בספקנות, אבל בחיבה. כן-כן: היא הצליחה לשקף בציורים לא רק את המראה החיצוני, אלא גם את האופי של הדמויות.

אבל העיקר היה הצורך התמידי לצייר בלי הפסקה, ואז לצייר עוד. אנחנו התבוננו מהצד בפלא הזה ו"הלכנו על קצות האצבעות". לא ידענו איך זה יתפתח, האם המשיכה הזו לציור תישאר גם בעתיד, או תיעלם יום אחד כלעומת שבאה? ואם תיעלם, מה אנחנו אמורים לעשות? לנדנד לה שתצייר לפחות חצי שעה ביום? ("טוב, בסדר, אם את כל כך מתעצלת אז רק עשרים דקות". ואחרי עשר דקות: "אבא, כמה דקות כבר עברו?"). אלו בערך הסיטואציות שדמיינתי. ידעתי שזה לא מה שאני רוצה, אבל לא ידעתי מה כן. מדהים עד כמה אנחנו חסרי אונים מול תופעות טבע – ומולנו הייתה, ללא ספק, תופעת טבע.

איך סיפור כזה יכול להסתיים? נראה שיש שתי אפשרויות: "אבל זה בכלל לא מה שקרה", ו"זה בדיוק מה שקרה". המציאות הייתה מה שהיא בדרך כלל – משהו שלישי. ג'ני באמת התחילה לצייר הרבה פחות ברגע שהיא למדה לכתוב. התברר שהתשוקה שלה לציור הייתה בסך הכל תופעת לוואי של תשוקה אחרת שלה: המצאת סיפורים. למעשה, הציור היה דרך להעביר סיפורים לדף. כשהופיעה דרך אחרת, מתאימה לה יותר, היא עברה אליה.

אם היינו הורים יותר ערניים היינו מנחשים עוד קודם. הרי היא המציאה סיפורים מאז ומעולם, לא רק כשהיא ציירה. למשל בקיץ, בטילים הארוכים שלנו; הסיפורים נמשכו שעות. אלה הייתה קהל היעד העיקרי. היא הייתה אומרת לפעמים שהיא מרגישה שהיא עומדת להתעלף. וג'ני תמיד הייתה מזהה כשהיו מפסיקים להקשיב לה. הרבה פעמים קיבלנו תפקידים שונים של דמויות בסיפור, והיינו צריכים להגיד את הטקסט שלהן, אותו ג'ני הייתה מכתובה לנו. לפעמים היה נדמה לי שהשתתפות מכנית כזו בהצגה היא משעממת, והייתי מרשה לעצמי להכניס לעלילה טקסט משלי, ולא את זה שהתבקשתי להגיד. הייתי נענש מיד, ובעונש חמור יחסית לחומרת העבירה, בעיני.

עוד משהו מדהים שאני רוצה להגיד לגבי הציור. פעם, כשג'ני כבר הייתה גדולה, היא דפדפה בציורים ישנים שהיא ציירה (שמרנו חלק קטן מהם, בערך חצי מזוודה, כשעברנו לצרפת). התברר שהיא זוכרת מצוין את הסיפורים שהיא המציאה בגיל ארבע, ויכולה לשחזר אותם על סמך הציורים.

אחרי שג'ני למדה לכתוב, היא התחילה ללמד את עצמה כל מיני ז'אנרים וסגנונות כתיבה. היא גילתה שקיים ז'אנר של זכרונות, והתחילה לכתוב זכרונות. היינו מקריאים בבית דרמה של שילר – והיא מיד הייתה ממציאה דרמה בסגנון שילר. היו גם אגדות, כמוכן. אחר כך הופיע גם מחזה על שיחה טלפונית (עם שלושה משתתפים: ג'ני, חברה שלה, ומדי פעם אחיה הבכור שנדחף לשיחה). אלה הייתה מלמדת אותה אנגלית, כמו את דימה – וכמוכן שהיא התחילה לכתוב גם סיפורים באנגלית, למרות אוצר המילים הדל שלה. המקרה הכי משעשע קרה כשהיא הייתה בת שבע. היא מצאה בבית ספר ללימוד יפנית. אחרי שסיפרנו לה שחוף מהאותיות ליפנים יש גם שני כתבים פונטיים, היא המציאה מיד סיפור (במובן מסוים אפשר לומר שהסיפור היה ברוסית: רובו היה מורכב ממילים כמו "אמא" ומצלילים כמו "מו") וכתבה אותו ביפנית. הראינו אחר כך את הסיפור הזה לאנה שובין, שכנה שלנו שלמדה יפנית, והיא התגלגלה מצחוק. אבל ג'ני נטשה את היפנית די מהר, כשמיצתה את מה שהיא יכולה להביע בה.

בערך בגיל 11 ג'ני וחברתה מאשה המציאו ביחד סיפור שמילא מחברת עבה. לסיפור קראו "קיץ מהילדות" – שם די סמלי, כי היא כבר התקרבה אז לשלב המשברי הזה שבו הילדות נגמרת, השלב שבו כותבים מרגישים שכבר לא יוכלו לכתוב בתמימות ילדית כזו, חסרת דאגות. אצל ג'ני השלב הזה הגיע כשעברנו לצרפת.

סיפור הילדות האחרון שאני רוצה לספר בהקשר הזה קרה כבר בצרפת. ג'ני בת 12; היא לומדת בבית ספר צרפתי בשפה שעד לפני חצי שנה היא לא ידעה על קיומה. שיעורי הבית: לכתוב סיפור בסגנון של מרסל אמה, שעליו הם למדו. ג'ני המציאה משהו כל כך מקסים שאחר כך הקריאו את הסיפור שלה בחדר המורים. היא קיבלה 17, למרות כל שגיאות הכתיב.

כדי להבין את משמעות הציון הזה, צריך להכיר את מערכת הציונים הצרפתית. הציונים הם בטווח ה-20. עם זאת, במתמטיקה, למשל, אפשר לקבל 20 – צריך פשוט לפתור נכון את כל התרגילים, אבל במקצועות הומניים לא נוהגים לתת ציונים גבוהים מ-16. הייתה תקופה שאלה לימדה רוסיית באוניברסיטה פה, ונתנה לשתי סטודנטיות 20 במבחן. דיקנית המחלקה שלהם העירה לה: – אלה, איך נתת להן 20? את הרי יודעת שאנחנו לא נותנים יותר מ-16. – אבל קטריין, – ענתה אלה, – הסטודנטיות האלו רוסיות. הן דוברות רוסיית בדיוק כמוני, והמבחן היה בעל-פה. – לא משנה. אנחנו לא נותנים יותר מ-16.

למעשה הם כן נותנים – כדי להדגיש שקרה משהו חריג. אעצור בזה, כדי לא להפוך את הספר לביוגרפיה של ג'ני. למה החלטתי לכתוב על כל זה? בשביל ההוגנות. ההישגים של ג'ני במתמטיקה היו צנועים מאד. לא רציתי שהקוראים יגיעו למסקנה ש"היו במשפחה אחת שני ילדים, אחד מוכשר והשניה ככה-ככה...". זה לא נכון. האמת היא שהיו במשפחה שני ילדים – אחד מוכשר במתמטיקה, והשניה בציור ובספרות. מצד האמת הייתי צריך לכתוב פרק כזה על כל אחד מהילדים שהשתתפו בחוגים שלי, אבל אני לא מכיר אותם מספיק בשביל זה. ועם זאת, דוגמה: נתקלתי פעם בסרטון של סוניה, כבר בחורה בוגרת, שמספרת משהו באנגלית. הייתי המום. גם הילדים שלנו מדברים באנגלית בחופשיות – לא זה מה שהדהים אותי, בטח שלא אחרי 14 שנים שאני חי במערב. אבל כשהילדים שלנו מדברים, שומעים שהם לא בריטים ולא אמריקאים. במקרה של סוניה, היה אפשר בקלות לחשוב שהיא נולדה בארצות הברית. וזה בלי שהיא גדלה שם. איך היא הצליחה? זו עוד שאלה על כשרונות שאין לה תשובה רציונלית. לכן אני פונה שוב לקוראים: בבקשה, אל תשכחו שאני כותב רק על פן אחד של ילדים שיש להם הרבה מאד פנים. ג'ני, אגב, הבטיחה לי לתרגם את הספר הזה לצרפתית. אני בטוח שהתרגום יהיה נהדר.

חוזרים למתמטיקה.

עד החוג, כלומר עד גיל ארבע, למדתי עם ג'ני מתמטיקה רק תקופה קצרה, כשהיא הייתה בת שנתיים. הזכרתי את זה בעמ' 85. הנה מה שכתבתי אז, כ-23 בינואר 1982: היה למפגש הזה המשך לא מתוכנן. עוד לפני שהספקתי לשים במקום את הקופסה עם הצורות, ג'ני חזרה מטיול וביקשה לשחק ב"זה". נתתי לה משימה בהתאם לגילה (היא בת שנתיים וחודש) – פיזרתי את הצורות במכסה של הקופסה והצעתי לה להחזיר אותן למקום. נראה לי שעוד לא הסברתי: בקופסה של האוסף של דיינש יש שני שקעים עבור כל צורה. לכל צורה יש שמונה לוחיות, ארבע עם חור וארבע בלי. הכוונה היא שכל ארבע יונחו בשקע נפרד. ג'ני עבדה בהתלהבות. בהתחלה היא תקעה צורות במקומות אקראיים; למשל, ניסתה להכניס את הריבוע הגדול לשקע של העיגול הקטן. לפעמים היא ניסתה להניח צורה בשקע הנכון, אבל בזווית הלא נכונה, ואז, מתוך חוסר הבחנה בין הכשלון הזה לכשלונות האחרים, עברה לנסות להכניס את הצורה לשקעים הבאים. בכל פעם שהיא הצליחה להכניס צורה לשקע, אמרתי לה "הופ!" לחיזוק. אם, לעומת זאת, היא הייתה מכניסה עיגול קטן לשקע של הריבוע הגדול, למשל (כשהיא בבירור מניחה שזה פתרון נכון – הרי הצורה נכנסה), לא הייתי אומר כלום. בהדרגה היא למדה להבחין בין הכנסה נכונה להכנסה לא נכונה, והתחילה להגיד "הופ!" בעצמה.

היא הסבירה לי שהיא משכיבה את הצורות לישון. כך עבדנו שעה שלמה, שבמהלכה הכנסנו את הצורות לשקעים שלהן שלוש פעמים. ג'ני למדה לזהות לוחיות באותם צורה וגודל, אבל לא להתאים את צורת הלוחית לצורת השקע. תהליך סידור הלוחיות היה כזה: היא הייתה לוקחת, למשל, עיגול גדול והייתה מנסה להכניס אותו לשקעים השונים. כשהיא הייתה מוצאת שקע מתאים, היא הייתה לוקחת את כל שאר העיגולים הגדולים ומכניסה אותם לאותו שקע. בהתחלה זה היה עובד: היה אפשר להכניס לשקע חמש לוחיות (למרות שהוא היה מיועד לארבע). אבל העיגול השישי כבר לא נכנס, וזה כבר היה מכשול מסוג חדש.

זה היה רגע מעניין. השיטה שבה ג'ני השתמשה הראתה שהיא כבר יודעת את חוק שימור הצורה, אבל עוד לא יודעת את חוק שימור הכמות. (החלק הראשון מפתיע יותר מהשני: חוק שימור הכמות נקלט בגיל 5-7, וחוק שימור הצורה – נדמה לי שבגיל מאוחר יותר משנתיים, לפי פיאז'ה). מה שקרה בשלב הזה הוא שג'ני הבינה שגם העיגול הזה אמור להכנס לשקע, אבל השקע כבר מלא, אז צריך להוציא את העיגולים שיש בו, להכניס את זה, ואז את כל השאר (השאר כבר הצליחו להכנס לשקע הזה, אז מן הסתם הם יצליחו גם הפעם). היא לא הצליחה להוציא את העיגולים בעצמה, ולכן ביקשה ממני. ככה זה חזר על עצמו כמה פעמים, אבל אחרי סדרה של כשלונות היא התחילה לחפש שקע חדש עבור העיגול האחרון, וכשמצאה הצליחה בדרך כלל להכניס את כולם (אם כי, לפעמים היא הייתה מנסה להוציא את העיגולים מהשקע הקודם בשביל להעביר אותם לשקע החדש, אבל לי כבר לא הייתה מספיק סבלנות ולא נתתי לה לעשות את זה).

לקראת סוף המשחק שלנו דימה חזר הביתה ותרם גם הוא לתהליך הלמידה. הוא בעיקר הציק לג'ני שלא תשים חמש לוחיות בשקע אחד ושלוש בשני. הוא ניסה גם לגרום לה להפריד בין הלוחיות עם החזר ללוחיות בלי החזר, אבל הצלחתי לשכנע אותו שלא יתערב, כך שזה נגמר בלי מריבות. זה נמשך תקופה מסוימת בכל מיני וריאציות; ג'ני נהנתה מאד מהמשחק הזה, ביקשה ממני לשחק בו מיוזמתה, ויכלה לשבת לשחק בו מעל שעה. אחר כך היא התחילה לשחק בזה גם לבד, ולאבד לוחיות מדי פעם. לרוב היינו מוצאים אותן, אבל אחרי שלוחית אחת נעלמה ולא מצאנו אותה גם אחרי שעה של חיפושים, החבאתי את האוסף ולא נתתי לה יותר לשחק בו. לא יפה מצדי, אבל מה לעשות? אני הרי לא אצליח להשיג עוד אוסף כזה.

[קייץ 2005: ג'ני בת 25. אני בשלבי סיום של כתיבת הספר. כשג'ני ראתה את אוסף הלוחיות של דיינש על השולחן שלי, היא אמרה שעד היום כשהיא נזכרת בהן הלב שלה קופץ משמחה].

בשנתיים הבאות לימודי המתמטיקה שלנו הסתכמו בשני דברים: אחד היה קריאת "הרפתקאות קובריק וטומטיק, או: מתמטיקה בכיף" (ג'ני הייתה משוגעת על הספר הזה. לא על החלק המתמטי שלו, אלא על העלילה – התרגילים בו היו מבחינתה מעין מס שצריך לשלם על ההנאה), והשני – נסיון ללמד אותה לספור עד יותר מ-2 (ב-3 היא הייתה מתבלבלת בדרך כלל): נתנו לה אגוזים מסוכרים בכמות שהיא תצליח לספור נכון. הייתה התקדמות מסוימת, אבל לא משמעותית.

מקרה משעשע שמדגים עד כמה ספירה בגיל הזה נתפסת כהליך פורמלי: פעם ג'ני ספרה נכון "שבע, שמונה..." ואז עצרה פתאום ושאלה:

– אבל שבע ושמונה זה אותו דבר, נכון, אבא?

מאז אני משתמש בשאלה הזו כמעייין נייר לקמוס. כשמראים לי ילד ש"יודע לספור" אני שואל אותו בנימה רצינית:

– שבע ושמונה זה בעצם אותו דבר, נכון?

אם הוא מתנגד סימן שהוא באמת יודע לספור. (פעם אחת פגשתי מקרה ביניים: ילד שענה לי בארשת רצינית מאד שלא, שבע ושמונה זה בכלל לא אותו דבר, אבל שבע-עשרה ושמונה-עשרה זה כן).

מפגש 1. שוב התופעות של פיאז'ה

חמישי, 5 בינואר 1984. 10:35-11:15. ג'ני, סוניה ודינה.

מבוא

ראשית, הראיתי לילדות את הפעמון שלי, והסברתי להן שבבית הספר יש צלצול בתחילת ובסוף שיעור, וגם בחוג שלנו יהיה. אחר כך אמרתי עוד כל מיני משפטים כללים על כמה חשוב שכולנו נהיה חברים, נתנהג יפה ונשמע בקולי, ואז יהיה לנו כיף וכו' וכו'. אם נקפוץ קצת קדימה, אני חייב לציין שהבנות התנהגו לא יפה אלא מושלם. בכל מקרה, בזמן שנאמתי הן ישבו בשקט, הקשיבו לכל מילה, והסתכלו בקנאה על הפעמון שלי.

תרגיל 1. איזה חיילים יש יותר?

- סדרתי בשורה חיילי משחק אדומים.
— אה, אני יודעת, עכשיו נספור אותם! — צעקה דינה.
כולן התחילו לצעוק שגם הן יודעות לספור. ביקשתי מדינה לספור את החיילים: התברר שיש תשעה.
אחר כך סוניה ספרה אותם.
— תראי מה זה, סוניה, את הרי ספרת מהצד השני.
— כי יותר קרוב לי מפה!
— ולמה גם לך יצא 9?
— כי ספרתי!
אחר כך גם ג'ני ספרה:
— אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש, שש, שבע, שבע עשרה, תשע. גם תשע!
סדרתי שורת חיילי משחק צהובים, במקביל לשורת החיילים האדומים.
— מה יש יותר, חיילים אדומים או צהובים?
— שום דבר, יש אותה כמות.
— ואם הם ילחמו, מי ינצח?
— אף אחד לא ינצח.
ריוחתי את החיילים הצהובים כך שהשורה שלהם נהייתה ארוכה יותר (איור 133).
— ועכשיו, מה יש יותר?
— צהובים, צהובים!
— ואם הם ילחמו, מי ינצח?
— הצהובים!
— נכון, כי מי שיש לו צבא יותר גדול הוא זה שמנצח, נכון?
— כן.
— סוניה, קחי מפה כמה חיילים צהובים, כך שתהיה אותה כמות של אדומים וצהובים.
סוניה מורידה מהשולחן שני חיילים צהובים ואנחנו מחזירים אותם לקופסה.
— ועכשיו, מה יש יותר?
— עכשיו שוב אותו דבר!
אני מרווח שוב את החיילים הצהובים. שוב מתברר שיש יותר חיילים צהובים, כך שאם תפרוץ מלחמה הם ינצחו. אנחנו סופרים את החיילים: מתברר שיש תשעה אדומים ושבעה צהובים, אבל יותר צהובים מאדומים. אני מבקש מג'ני לקחת כמה חיילים צהובים כך ששוב תהיה אותה כמות של צהובים ואדומים; היא מורידה מהשולחן חייל אחד.
זה חוזר על עצמו עוד שתי איטרציות; לבסוף, מול תשעת החיילים האדומים עומדים שניים צהובים בלבד. דינה וסוניה עדיין מתעקשות שיש יותר צהובים, וג'ני לא מתאפקת ואומרת:
— לא, יש פחות צהובים.
— למה?
— כי אין פה כלום, — היא מצביעה על המרווח הריק בין שני החיילים הצהובים.
סוניה מחזקת אותה בלהט, ודינה שותקת במבוכה: היא ילדה מאד מנומסת, ולא יודעת איך לנהוג במקרה כזה.
[ניזכר פה בהערה של דימה מהמפגש הראשון: אבא הסכים עם זה, סימן שזה נכון].
— אבל הרגע אמרתן שיש יותר צהובים, ועכשיו אתן טוענות שיש פחות! — אני משתומם.

איור 133. האם יש יותר חיילים אדומים או צהובים?



סוניה עונה לי משהו באותו להט. אני לא זוכר מה בדיוק היא אמרה, אבל הרעיון היה שקודם אמרנו את מה שהיה נכון קודם, ועכשיו אנחנו אומרות את מה שנכון עכשיו. היא עוד לא יודעת שטיעונו מתמטיים שהיו נכונים אתמול נכונים באותה מידה גם היום, ולכן לא רואה את הסתירה שבדבריה. – אז מה עושים? – אני שואל.

ג'ני מוציאה מהקופסה את כל החיילים הצהובים שהורדנו קודם מהשולחן ושמה אותם בין שני הצהובים; שוב יש תשעה חיילים צהובים מול תשעה אדומים.

– מי ינצח עכשיו?

– אף אחד.

– טוב, אז אם אף אחד לא ינצח, חבל להילחם, ולכן הם החליטו לעשות שלום וחזרו הביתה, – אני מסכם ומחזיר את החיילים לקופסה.

תרגיל 2. חיילים על שרפרפים.

אני מניח על השולחן 11 חיילי משחק ו-10 לוחיות, ומסביר לבנות שחיילי המשחק הם חיילים (למה אני מיליטנטי היום? לא ברור; מילא אם הייתי מנסה ללכוד את תשומת הלב של הבנים), והלוחיות הן שרפרפים. אני מבקש מהבנות להושיב את החיילים. הן מניחות כל חייל על שרפרף, ולחייל אחד חסר מקום. אני מציע למקם אותם אחרת, כך שלכולם יהיה מקום. למשל, להושיב את החיילים האדומים על שרפרפים אדומים ואת הירוקים על שרפרפים לבנים, וכד'. הבנות מנסות, אבל למרבה הצער, שוב חייל אחד נשאר בלי שרפרף. אני מציע להן שוב ושוב למקם בכל מיני דרכים, התגובה זהה.

– למה בכל פעם נשאר חייל אחד בלי שרפרף?

– כי אין לו מקום.

– ואיך אפשר להושיב אותם כך שיהיה לו מקום?

– אי אפשר!

– מה, לא משנה איך נושיב אותם, לא נצליח?

– כן.

– בואו ננסה אולי ככה...

אני מציע עוד הצעה (להושיב את החיילים הגדולים על השרפרפים הלבנים והצהובים, ואת הקטנים על שאר השרפרפים), ובלו שהן ישימו לב, מחביא חייל אחד בכיס.

הן מנסות שוב, והרי זה פלא, הפעם יש מקום לכל החיילים! הילדות מאושרות – סוף סוף הן הצליחו במשימה. רק דינה מסתכלת על החיילים והשרפרפים במבט קצת מבולבל. כבר התכוננתי לעבור לתרגיל הבא, כשהיא אמרה פתאום:

– בואו נסדר אותם כמו שהם היו קודם.

– את זוכרת איך הם היו קודם?

היא מנסה להסביר.

– טוב, בואי נסדר.

אנחנו מתחילים למקם אותם מחדש, ואני שולף את החייל בחזרה, בלי שהן ישימו לב. שוב לחייל אחד חסר מקום. דינה לא מצליחה להבין מה קורה; היא מנסה להושיב שני חיילים על אותו שרפרף. פתאום סוניה מכריזה:

– אהה, אני יודעת מה קרה! אלכס פשוט החביא שרפרף אחד!

מעניין: בפעם הראשונה שרימיתי (העלמתי חייל), היא לא שמה לב. אני חושד שזה בגלל שהבעיה "נפתרה". אבל כשהכל כבר היה בסדר ואז שוב לא הסתדר, זה כבר מעורר חשד. יכולתי להגיד, כמובן, שלא החבאתי שום שרפרף (הרי למעשה החזרתי את החייל ה-11), אבל הרגשתי שזה לא יפה מצדי.

תרגיל 3. מה יוצא דופן?

הציורים היו כאלה:

(1) כובע צמר, מעיל, סוודר, פטריה (סוניה);

- (2) כלב, חתול, קוף, מאזניים (סוניה);
- (3) עז, כבשה, פרה, חוט תפירה (ג'ני);
- (4) מזלף, חבית, דלי, גדר (דינה);
- (5) אינדיאני, כבאי, בנאי, ג'רפה (סוניה);
- (6) עגור, ינשוף, חסידה, סנאי (ג'ני);
- (7) ג'וק, פרפר, דבורה, אגרטל (דינה);
- (8) ארנב, כלב, קיפוד, כרית (סוניה).

את שתי הרביעיות הראשונות הראיתי לכל הבנות ביחד, וסוניה ענתה ראשונה, עוד לפני שג'ני הספיקה להבין מה מצויר בהן בכלל, שלא לדבר על לחשוב מה יוצא דופן. סוניה גם הסבירה את התשובות יפה. כדי לתת הזדמנות גם לשאר הבנות, הצגתי להן את שאר הרביעיות לפי תור. ג'ני הייתה הבאה בתור. ליתר בטחון נתתי לה משימה יחסית פשוטה, מקבילה לגמרי למשימה הקודמת. היא ענתה נכון (חוט התפירה יוצא דופן), אבל כששאלתי למה, היא אמרה:

— כי זה לא עז, לא כבשה ולא פרה.

אחרי כמה שאלות מכוונות מצדי ורמז מצד סוניה (שאמרה שכולם חיים), היא אמרה שהעז, הכבשה והפרה הן חיות והחוט הוא לא חיה. את החידה הבאה היא כבר פתרה נכון — עגור, ינשוף וחסידה הם ציפורים, וסנאי הוא לא ציפור.

כל שאר התשובות וההסברים היו נכונים. הייתה רק פעם אחת שדינה, אחרי שכבר ענתה נכון על שאלה 4 (גדר), ניסתה לתאר חלוקה היררכית ולא לוגית כשאמרה שגם ממזלף וגם מדלי אפשר לשפוך מים על הגדר.

החידה השמינית גם הייתה מיועדת לכולן, ושוב סוניה ענתה ראשונה. אחרי כל חידה שאלתי שאלות מאותו סוג, כמו: גם פטריה היא בגד? גם אגרטל הוא חרק?

הבנים היו צוחקים משאלות כאלו; התגובה של הבנות הייתה הרבה יותר רצינית משום מה, ורק כשבחידה האחרונה שאלתי האם אפשר לישון על קיפוד הן הגיבו בצורה יותר אמוציונלית.

תרגיל 4. סימטריית מראה.

הרכבתי פס אנכי מכמה אבני פסיפס, ואמרתי לבנות שזו מראה. אחר כך הרכבתי כל מיני צורות מימין ומשמאל לפס הזה. המשימה הייתה להרכיב בצד השני של הפס צורה סימטרית לזו שהרכבתי. בכל פעם בדקנו בעזרת מראה אמיתית האם הצורה שהן הרכיבו תואמת להשתקפות שבמראה. אני הרכבתי את הפתרון של הדוגמה הראשונה. ג'ני עקבה אחרי הפעולות שלי ואמרה בעצב שהיא לא יודעת לעשות ככה. ואכן, כשהגיע תורה היא ממש לא הצליחה, למרות שהרכבתי לה צורה פשוטה. אני ודינה עזרנו לה. דינה, לעומת זאת, הבינה את המשימה מיד וביקשה שלא אראה לה — היא תצליח לבד. היא הרכיבה פתרונות נכונים ובבטחון רב, וגם ספרה משבצות כדי להראות שהפתרון שלה נכון.

כמעט נוצר קונפליקט ביני לבין סוניה. היא פתאום הוסחה ושאלה האם אפשר לצלצל בפעמון. הבטחתי לה שבסוף המפגש אתן לה לצלצל, והצעתי לה להסתכל מה ג'ני עושה. היא הודיעה שהיא לא מתכוונת להסתכל כי היא כבר יודעת מה לעשות, ועזבה את השולחן. אבל אחר כך, כשהיה תורה, היא חזרה ולא הצליחה לפתור. דינה רצתה לעזור לה, כמו לג'ני, אבל סוניה התחילה לצעוק ולדחוף את דינה. [למה היה לי רושם שהבנות התנהגו מושלם? אולי חשתי משהו גרוע יותר?]. איכשהו הצלחתי להרגיע אותן ולפתור איתן את התרגיל.

סיכום.

בקושי הצלחתי לגרום לבנות לעזוב את הפסיפס — הן רצו לשחק בו עוד ועוד. אחר כך התחילה ההמולה של להלביש את כולן במעילים, כשברקע הטלפון לא מפסיק לצלצל. באמצע ההמולה הזו, סוניה ניגשה אלי והכריזה:

— אני יודעת! זה בכלל לא מתמטיקה!

— אז מה זה?

– זה פשוט משחק עם אבא, וזהו.
ניסיתי לשכנע אותה שזו אכן מתמטיקה.
בחוץ, דימה ופיטר שאלו את הבנות מה היה (שניהם רצו לנכוח במפגש; לכל אחד בנפרד אולי הייתי מאפשר, אבל לשניהם ביחד לא העזתי). ג'ני קראה בעליזות:
– הושבנו חיילים על שרפרפים!
– אהה, אני מבין, – ענה דימה, מהורהר.

* * *

אפשר לראות שכמעט כל התרגילים שמתוארים לעיל כבר הופיעו בספר בגרסה כזו או אחרת. האם אני צריך להמנע מחזרות? התלבטתי בזה, אבל אני חושב שהחזרות לגיטימיות. הרי רק התרגילים חוזרים על עצמם, והתגובות של הילדים בדרך כלל לא. הילדים שונים.

מפגש 2. נסיכים ונסיכות

חמישי, 9 בפברואר 1984. 10: 11-35: 10. ג'ני, סוניה ודינה.

הרבה פעמים זה ככה בחיים: החוג בקושי התחיל, וכבר יצא לפגרה של מעל חודש. בהתחלה חלינו כולנו בשפעת, אחר כך היה לי כנס בוורונש, ויצא שנפגשנו בפעם השנייה רק אחרי חמישה שבועות. בהשוואה לבנים, הבנות היו הרבה יותר נלהבות אחרי המפגש הראשון. ג'ני וסוניה כל הזמן שאלו מתי יהיה המפגש הבא, וצעקו "יש!!!" כשסוף סוף קבענו תאריך, ודינה בכלל הייתה בעננים – כששאלו אותה מאיזה מאירועי הנובי גוד היא הכי נהנתה (עצי האשוח, סנטה קלאוס, הצגות, טיולים ליער וכו') היא הכריזה שהיא הכי נהנתה ללמוד מתמטיקה (למרות שמלכתחילה החוג לא היה ברשימת אירועי הנובי גוד).

תרגיל 1. אגדה.

הנחתי על השולחן שני חיילי משחק ירוקים גדולים ואמרתי שאלה מלך ומלכה. פעם הם ערכו נשף, והזמינו הרבה נסיכים ונסיכות; הנסיכים הם חיילי המשחק האדומים, והנסיכות – הצהובים. היו הרבה אורחים וכולם מאד נהנו.

– מעניין אם יש יותר נסיכים או נסיכות, – תהתה המלכה.

היא רצתה לספור אותם, אבל זה היה קשה, כי הם כל הזמן זזו ממקום למקום, חלקם אפילו יצאו מהאולם. (דינה מנסה לספור את הנסיכים, אבל אני מזיז אותם כל הזמן ברחבי השולחן, מחביא, מחזיר וכו'. הבנות צוחקות). למלך היה רעיון. הוא ביקש מהנגנים לנגן משהו, ואז כל הנסיכים באו להזמין את הנסיכות לריקוד (אנחנו מצמידים חיילי משחק אדומים לצהובים), ורק אחד נשאר. אז הוא פשוט רקד לבד, והוא גם מאד נהנה. הבנות לא מחכות שאשאל, ומכריזות שיש יותר נסיכים מנסיכות.

אחרי הריקוד כולם התיישבו מסביב לשולחן. (סידרנו את החיילים במעגל, וליד כל חייל הנחנו "צלחת": צלחות אדומות לנסיכים, וצהובות לנסיכות). אבל התברר שהאוכל עדיין לא מוכן – השף רצה להכין עוגה לכל נסיכה וגלידה לכל נסיך, אבל הוא לא ידע כמה נסיכים וכמה נסיכות יש. כשהנסיכים והנסיכות ראו שהאוכל עוד לא מוכן, הם החליטו לצאת לגינה המלכותית. (אנחנו מפנים מהשולחן את כל חיילי המשחק, ומשאירים את הצלחות ואת ה"שף" – חייל משחק ירוק, אבל מסוג שונה מזה של המלך והמלכה).

מה השף יעשה? הוא רצה לספור את הנסיכים והנסיכות, אבל הם הלכו! איך הוא יכול לספור אותם? דינה ספרה את הצלחות האדומות; יצא לה 11. ואז גם ג'ני ספרה אותן. בהתחלה הספירה הייתה מסונכרנת עם האצבע שהצביעה על הצלחות, אבל אחר כך הן נפרדו וכל אחת התקדמה בקצב שלה, כך שיצאו לה "ארבע עשרה-חמש עשרה" צלחות. (אל תתייחסו למספר הזה כאל מספר משוער, כמו שמבוגר יגיד "בערך 14-15". זה יותר משהו כמו שני שמות או שם כפול, כמו אנה-מריה. ג'ני עוד לא

יודעת שלכל אוסף חפצים תואם מספר אחד בלבד. חוץ מזה, 14 ו-15 הם "אותו דבר" באותה מידה כמו 7 ו-8. אחר כך סוניה ספרה; גם לה יצא 11. אמרתי לג'ני:

— תראי, לשתי החברות שלך יצא 11. תנסי גם לספור כמה שיצא לך 11. היא ניסתה. יצא לה שוב 14-15, והשלמתי עם זה.

אחר כך ספרנו גם את הצלחות הצהובות, והחמאתי לשף שהוא כל כך חכם שהוא הבין שיש אותו מספר נסיכות כמו צלחות צהובות ושאפשר לספור צלחות במקום נסיכות. אחר כך השף הכין 10 עוגות ו-11 גלידות, וכולם אכלו אותן והלכו לישון (באותה קופסה), וזה סוף הסיפור.

תרגיל 2. מה יוצא דופן?

כמו בפעם הקודמת, נתתי לבנות רביעיות של ציורים. כל אחת קיבלה שתי רביעיות. כל התשובות היו נכונות, ההסברים – לא תמיד. למשל, ג'ני אמרה שברביעיה "יונה, קיפוד, כלב, קומקום", הקומקום יוצא דופן, "כי הוא לא יודע לעוף, אין לו קוצים והוא לא נובח". בכל פעם התעקשתי שהן ימציאו מילה אחת שמתארת את כל שלושת הדברים שלא יוצאי דופן (היונה, הקיפוד והכלב הם חיות, והקומקום לא). בסוף אמרתי:

— אנחנו ארבעה. אם היו מציירים אותנו על כרטיסים, מי היה יוצא דופן?

דינה ענתה שאני, כי הן ילדות ואני לא ילד. ג'ני אמרה שהיא ודינה יוצאות דופן, כי לי ולסוניה אפשר לקרוא "סשה"⁴². אמרתי שאם מחפשים שני יוצאי דופן אז התשובה שלה נכונה, ואם מחפשים יוצא דופן אחד, אז של דינה.

תרגיל 3. סימטריה.

עשיתי את אותו תרגיל כמו בפעם הקודמת. הפעם כולן הצליחו בכל המשימות, כולל ג'ני. בזמן סוניה ודינה עבדו, ג'ני לא הפסיקה למלמל:

— כן, יופי... ואל תשכחי את הכחולה... לא, לא פה! יופי, ככה...

זו לא פעם ראשונה שאני נתקל בתופעה הזו, אבל היא מפתיעה אותי בכל פעם מחדש. בפעם הקודמת ג'ני לא הצליחה לבצע אף משימה בתרגיל הזה. בין לבין לא תרגלתי את זה איתה בכלל. הדבר היחיד שהשתנה מאז הוא שהיא גדלה בחודש, ופתאום היא יודעת הכל! אני לא יודע איזה גלגלים התחילו להסתובב אחרת בראש שלה, איזה קשרים חדשים נוצרו במוח, אני יכול רק לנחש. אחרי שדינה פתרה את המשימה האחרונה, היא ביקשה שנמשיך.

הצעתי לבנות שבמקום שאני אתן להן משימות, הן יתנו לי. הן הסכימו ברצון, ואני פתרתי את שלוש המשימות שהן הרכיבו לי. מדי פעם הכנסתי טעויות, אבל הן תיקנו אותי.

תמונות

לסיכום, הראיתי לבנות כמה תמונות של עיטורים סימטריים מהספר "עיטורי הסימטריה" ו"סימטריה" של וויל. הן אהבו את התמונות, אבל מה שעוד יותר עניין אותן היה כרטיסי הניקוב שהשתמשנו בהם כסימניות. סוניה ביקשה לקחת אחד הבית; דינה רצתה גם. אמא שלה, גליה, הזכירה לה שאבא שלהן מתכנת, ושיש להם בבית הרבה כרטיסי ניקוב כאלה. הן התחילו להתווכח, וכולם שכחו מהתמונות. כך המפגש הסתיים. ג'ני צלצלה בפעמון (בפעם הבאה תור דינה), אבל לקח עוד עשר דקות עד שההורים של סוניה ודינה שכנעו אותן לעזוב את הפסיפס. כשהן הלכו, דימה וג'ני התיישבו לשחק בו.

מפגש 3. כמה הבדלים יש?

שני, 20 בפברואר 1984. 16:00-16:45. ג'ני, סוניה ודינה.

המאפיין הבולט של המפגש הזה הוא שלא התכוננתי אליו. העברתי את שלושת החוגים שלי – עם הבנים, עם הבנות ובבית הספר – ליום שני ("יום הספריה" שלי – אני מקווה שהקוראים עוד זוכרים מה

⁴² במקור, סוניה היא סניה, וסניה הוא שם חיבה לאלכסנדרה. סשה הוא שם חיבה גם לאלכסנדר וגם לאלכסנדרה. – ר.פ.

זה). לכן ביום שני לא היה לי זמן להתכונן, ובשלושת הימים שלפניו עבדתי על תיקונים למאמר שלי ושל מיכאל שובין, שהיה צריך להיות מוכן "אתמול". לכן המפגש יצא קצת מפורז ולא הכי מוצלח.

תרגיל 1. מה יוצא דופן?

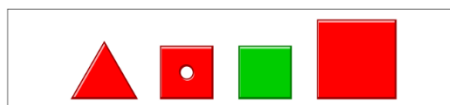
לא הספקתי אפילו לבחור תרגילים מתאימים. אבל זה יצא לטובה: נתתי לבנות להוציא כרטיסים מהקופסה באופן אקראי (על כל כרטיס היו ארבעה ציורים), וכך הן בחרו תרגילים ופתרו אותם במקביל. ההסברים של ג'ני נשאררו באותה רמה כמו קודם. לגבי האוסף "כרוב, מלפפון, קישוא, ברז" היא אמרה שהברז יוצא דופן, כי הוא "לא כרוב, לא מלפפון, ולא קישוא". אמרתי לה שאולי דווקא הכרוב יוצא דופן, כי הוא לא מלפפון, לא קישוא ולא ברז. ואולי בכלל המלפפון (מאותה סיבה), ואולי הקישוא... היא ענתה לי בקול מדוכדך שלא, הברז יוצא דופן. אפשר לומר שזה שלב: ג'ני תמיד עונה נכון, אבל עוד לא מצליחה להסביר את התשובות שלה. ילדים קטנים יותר מנחשים את התשובות, כי הם עוד לא לגמרי מבינים את המשימה, וילדים גדולים יותר (למשל, דינה וסוניה) כבר יודעים להסביר נכון את התשובות.

תרגיל 2. כולם יוצאי דופן.

הנחתי על השולחן את אוסף הצורות החביב עלי, שכל צורה בו יכולה להחשב ליוצאת דופן: שלושה ריבועים ומשולש אחד, שלוש צורות בלי חור ואחת עם, שלוש אדומות ואחת ירוקה, שלוש קטנות ואחת גדולה (איור 134).

הדעות היו חלוקות. ג'ני טענה שהצורה יוצאת הדופן היא זו עם החור, וסוניה ודינה טענו שהמשולש. ניסיתי להציע אפשרות שלישית, אבל שלושתן התעקשו, כל אחת על הגרסה שלה. הצעתי להן שבשביל ההוגנות, כל צורה תהיה יוצאת דופן בתורה. הן הסכימו. מעניין שהן לא הצליחו להגדיר למה הריבוע הירוק יוצא דופן. אותו דבר קרה בתרגיל הבא – לקח להן המון זמן לשים לב להבדל בצבע. אני חשבתי משום מה שזה יהיה הדבר הכי בולט. כך או אחרת, בסוף הצלחנו להסביר לגבי כל אחת מהצורות למה היא יוצאת דופן.

איור 134. כל אחת מהצורות יכולה להיחשב ליוצאת דופן.



תרגיל 3. כמה הבדלים יש?

שלפתי ארבע צורות מהאוסף של דיינש, וביקשתי מהילדות לגלות איזו מהן יוצאת דופן. בחירת הצורות הייתה לא כל כך מוצלחת: היו שתי צורות שהיה אפשר להגדיר כיוצאות דופן (כלומר, שני פתרונות נכונים). הן התחילו להתווכח. חוץ מזה, הן כבר מיצו את התרגילים בנושא הזה. התחלתי לנאום משהו ארוך על פרמטרים של צורות (צורה, צבע, גודל וכו'). היה די משעמם, והבנות לא היו מרוכזות. ואז הלכתי לכיוון עוד יותר תלוש: הנחתי על השולחן ריבוע אדום גדול וביקשתי מהן להניח לידו את הצורה שהכי דומה לו. בהתחלה זה הלך בסדר: הן הניחו על השולחן את כל הריבועים האדומים הגדולים. אבל אז התברר שאו שהן לא זוכרות את התרגיל או שהן לא הבינו אותו, כי הן התחילו להרכיב משהו שנראה כמו בית על גלגלים: להניח מלמעלה משולשים ומלמטה עיגולים. אמרתי להן להניח את הצורות בקו ישר, הערתי משהו על "פתרון שגוי", אבל זה לא עזר. כעסתי על עצמי שלא התכוננתי למפגש, וגם זה השתקף במצב הרוח הכללי.

לקחתי שתי צורות שהיו שונות אחת מהשנייה רק בפרמטר אחד, וביקשתי מהבנות להגיד מה ההבדל בניהן. אמרו. שתי הצורות הבאות היו שונות זו מזו בשלושה פרמטרים. שאלתי כמה הבדלים יש. בהתחלה הבנות מצאו רק הבדל אחד, ובתור הבדל שני רק אמרו ש"הן לא דומות". אחרי שהן חשבו עוד קצת, הן מצאו את שני ההבדלים הנותרים. כמו שכבר הזכרתי, ההבדל שהיה להן הכי קשה לגלות היה ההבדל בצבע. שיבחתי אותן על העבודה. היה נראה שאנחנו עולים על המסלול. שתי הצורות הבאות היו שונות בכל ארבעת הפרמטרים. דינה מצאה את ההבדל הראשון, ג'ני את השני. שאלתי את סוניה איזה עוד הבדל יש. היא נעמדה, הסמיקה, אבל לא מצאה שום הבדל נוסף.

– טוב, תחשבו, – אמרתי לכולן.

פתאום ג'ני מצאה את ההבדל השלישי, ומיד אחריו את הרביעי. החמאתי לה והתחלתי להרחיב על זה שיש כל כך הרבה הבדלים, ארבעה! חזרתי עליהם שוב, וכל כך נכנסתי לזה שלא שמת לב שסוניה נעלבה. ואז אמא שלה, קטיה, שאלה אותה מה קרה, ובתגובה היא התחילה פתאום לבכות בהיסטוריה:

– אניי הייתי אמורה למצווא!!!

כולם ניסו להרגיע אותה, מה שרק הפעיל אותה יותר. בסוף שאלתי אותה:

– סוניה, כמה אנשים יושבים פה מסביב לשולחן?

– שלושההה...

– איך שלושה? מי לא בן אדם?

– ארבעה.

– את רואה: ארבעה אנשים וארבעה הבדלים, אחד לכל אחד.

אמנם דמגוגי מצדי, אבל כנראה שעד אז היא כבר שכחה מה בדיוק קרה, כי זה הרגיע אותה.

תרגיל 4. סימטריה יחסית לאלכסון.

הפעם העליתי את דרגת הקושי של התרגיל: בחרתי באלכסון של הפסיפס בתור ציר הסימטריה. לא הייתי בטוח האם הבנות יסתדרו עם התרגיל, ולכן בהתחלה הן נתנו לי משימות. היה נראה שהן מבינות אותו מצוין. לקראת הסוף אפילו עשיתי טעות וסוניה תיקנה אותה בתרועת נצחון.

ואז החלפנו תפקידים: אני נתתי להן משימות, הן הרכיבו צורות סימטריות יחסית לאלכסון, ועבדו ממש יפה. כרגיל עם הפסיפס, היה קשה לסיים ולהניח אותו בצד.

סביבון יפני.

לא היו לי רעיונות לתרגילים, אז הראיתי להן איך הסביבון היפני נעמד על הרגל. זה הרשים יותר את קטיה מאשר אותן.

תרגיל 5. סידור האוסף של דיינש.

בסוף ביקשתי מהבנות לשים את אוסף הצורות של דיינש בקופסה, כך שהצורות עם החור וכלי החור יהיו בשקעים נפרדים. הן סידרו הכל כמו שצריך, אבל באווירה קצת קרבית, כי כל אחת רצתה להשיג את האחרות ולהחזיר כמה שיותר צורות. לקראת הסוף הן קלטו פתאום שהן יכולות לקחת כמה צורות בבת אחת, כך שיהיה להן מלאי, וזה קצת הרגיע את האווירה.

בזה המפגש הסתיים, רק סוניה עשתה עוד איזו סצנה קטנה – היא דרשה שאתן לה שיעורי בית (כדי שהיא תוכל, כמו פיטר, לכתוב משהו במחברת), ולי לא היה שום רעיון מתאים.

מפגש 4. הרכבה על סמך שרטוט

שני, 12 במרץ 1984. 16:00-16:45. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. $\binom{5}{2}$ בפסיפס.

התרגיל היה כזה: הרכבנו שרשראות מאבני הפסיפס. בכל שרשרת היו צריכים להיות חמישה "חרוזים", מתוכם שניים אדומים ושלושה לבנים. כל השרשראות צריכות להיות שונות אחת מהשניה. הבנות פתרו את התרגיל לא פחות טוב מילדי הכיתה של דימה. הן נטו לפספס כפילויות, ולכן אחרי כל פתרון ביקשתי מהן לוודא שהוא לא זהה לאחד שהן כבר הרכיבו. כך הן מצאו את רוב הכפילויות בעצמן. לפעמים הן החשיבו שרשראות סימטריות לזהות. כשג'ני חיפשה בתורה את הפתרון התשיעי היא הסתבכה. אם היא הייתה לבד אני מניח שהיא הייתה מוצאת אותו בסוף, אבל לקח לה הרבה זמן, היא ניסתה כל מיני אפשרויות, התחילה לחזור על עצמה, וסוניה ודינה כבר התחילו להשתעמם והוסחו. לכן רמזתי לה בעדינות איפה להניח את אחת האבנים, והיא מצאה את הפתרון מיד.

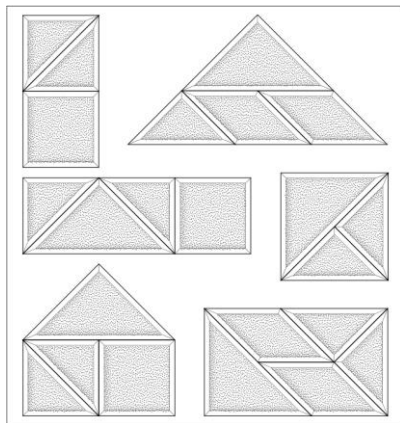
את הפתרון העשירי אני הרכבתי. עברתי לאט ובשיטתיות על כל האפשרויות, עד שהגעתי לנכונה. עבור כל אפשרות, הבנות עזרו לי לחפש שרשרת זהה שהן כבר הרכיבו, ונורא התלהבו בכל פעם שהן מצאו כזו. היינו צריכים לנסות למצוא את הפתרון ה-11, אבל לא חשבתי על זה משום מה.

תרגיל 2. מה יוצא דופן?

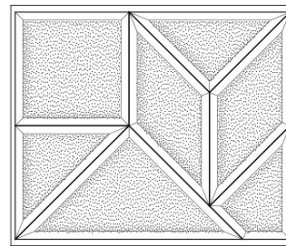
המשחק הלך כרגיל. ביקשתי מהבנות שיגידו מילה אחת שמתארת את שלושת הדברים שלא יוצאי דופן. באחת הפעמים ג'ני שלפה קלף עם כוס, קומקום, אגרטל וארנב, וקראה בשמחה: – הו, שלושה יוצאי דופן!
כנראה שהרגלתי אותן שהחיות לא יוצאות דופן.

תרגיל 3. הרכבה על סמך שרטוט.

בעמ' 112 ואילך סיפרתי על המשחק "פיתגורס" ועל כמה תרגילים לגביו. בשלב ההוא הייתה לנו גרסה אחרת של המשחק הזה: גם בה היו שבע צורות, אבל אחרות, והיה מורכב מהן מלבן ולא ריבוע. בהיעדר שם אחר, אקרא לגרסה הזו "הפיתגורס ההונגרי" (מדהים כמה צעצועים מוצלחים הביאו לנו מהונגריה). הצורות והאופן שבו הן היו מונחות בקופסה מתוארים באיור 135.
את הרעיון לתרגיל הזה קיבלתי מג'ני. היא שיחקה בצורות האלו, סידרה אותן בדרכים שונות על השולחן, ואז ביקשתי ממנה להחזיר אותן לקופסה. היא הצליחה. הראיתי לה שרטוט של האופן שבו הן אמורות להיות מונחות (איור 135). התברר שהרכבה על סמך שרטוט היא לא משימה טריוויאלית כמו שאפשר היה לחשוב. היא הצליחה, אבל זה דרש ממנה מאמץ מסוים.
היא כל כך התלהבה שהיא שפכה מיד בחזרה את כל הצורות על השולחן וניסתה להכניס אותן שוב. עד כמה שזה מוזר, הפעם היא לא הצליחה, כי האיור היה מונח לרוחב והקופסה לאורך. עזרתי לה. ואז ציץ לי רעיון: לצייר כמה שרטוטים פשוטים, ולתת לבנות לסדר לפיהם את הצורות. הכנתי עשרה תרגילים ברמות קושי שונות. הן פתרו ששה מתוכם (אלה שבאיור 136).
דינה הסתבכה עם התרגיל הששי, האחרון, וביקשה רמז. ג'ני פתרה יפה כמו השאר. היה כיף לראות איך היא תופסת את הציור ושולפת מהערימה רק את הצורות שהיא צריכה, ואז מסדרת אותן במיומנות. לקראת סוף המפגש נזכרתי בבהלה שהבטחתי לסוניה שיעורי בית בכתב, ולא הכנתי כלום. אבל סוניה שכחה מזה, תודה לאל, כך שהמפגש הסתיים באווירה טובה.



איור 136. המשימה: להרכיב מהחלקים של "הפיתגורס ההונגרי" את הצורות האלו.



איור 135. "הפיתגורס ההונגרי".

מפגש 5. סידורים אפשריים (תמורות)

שני, 19 במרץ 1984. 16:00-16:50. ג'ני, סוניה ודינה.

המפגש היה לא כל כך מוצלח. ראשית, קצת הגזמתי ברמת הקושי של התרגילים, הבנות לא הצליחו לפתור את חלקם, וזה ביאס אותן. שנית, היו הרבה ויכוחים, היעלבויות וכו'.

תרגיל 1. תמורות.

שוב הרכבנו שרשראות, הפעם משלוש אבנים שונות: אדומה, כחולה וצהובה. הבנות פתרו יפה, ומצאו את כל שש האפשרויות. הדגמתי להן איך אני מנסה למצוא פתרון שביעי, כשאני עובר על כל

הפתרונות באופן שיטתי. בכל פעם שהתברר שהשרשרת שהרכבתי כבר הורכבה בעבר הן כל כך התלהבו שהתחילו לכאוב לי האזניים.

סיימנו את התרגיל, אבל הבנות לא רצו לעזוב את הפסיפס, כך שנתתי להן להרכיב גם שרשראות מארבעה צבעים. המשימה הזו הייתה קצת קשה מדי בשבילן, כי הן בקושי ידעו לזהות שרשראות זהות. הן הסתמכו בעיקר על מיקום האבן הכחולה, שהייתה הכי בולטת. לכן הפסקנו את התרגיל אחרי שהן הרכיבו רק שבע שרשראות (מתוך 24 שרשראות אפשריות). בין לבין, דינה הרכיבה שרשראות סימטריות לאלו של סוניה. אבל כשהיא הכריזה על זה בקול, סוניה מחתה.

במהלך המשחק, ג'ני וסוניה התחילו להתווכח על התור. אמרתי שהבאה בתור תהיה זו שמתנהגת יותר יפה. שתייהן השתתקו תוך רגע, כך ששוב אי אפשר היה להכריע מי תהיה הבאה. כדי שאף אחת לא תיעלב, החלטתי להטיל מטבע. יצא תור ג'ני. סוניה התחילה לבכות. שאלתי אותה ממי היא נעלבה, והצעתי לה להגיד "נו-נו-נו" למטבע (היא אכן עשתה זאת). דינה צחקה ואמרה:

— סוניה, המטבע הרי טיפש!

מפתיע שג'ני לא התחילה להתווכח איתה ולטעון שהמטבע חכם.

תרגיל 2. מה יוצא דופן?

יכול להיות שאני סתם קצת זועף היום, אבל העובדה היא שהיום כל הבנות הסבירו את התשובות שלהן כמו שרק ג'ני הסבירה במפגשים הקודמים: הגרזן יוצא דופן כי הוא לא פרפר, לא ג'וק ולא דבורה. ניסיתי להציע להן בסקסטיות תשובות שגויות עם הסברים אנלוגיים, אבל זה לא ממש עזר. מעניין שבכל המפגשים שלנו התשובות שלהן תמיד היו נכונות.

תרגיל 3. הרכבה על סמך שרטוט.

הייתי צריך להיות יותר זהיר אחרי ההסתבכות של דינה עם השרטוט הששי, אבל חשבתי משום מה שיהיה בסדר. מתוך עשרת השרטוטים שהכנתי, נשארו ארבעה. הבנות קצת התווכחו ביניהן אבל בסוף כל אחת בחרה שרטוט (איור 137).

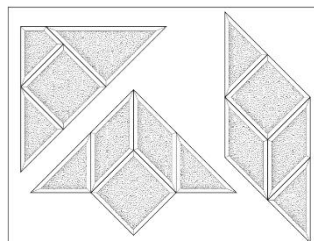
דינה הייתה היחידה שהצליחה לפתור. סוניה בכלל לא הייתה בכיוון. ניסיתי לרמוז לה מה לעשות, אבל היא לא הקשיבה לי — במקום זה היא התחילה לשיר ולהעמיד פנים שלא אכפת לה. קטיה הייתה בלחץ ורצתה גם לעזור לה, ראתה את השרטוט ונלחצה עוד יותר. דינה גם ניסתה לעזור, אבל קטיה עצרה אותה, וסוניה הכריזה שהיא לא רוצה לפתור את התרגיל, אז עזבנו אותה.

המצב של ג'ני היה קצת יותר טוב: היא הניחה נכון ארבע צורות מתוך חמש, אבל לא הצליחה להתאים את המשולש האחרון. פתאום היא נעלבה ואמרה שאני נותן לה תרגילים קשים מדי. ניסיתי להצטדק ואמרתי שתרגילים קשים הם יותר מעניינים, אבל היא ענתה שזה לא מעניין לה. דינה אמרה שהיא דווקא אוהבת תרגילים קשים. בסוף סיכמנו שאחרי המפגש הבנות ינסו לפתור את התרגילים ביחד אם ירצו. אבל בסוף המפגש ג'ני אמרה שלא בא לה.

תרגיל 4. סימטריה על דף משבצות.

סדרת התרגילים הזו מקבילה לזו של הפסיפס — ציירתי קו אנכי על דף משבצות, ואז ציירתי צורות שונות ליד הקו והן ציירו את הצורות הסימטריות להן מהצד השני של הקו. סך הכל הן פתרו את התרגיל יפה, אם כי רק דינה ציירה מסודר עם ספירת משבצות, בעוד שסוניה וג'ני נצמדו לקווי המתאר הכלליים של הצורות. פעם אחת ג'ני טעתה, אבל בדרכה הייחודית: ציירה את הצורה הסימטרית ביחס למרכז.

איור 137. אלה התרגילים שהבנות בחרו. ג'ני את הימני, דינה את זה שבמרכז, וסוניה את השמאלי.



מפגש 6. מה אתה עושה כשאתה קם בבוקר?

חמישי, 29 במרץ 1984. 10:30-11:30. ג'ני, סוניה ודינה.

אני כותב על המפגש הזה ועל הבא כמעט חודש אחרי שהוא התקיים (ב-24 באפריל), כך שהספקתי לשכוח חלק גדול מהפרטים. כנראה שהתיאור של המפגש הזה יהיה קצר משל הקודמים.

תרגיל 1. הרכבה על סמך שרטוט.

החלטתי לא לוותר ולסיים עם שני התרגילים שנתרו. הבנות פתרו אותם ביחד. הן קצת רבו והתווכחו על צורות פה ושם, אבל בסך הכל זה עבר בסדר, והן הצליחו לפתור את שני התרגילים בלי עזרתי.

תרגיל 2. מחזוריות – פסיפס.

הרכבתי מאבני הפסיפס תבנית מ-5-3 אבנים כל פעם, והבנות היו צריכות לחזור עליה שוב ושוב וליצור "שרשרת". כולן הצליחו.

תרגיל 3. מה יוצא דופן?

סיימנו את המשחק – השתמשנו בכל הכרטיסים שנתרו. אפשר לבקש מאלה שתצייר כרטיסים חדשים, או לשחק עם חפצים. אפשר גם לשחק בזה עם אובייקטים "מתמטיים" יותר (למשל, שלושה משולשים ומרובע וכד').

תרגיל 4. מה אתה עושה כשאתה קם בבוקר?

נתונה סדרה של ציורים שמתואר בהם ילד שעושה כל מיני פעולות שעושים בבוקר: אוכל ארוחת בוקר, מתלבש, מסדר את המיטה, עושה פעילות גופנית, ישן, מתעורר, שוטף פנים, יוצא, לובש מעיל. צריך לסדר את הציורים לפי סדר הפעולות המתאים: קודם ישנים, אחר כך מתעוררים וכו'. הבנות פתרו את התרגיל יפה, אבל היו כמה רגעים של חוסר הסכמה. למשל, מה עושים קודם: מסדרים את המיטה או אוכלים ארוחת בוקר? ניסיתי לגרום להן לענות תשובות "לוגיות" (למשל: כשהילד אוכל הוא כבר לבוש, וכשהוא מסדר את המיטה הוא עוד לובש פיג'מה), אבל הן ענו יותר תשובות כמו "אמא תמיד עושה ככה", "ילדים מחונכים קודם כל מסדרים את המיטה" וכו'. התשובות שלי לא נשמעו להן יותר נכונות. לא עזר גם כששאלתי "איך אתן יודעות?".

פאונים.

לסיכום הראיתי להן תמונות מהספר "מודלים של פאונים", מאת ונינג'ר. התמונות היחידות שאיכשהו עניינו אותן היו של פאונים דמויי-כוכב. לגבי ג'ני, אלה ואני שמנו לב שעם כל אהבתה לתמונות, התמונות היחידות שמעניינות אותה הן אלו שקורה בהן משהו, שמתארות התרחשות, גם אם הן בשחור-לבן או באיכות נמוכה וכד'. ואילו תמונות שבעיני הן מרהיבות – ציורים או צילומים צבעוניים של פרפרים, צדפים, תוכים וכו' – לא מעניינות אותה בכלל.

מפגש 7. המשחק גובר על המדע

שני, 9 באפריל 1984. 16:00-16:40. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. סימטריה על דף משבצות.

אותו תרגיל כמו תרגיל 4 ממפגש 5. ג'ני שוב הדגימה את נטייתה לצייר צורות סימטריות ביחס למרכז ולא ביחס לציר. זה לא קרה עם אף אחד מהבנים; להפך – סימטריה מרכזית תמיד הייתה להם, וגם נראתה לי, קשה יותר.

תרגיל 2. סימטריה עם טעויות.

על דף נייר מצוייר ציר סימטריה וצורות משני הצדדים שלו, שאמורות להיות סימטריות ביחס אליו, אבל בחלקן נפלו טעויות (איור 138). צריך למצוא ולתקן את הטעויות האלו. אחרי התרגיל הזה נתתי להן תרגיל דומה אבל עם צורות צבעוניות, כך שהיה צריך לקחת בחשבון גם את הצבעים.

כמו תמיד, דינה פתרה טוב יותר מסוניה וג'ני. סוניה "נטפלה לקטנות" – הצביעה על כל מיני טעויות לא-קיימות שנבעו מזה שהציור לא היה מושלם.

תרגיל 3. זוגות לא סדורים.

כשאנחנו מרכיבים סדרה של אבנים בפסיפס, אנחנו מחשיבים סדרות שמורכבות מאבנים באותם צבעים אבל בסדר שונה כסדרות שונות. אני חושב שהבנות היו מסתככות עם כלל כמו "בואו נחשיב את הזוג "כחול, אדום" ואת הזוג "אדום, כחול" כאותו זוג, כי כך וכך".

בשביל להסביר להן את הזהות הזו, השתמשתי בקוביות פלסטיק שמורכבות משני חלקים, כשכל חלק הוא בצבע אחד מתוך ארבעה אפשריים. כך אפשר לבנות קובייה אדומה, אדומה-צהובה, אדומה-כחולה, וכו'. המשימה הייתה להרכיב את כל הקוביות האפשריות. בסך הכל אפשר להרכיב ארבע קוביות בצבע אחד ועוד שש בשני צבעים (איור 139).

הבנות פתרו יפה אבל לא רצו לעזוב את הקוביות. אחרי שהן הרכיבו את כל הקוביות האפשריות משני צבעים, הן הרכיבו את כל הקוביות האפשריות בצבע אחד, ואז חזרו להרכיב קוביות משני צבעים. בהתחלה ניסיתי להתווכח:

– בואו נראה אם כבר הרכבתן קובייה כזו.

– כן, הנה היא, – ענו הבנות שחיכו לתורן.

אבל מי שהרכיבה את הקובייה הייתה אומרת:

– לא, פה האדום מלמעלה, ואצלי הוא בצד!

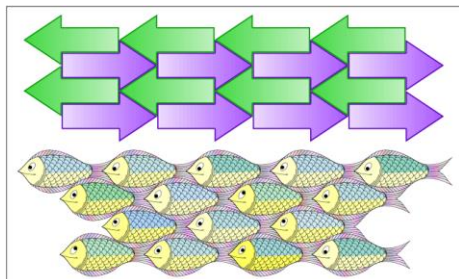
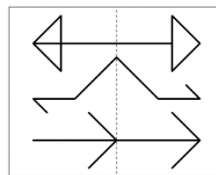
בסוף נאלצתי לשנות את תנאי התרגיל: התחלנו להניח כל קובייה בכל המנחים האפשריים (מה שמעלה רעיון לתרגיל אחר: לקחת צורות לא סימטריות ולהניח אותן בכיוונים שונים. למשל קוביות שמחולקות ל-2 על ידי מישור שעובר דרך אלכסונים של פאות נגדיות, ר' עמ' 186). אבל אחרי שהן פתרו גם את התרגיל הזה, הן המשיכו להרכיב קוביות, וכבר לא היה לי כח לקטוע אותן.

תמונות: ריצופים.

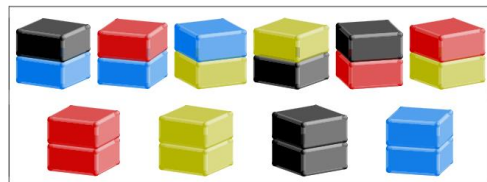
תכנתי להראות להן תמונות של "ריצופים" – כלומר, דרכים למלא מישור בצורות זהות – מתוך הספר של שטיינהאוס, "הקלידוסקופ המתמטי". אבל כמה שקראתי להן וניסיתי לדחוף להן את הספר, ואפילו כשציירתי בעצמי ריצוף מחצים כמו באיור 140, זה לא עזר: הן היו עסוקות בבניית ארמונות מהקוביות מהתרגיל הקודם. אפילו הריצוף עם הלטאות של אשר לא עניין אותן. זה קרה לי בעבר בחוג עם ילדים אחרים (אני לא כותב עליו כלום, כי לא נשאר לי שום תיעוד ממנו). כנראה שצריך לשמור לסוף תרגילים עם קוביות יפות כאלו.

אפשר לעשות תרגיל מעניין על ריצוף אם משקיעים וגוזרים המון צורות זהות – ריבועים, משושים, חצים, או אפילו לטאות כמו של אשר. יכול להיות שאם הייתי עושה את זה, זה היה תופס אותן.

איור 138. הציורים האלה כמעט סימטריים ביחס לציר שבמרכז – נפלו בהם טעויות.



איור 140. ריצופים שונים.



איור 139. הקוביות האלו מורכבות משני חצאי פלסטיק. במשימה שלנו, סדר החצאים לא חשוב – כלומר, קובייה כחולה-אדומה וקובייה אדומה-כחולה נחשבות לזהות. תחת התנאי הזה, ניתן להרכיב עשר קוביות שונות.

מפגש 8. בין שתי מראות

שלישי, 1 במאי 1984. 15:19-30:18. ג'ני, סוניה ודינה.

ההפוגה הארוכה הייתה בגלל נסיעת עסקים שלי.

תרגיל 1. זוגות אבנים בפסיפס.

המשימה הייתה להרכיב את כל הזוגות האפשריים, כשהצבע נלקח בחשבון. היו סך הכל חמישה צבעים, ולכן 25 זוגות אפשריים.

הבנות פתרו מאד יפה. הן מצאו 24 זוגות אפשריים, ואת הזוג האחרון אני הראיתי להן. אם היו חזרות על אותו פתרון, הן היו מגלות אותן מיד, וגם מצביעות על פתרונות סימטריים:

– הזוג הזה הוא כמו זה, רק הפוך...

בסוף ביקשתי מדינה לספור כמה פתרונות יש.

תרגיל 2. מצאו את ההבדלים.

נתונות שתי תמונות שמצוירים בהן אותם אובייקטים באותם מיקומים, וצריך למצוא את ההבדלים הקטנים ביניהן (איור 141). היו שני זוגות של ציורים כאלה.

תרגיל 3. לעקוב אחרי המספרים.

כל אחת קיבלה דף מחולק לעשרה חלקים, שבכל אחד מהם כתובה ספרה, ללא סדר. היה צריך להצביע על הספרות ולהגיד אותן בקול לפי הסדר. שעשע אותן שה-0 תמיד נשאר לסוף. דינה אפילו רצתה להתחיל מה-0, אבל אז אמרה:

– לא, בעצם עדיף שיהיה מצחיק, – והתחילה מ-1, כמו כולן.

תרגיל 4. להמשיך את העיטור על דף משבצות.

תרגיל דומה לתרגיל 2 במפגש 6, אלא שהפעם עבדנו על דף משבצות במקום הפסיפס. ציירתי התחלה של עיטור, והבנות היו צריכות להמשיך אותו (איור 142).

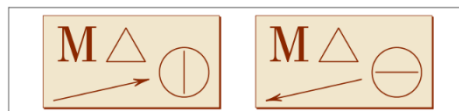
דינה הייתה היחידה שממש ספרה משבצות, ואילו סוניה וג'ני שמרו על המתאר הכללי של הציור. אבל בהיבט של "ניחוש החוקיות" הן פתרו את התרגילים נכון. מעניין שגם בתרגיל הזה וגם בתרגילים אחרים, כשהן עבדו עם הפסיפס הן שמרו לא רק על הדוגמה אלא גם על היחס בין החלקים, ועל דף המשבצות הן לא מצליחות. יכול להיות שהן מבינות טוב יותר את המושג של כמות (במקרה שלנו, מספר האבנים) מאשר את המושג של אורך?

לגבי העיטור התחתון באיור 142: כשמשמעם לי בשיעורים אני מצוירת אותו בקצות הדף, וזה תמיד מסב לי איזו הנאה לא מוסברת. לא יודעת אם זה קשור לחוג. – ג'ני.

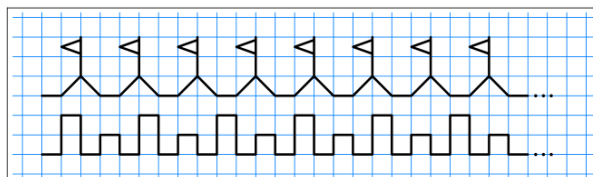
משחקים עם שתי מראות.

לקחתי שתי מראות קטנות (לצערי, אין לי גדולות) והראיתי להן על השולחן מה קורה אם חייל משחק נמצא בין שתי המראות, וגם מה קורה כשמשנים את הזווית ביניהן. אחר כך עברנו למסדרון, הבאתי מהמטבח את המראה הגדולה השניה, והבנות נעמדו ביניהן וצפו בעניין בסדרת ההשתקפויות האינסופית שלהן. נהנו מאד.

איור 141. המשימה: למצוא את ההבדלים.



איור 142. המשימה: להמשיך את העיטור.



מפגש 9. בחצר

שני, 7 במאי 1984. 15:30-18:30. ג'ני, סוניה ודינה.

היה מזג אוויר נפלא, ולא רצינו להחזיר את הבנות מהטיול הביתה. בהתחלה החלטתי לדחות את המפגש מ-16:00 ל-18:30, אבל גם כשהשעה התאחרת המשיך להיות נעים בחוץ, ואלה הציעה להעביר את החוג בחצר. המצאתי את ההפעלות על הדרך. לא כולן היו מוצלחות, אבל עצם הגיוון היה מבורך.

תרגיל 1. כמה צעדים יש בין הביתנים?

בחצר שלנו יש גן שעשועים, וקצת אחריו יש שני ביתנים וביניהם שביל אספלט. בהתחלה הבנות היו עסוקות בעיקר בלהתמקם סביב איזשהו משטח, כך שבקושי הצלחתי ללכוד את תשומת הלב שלהן.

ביקשתי מהן לנחש כמה צעדים יש מביתן אחד לשני. הן התחילו לזרוק מספרים. לכל אחת מהן המספרים 20 ו-100 נראו סבירים באותה מידה.

אחר כך התחלנו למדוד את המרחק. דינה עברה אותו ראשונה, אבל היא הלכה עקב בצד אגודל והבדיקה התארכה. ג'ני הייתה שניה. היא ספרה צעדים כרגיל אצלה: בהתחלה קצב הצעדים התאים לספירה, ואחר כך, ככל שהמספרים גדלו, ההתאמה הלכה לאיבוד: עד שהיא אמרה "עשרים וארבע" היא הייתה עוברת שלושה-ארבעה צעדים. בסוף היא הגיעה למספרים שהיא לא הכירה מספיק טוב, ואז בכלל היא הייתה מתקדמת כמה וכמה צעדים עד שהייתה נזכרת מה המספר הבא.

אני חושבת שעד היום אני מסתבכת עם זה... – ג'ני.

דימה מקפצץ מסביב וכמו תמיד מנסה להסביר לג'ני שהיא טועה. היא מנפנת אותו:

– נו, דימה, תפסיק להפריע לי! – ושוכחת כמה צעדים היא ספרה.

– בכמה הייתי? – היא שואלת אותי, מכווצת את גבותיה.

– שלושים ושש, – אני עונה.

– ומה אחרי זה?

דינה מנסה לענות לה, אבל ג'ני מתעצבנת:

– נו, דינה! לא שאלתי אותך!

ובמשך כל השיחה הזו היא ממשיכה ללכת.

אחר כך סוניה עשתה את אותו הדבר, אבל בצורה קצת יותר מעודנת. המספרים יצאו ממש שונים. ניסינו להשוות בין המספרים שהתקבלו לאלה שהן ניחשו (וכבר הספיקו לשכוח). אבל פעולת ההשוואה הייתה חסרת משמעות מבחינתן; המסקנה היחידה שלהן הייתה שהן טעו. סוניה נעלבה והתחילה לספור שוב צעדים כך שהפעם יצא כמה שהיא ניחשה. ניחמתי אותה בזה שהיא טעתה פחות מכולן (מה שהיה נכון).

בסוף רציתי להצחיק אותן קצת אז מדדתי את המרחק גם בצעדים שלי – עשיתי צעדים ענקיים. כולן

התגלגלו מצחוק, אבל לא הסיקו שום מסקנות מתמטיות לגבי זה שכמות הצעדים תלויה באורך כל צעד. כשבצעד האחרון התנגשתי בקיר הן כבר התפקעו לגמרי.

תרגיל 2. לבנות מגדל באותו גובה.

ניסיתי לתת להן את התרגיל שנתתי פעם לבנים: מרכיבים על השולחן (במקרה שלנו, על מדרגת הגישה לביתן) מגדל מקוביות; צריך להרכיב על הרצפה מגדל באותו גובה. כמובן שהן ניסו להרכיב מגדל שיגיע לאותו גובה (איור 143).

אבל לא הצלחנו לפתח דיון על זה, כי הרוח פירקה כל הזמן את שני המגדלים (וגם פני האספלט היו לא מספיק ישרים). החלטתי לדחות את זה לפעם אחרת.

אגב, אני חושב עכשיו על זה שצריך לנהל את התרגיל הזה אחרת. צריך לבנות את המגדל שמעתיקים על הרצפה, ובגובה נמוך מפני השולחן, כך שאי אפשר יהיה לבנות את המגדל שעל השולחן כך שיגיע לאותו גובה. התקווה היא שבמקרה כזה יבנו אותו באמת באותו גובה – למשל, מאותו מספר קוביות.

ואז אפשר לבקש מהן לבנות מגדל שלישי באותו גובה, הפעם על הרצפה. יהיה מעניין להשוות בין המגדל הראשון לשלישי.

[איזו מחשבה מרעננת, נכון? כבר הספקתי לשכוח שכבר חשבתי עליה ואפילו כבר ניסיתי אותה עם הבנים (עמ' 71)].

תרגיל 3. תכנית אדריכלית של גן השעשועים.

התרגיל הזה היה ממש כיף. אפילו עכשיו, עשרים שנים אחרי, הסיטואציה חיה וצבעונית אצלי בראש. עברנו לגן השעשועים. ביקשתי מהבנות לזכור את כל מה שיש בו – הנדנדה, הספסל, ארגו החול, מתקן הטיפוס, השבילים וכו' – ולזכור גם איפה כל דבר ממוקם. אמרתי להן שתכף הן יציירו הכל במבט מלמעלה, כמו שציפורים רואות את זה.

חזרנו לשביל האספלט בין הביתנים, כל ילדה קיבלה גיר, והן התחילו לצייר. מי שרצתה לבדוק משהו יכלה לקפוץ לגן השעשועים.

סוניה הכי הצליחה – התכנית שלה הייתה מצוירת טוב וכמעט כל הפרטים היו נכונים. היה חסר ארגו החול; שאלתי את סוניה איפה הוא והיא הוסיפה אותו במיקום הנכון.

דינה כנראה הבינה את המשימה טוב יותר מהשאר. היא עבדה בפדנטיות יוצאת מן הכלל. בהתחלה היא ציירה במשך המון זמן את הספסל, שהיה בצורת רי"ש (איור 144).

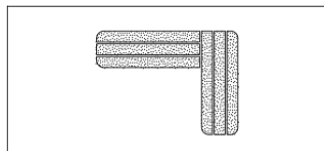
אחר כך היא הסבירה לי באריכות שבמבט מלמעלה לא רואים את רגלי הספסל, ולכן לא צריך לצייר אותן. כשהיא סיימה עם הספסל היא עברה לצייר את הנדנדה (שקצת קשה לצייר איך בדיוק היא נראית מלמעלה), וכבר הגיע הזמן לסיים, כי סוניה גמרה לעבוד על התכנית שלה כבר מזמן ואיבדה סבלנות, וגם ג'ני עזבה מזמן את השרטוט. דינה התבאסה וביקשה לסיים את התרגיל, אבל לא היה סיכוי – גם שעתים לא היו מספיקות לה.

ג'ני התחילה טוב. תוך שניה היא ציירה על האספלט עיגול גדול – ארגו חול. רגע אחר כך היא ציירה לידו דלי וכף, ואז ילד וילדה שמשחקים בחול, ואז בובה שהילדה השכיבה לישון... ניסיתי להחזיר אותה מהסיפור למשימה, ושאלתי איפה הנדנדה. שתיים-שלוש תנועות והופיעה גם נדנדה. הילד והילדה הלכו להתנדנד, אבל אז התחיל גשם; הם רצו הביתה, שכחו את הבובה... בקיצור, תוך שניה היא בנתה סיפור שלם, ושכחה לגמרי מגן השעשועים, מהשרטוט, ובכלל מהמתמטיקה.

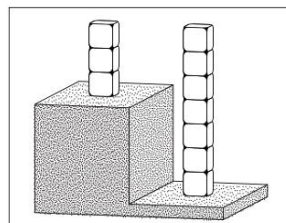
מה אפשר להוסיף? זה אחד מהמקרים שבהם אני לא מצליח להבחין בין נצחון לתבוסה. מצד אחד, אם מסתכלים על זה דרך הפריזמה המתמטית, לפחות שתיים מהמשתתפות לא פתרו את התרגיל. מצד שני, זה כל כך כיף לראות כל כך בבירור את האופי של כל אחת, את כל שלוש האישייות, שהמתמטיקה קצת זזה הצידה. כל מה שעובר לי בראש הוא "עזוב אותך ממתמטיקה. הילדים הרבה יותר מעניינים".

ניסויים עם מגנטים.

לסיכום הראיתי לבנות כמה "קסמים" עם מגנטים. באחד מהם מגנט אחד "ברח" מהשני (המגנט הבורח היה מונח במשאית צעצוע, וכל פעם שקירבתי אליה מגנט מאחור היא התקדמה). בקסם השני כמה נעצים, סיכות ועוד כל מיני חפצים מתכתיים קטנים התרוצצו על פני בריסטול. הבנות ניחשו שזה בגלל המגנט, וגם אני לא התאמצתי להסתיר.



איור 144. הספסל במבט מלמעלה.



איור 143. הבנות חושבות שהמגדלים האלה הם באותו גובה.

בסך הכל המפגש היה קצת מבולגן. בגלל מזג האוויר היו בגן השעשועים המון ילדים עם ההורים והסבתות שלהם. גם סביבנו התקבצו הרבה ילדים, ביקשו לצייר בגירים, והבנות צעקו עליהם שזה לא החוג שלהם אלא שלהן. ביקשתי מהן לדבר בנימוס. למעשה, אפילו כמות האנשים "שלנו" הייתה גדולה: חוץ ממני היו האמהות של כולן, דימה ופיטר.

המפגש הסתיים בהפתעה: התברר שבזמן שדימה התרוצץ לידנו גנבו לו את האופניים. חיפשנו אותם במשך שעותיים – זה היה סיפור בלשי שלם, נעזרנו גם בילדים זרים ששיחקו שם. בסוף מצאנו אותם. אין לנו טלוויזיה כך שדימה לא ראה מעולם סרטים בלשיים, אז הוא כל הזמן שאל אם גם שוטרים מחפשים ככה גנבים.

כעבור כשבועיים ג'ני אמרה לי באיזשהו הקשר שיותר כיף לה כשהחוג מתקיים בבית מאשר בחצר. מה שמוכיח, שוב, שילדים מעדיפים שגרה (ר' את ההערה של דימה בעמ' 45).

מפגש 10. מנח של קוביות בשני צבעים

שני, 14 במאי 1984. 16:00-17:00. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. שאלות מילוליות.

(1) אני נוסע לעבודה באוטובוס, ואז ברכבת הקלה, ואז ברכבת, ואז ברכבת התחתית. איך אני חוזר? דינה ענתה נכון, וג'ני וסוניה לפעמים קלעו ולפעמים לא, ולא היה ברור אם הן מתבלבלות או שהן לא פותרות נכון.

(2) איך נקרא אוסף של: הרבה פרות? (עדר); הרבה ציפורים? (להקה); הרבה פרחים? (זר); הרבה ספורטאים? (נבחרת); וכך הלאה באותו סגנון (הרבה חיילים, תלמידים, מטוסים, עצים...).

תרגיל 2. שבעה גפרורים.

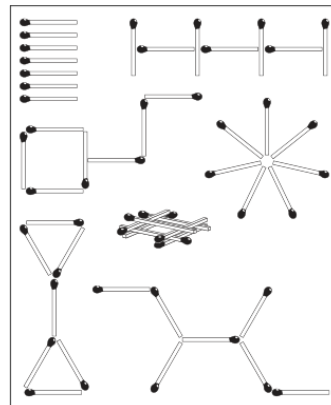
הנחתי על השולחן שבעה גפרורים והרכבתי מהם כל מיני צורות (איור 145). בכל פעם היה צריך לספור כמה גפרורים יש, ובכל פעם התברר שיש שבעה. דינה טענה שתמיד יהיו שבעה, אבל ספרה ברצון בכל פעם שהיה תורה. לקראת הסוף, כמו במפגש שלי בזמנו עם הבנים, בניתי מהגפרורים מבנה תלת-מימדי – "באר". היה תור ג'ני. כמו בפעם ההיא (עמ' 16), היה קשה לספור כמה גפרורים יש כי המבנה התפרק מכל נגיעה קלה. יכול להיות שבגלל זה יצא לה 6. סיכמתי: בכל הצורות היו שבעה גפרורים, ורק בבאר ששה. אף אחת לא התווכחה, אפילו דינה.

תרגיל 3. ניחוש החוקיות.

לא זוכר מה היה התרגיל.

תרגיל 4. מנח של קוביות (ר' עמ' 182).

הנחתי על השולחן כמה קוביות שחורות-לבנות: כל אחת הייתה מחולקת לשניים על ידי מישור שעבר באלכסונים של שתי פאות נגדיות.



איור 145. כל הצורות האלו מורכבות משבעה גפרורים.

היה צריך להניח את הקוביות בכל הדרכים האפשריות (יחסית לאותה מערכת צירים כמובן, ר' איור 146). היה נחמד אם היו לנו סטנדים קטנים שהיה אפשר להניח עליהם את הקוביות האלו, אבל לא היו, אז הנחנו אותן אחת ליד השניה. הבנות פתרו יפה סך הכל, רק לקראת הסוף הן קצת הסתבכו. גם כשהן לא הצליחו למצוא פתרון בעצמן, הן לא היו מוכנות לתת לי לנסות.

התגובה של ג'ני לתרגיל הזה העציבה אותי. היא השקיעה במגננות פסיכולוגיות יותר מאשר בפתרון התרגיל: מההתחלה היא הכריזה שיקח לה זמן, "כי היא קטנה והיא לא יכולה מהר"; אחר כך המשך המון זמן היא הבהירה ופירטה את הנקודה הזו, ואי אפשר היה להזיז אותה מעמדת עורכת הדין לעמדת המתמטיקאית. אחר כך היא כיווצה גבות בתיאטרליות, עשתה לי עיניים בנסיון לגרום לי לחייך, ודגמנה חשיבה מאומצת בכל מיני דרכים, וכל זה בלי להסתכל על הקוביות אפילו, אלא רק עלי ולצדדים.

אני לא יודע מה לעשות עם זה. זו גישה שמעוררת בי אנטגוניזם, אבל כמובן שזה לא עוזר. כשמנסים להעיר לה היא מתפרצת, וברגע שהיא נכנסת לזה היא כבר שוכחת מהתרגיל.

מפגש 11. ציוני 5

שבת, 26 במאי 1984. 11:00-11:50. ג'ני, סוניה ודינה.

המפגש הזה היה האחרון לשנת הלימודים הזו, ולכן הוא בנוי בצורה שונה מהאחרים.

גיאומטריה לקטנטנים.

הקראתי לבנות את הפרק הראשון מ"גיאומטריה לקטנטנים", מאת ז'יטומירסקי ושברין.

ציוני 5.

הספר דיבר על קווים (ישרים, עקומים וכו').

— עכשיו גם אנחנו נצייר קו, — אמרתי.

נתתי לכל אחת דף שהיו עליו 10 נקודות ממוספרות, והיה צריך לחבר אותן לפי סדר המספרים, מ-0

עד 9. סוניה ודינה פתרו מהר ובקלות, וג'ני קצת התקשתה, בעיקר כי חששה לטעות. כמובן שה-0 התגלה אחרון. כולן צחקו.

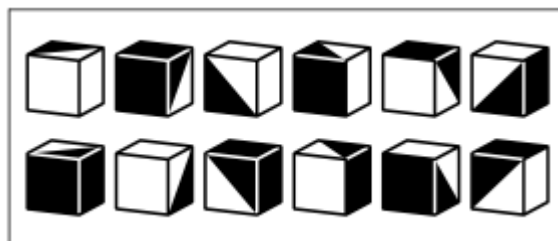
כשהן סיימו הן גילו שעל כל דף כתובה בגדול הספרה 5. הודעתי להן חגיגית ששלושתן מקבלות ציון

שנתי 5 במתמטיקה.

עוגיות 5.

אלה אפתה שש עוגיות בצורת 5 — שלוש קטנות ושלוש גדולות. כל ילדה קיבלה שתיים. לא זוכר של

מי היה הרעיון, אבל הבנות החליטו לאכול את העוגיות הקטנות במקום, ואת הגדולות לקחת הביתה ולהתחלק עם כל המשפחה. בזה המפגש והשנה הסתיימו.



איור 146. המשימה: להניח את הקוביות הללו בכל המנחים האפשריים. יש 12 אפשרויות.

10 החוג של הבנות – השנה השניה

מפגש 12. משהו לא עובד עם תורת ההסתברות

חמישי, 25 באוקטובר 1984. 10:00-11:10. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. הוצאת צורות משקית אטומה.

הכנסתי לשקית אטומה 9 צורות מהאוסף של דיינש: שלושה עיגולים, שלושה ריבועים ושלושה משולשים. ביקשתי מהבנות להוציא את הצורה שאגיד על סמך חוש המישוש, בלי להסתכל. בסוף התרגיל לכל אחת הייתה צורה אחת מכל סוג. המשימה הייתה קלה להן והן עבדו יפה.

תרגיל 2. הכלת קבוצות.

הנחתי על השולחן ארבע צורות מהאוסף (כולן גדולות, איור 147), ושאלתי כמה שאלות כמו: מה יש יותר – צורות גדולות או ריבועים? או: ריבועים או צורות אדומות? מדי פעם שילבתי גם שאלות קלות יותר: כמה ריבועים יש? כמה צורות גדולות? כמה אדומות?

כולן ענו נכון על השאלות הקלות. להפתעתי, כולן חוץ מג'ני ענו נכון גם על השאלות הקשות יותר, שהתייחסו לקבוצות שהחיתוך ביניהן לא ריק. רק ג'ני ענתה כמו שפסיכולוגים היו מצפים מבת גילה:

– מה יש יותר – ריבועים או צורות גדולות?

– כלום... יש אותו דבר.

– כמה ריבועים יש?

– שניים.

– וכמה צורות גדולות?

– ארבע.

– אז יש שני ריבועים, וארבע צורות גדולות, אבל אותה כמות של ריבועים ושל צורות גדולות?

– כן.

ואז סוניה התערבה:

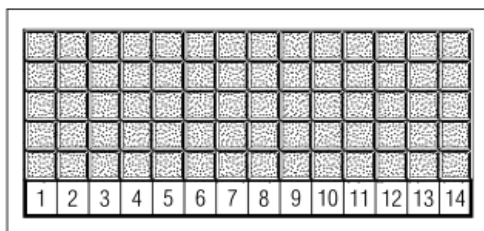
– היא עונה תשובות מצחיקות!

עברתי לשאלות קלאסיות יותר, כמו "מה יש יותר, חיות או ארנבים?". הפעם כולן ענו נכון, כולל ג'ני, ודינה וסוניה אפילו הסבירו.

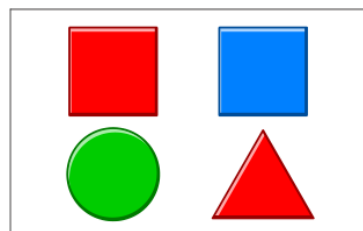
למרות זה, אני עדיין חושד שהן לא מבינות עד הסוף את הנושא של הכלת קבוצות. אנסה לבחון את זה מכיוון אחר.

תרגיל 3. משחק הסתברותי.

היינו ארבעה שחקנים (גם אני השתתפתי), כל אחד קיבל שלושה חיילי משחק. הנחנו אותם במשבצות התחתונות של לוח המשחק שבאיור 148.



איור 148. סופרים את סכום ההטלה של שתי קוביות, והחייל בעמודה המתאימה מתקדם משבצת אחת. שיחקתי במשחק הזה גם עם הבנים: לא ניתן לקבל את הסכומים 1, 13 ו-14, והסכום 7 הוא בעל הסיכוי הגבוה ביותר.



איור 147. ריבוע כחול, ריבוע אדום, משולש אדום ועיגול ירוק.

מהלך המשחק היה כזה: כל אחד הטיל בתורו שתי קוביות, חישבנו את סכום תוצאות ההטלה, והחייל שעמד בעמודה המתאימה (נניח, אם הסכום הוא 9, אז החייל שבעמודה 9) התקדם צעד אחד קדימה. מבחינת הבנות, מטרת המשחק הייתה "לנצח", כלומר להגיע לסוף העמודה ראשונה. (דיברתי איתן מראש על זה שבמשחק הזה הקוביות מחליטות, ולקוביות אין שכל, כך שאף אחת לא צריכה להיעלב אם היא מפסידה). היו לי כמה מטרות. ראשית, שהן ילמדו לסכום מספרים קטנים. שנית, שהן ילמדו איך כותבים את הספרות (התברר שסוניה וג'ני לא מכירות את הספרות מספיק טוב). שלישית, לפתח איזושהי "תחושת הסתברות אמפירית" (כלומר, שהן ישימו לב שחלק מהסכומים נפוצים יותר מאחרים, ושישתדלו למקם את חיילי המשחק שלהן בהתאם).

לצד, המטרה האחרונה ממש לא הושגה. ראשית, לג'ני לא היה מושג שצירוף הספרות "14", למשל, מסמן את המספר 14. והיה לה עוד פחות מושג שלא יכול להתקבל סכום כזה מתוצאות ההטלה של שתי קוביות. כמובן שהיה אפשר לשים לב שהסכום הזה לא מתקבל אף פעם, אבל למרבה הצער, גם הסכום 7 לא התקבל במשך המון זמן, למרות שתיאורטית הוא הכי סביר.

בכלל, לג'ני לא היה מזל במשחק הזה. שלושת החיילים של דינה כבר הגיעו לקו הסיום (הצעתי לה להחזיר אותם לקו ההתחלה כדי שהיא לא תשתעמם, והם כבר התקדמו מחדש כברת דרך), וג'ני בקושי זזה (וזה כשהיא לא חייל במספר 7!). ממש רצייתי שלפחות אחד מהחיילים של ג'ני יגיע לקו הסיום. לכן המשחק התארך מאד, סיימנו רק ב-10:11, ונראה לי שדינה איחרה לשיעור נגינה.

לגבי החיבור, היה משעשע לראות איך אותו צירוף מתקבל עשרות פעמים (למשל, 4 ו-5), ואיך בכל פעם הן סופרות מחדש את הנקודות: אחת, שתיים, שלוש... תשע. מדי פעם ציינתי באדישות:

– זוכרת שכבר יצא לך פעם 4 ו-5? נראה לי שגם בפעם ההיא הסכום היה 9.

אבל אף אחת לא קלטה את הרמז. אגב, זה לא אומר שהן לא היו מצליחות לנחש את הסכום אם הייתי שואל במפורש. אבל "לנחש" ו"לחשב" הם שני דברים שונים לגמרי. מבחינתן, כשמחשבים, מצביעים על כל אובייקט וסופרים: אחת, שתיים, שלוש... וגם אם יודעים מראש כמה יצא, זה לא קשור; הרי ביקשו במפורש "לחשב".

מפגש 13. עוד על חיתוך קבוצות

חמישי, 15 בנובמבר 1984. 10:10-11:00. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. הוצאת צורות משקית אטומה.

תרגיל דומה לזה שהיה במפגש הקודם, רק שהפעם שפכתי לשקית את כל אוסף הצורות של דיינש, והבנות היו צריכות לקחת צורה אקראית ולהגיד, לפני שהן מוציאות אותה, באיזו צורה מדובר (למשל, "משולש גדול עם חור", "עיגול קטן בלי חור", וכו'). הן עשו את זה בקלות, רק משום מה שכחו לציין בכל פעם את הגודל של הצורה (ואמרו רק כששאלתי). כנראה שהגודל נתפס כפרמטר יותר "ויזואלי", יותר מיועד לעיניים (כמו צבע) ופחות לאצבעות.

הכנסתי גם כמה כוכבים (שלא שייכים לאוסף של דיינש), בשביל העניין. היה מצחיק לראות את התגובה שלהן כשדינה שלפה כוכב בפעם הראשונה. סוניה התלהבה והתחילה לחפש את הכוכבים ולהוציא רק אותם.

תרגיל 2. החזרת הצורות לקופסה: חיתוך קבוצות.

המצאתי את התרגיל הזה על הדרך, אבל אני גאה בו. הבנות תמיד רבות כשהן מחזירות את הצורות למקום. הפעם חשבתי שבמקום לגעור בהן ולנסות להרגיע אותן, אנסה להפוך את השלב הזה לתרגיל. תוכן התרגיל עצמו היה די מתבקש.

הודעתי להן שנשים את הצורות בקופסה לפי התור, צורה אחת בכל פעם. ג'ני צריכה להכניס רק צורות קטנות, סוניה רק עיגולים, ודינה רק צורות עם חור. (גם הצורות הקטנות וגם אלו עם החור הן חצי מכלל הצורות, והעיגולים הם רק שליש. לכן כשהם נגמרו אמרתי לסוניה שתעבור למשולשים). בהתחלה הכל הלך טוב: ג'ני שמה בקופסה צורות קטנות, אבל רק את אלו שאין בהן חור והן לא עיגולים, כדי לא

“לפלוש לטריטוריה” של הבנות האחרות; סוניה שמה רק עיגולים גדולים בלי חור, ודינה עיגולים גדולים עם חור. אחרי ארבעה סבבים צץ המכשול הראשון: סוניה אמרה שאין לה מה לשים יותר.

– מה, נגמרו כל העיגולים? – שאלתי.

– כן.

– בואי נחפש.

סוניה עוברת באצבעה על הצורות ו”מחפשת עיגול”.

– אין?

– אין.

– רגע, זה לא עיגול? – אני מצביע על עיגול קטן עם חור.

– זה של ג’ני... – עונה סוניה אחרי שתיקה קצרה.

– אבל זה עיגול, לא?

– כן.

– את יכולה לשים בקופסה איזה עיגול שתרצי, גם עיגולים קטנים וגם גדולים.

– ומה איתי? אני מכניסה את הצורות הקטנות! – מתקוממת ג’ני.

– אז מה? – אני עונה, – הרי זה עיגול!

– יש בו חור! – מתערבת דינה.

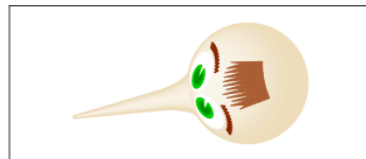
אבל סוניה כבר הבינה שאני מרשה לה להכניס את העיגול הזה, ולכן הרשתה לעצמה להתעלם מהמחאות של דינה וג’ני. הסבב ממשיך, וגם הויכוחים. ג’ני קולטת פתאום (ואפילו אומרת בקול) שיש לה זכות להכניס כל צורה קטנה שהיא, לא משנה מה צורתה, צבעה, והאם יש בה חור. אבל היא מסרבת להכיר בכך שגם לאחרות יש זכות דומה: אם מישהי לוקחת צורה קטנה, היא מיד מוחה. בסוף היא משלימה עם זה, אבל לא כי המחאה לא מוצדקת בעיניה, אלא כי היא לא מועילה. קצת אחריה גם סוניה ודינה מבינות שהזכות שלהן על הצורות יותר נרחבת ממה שהן חשבו בהתחלה, אבל הויכוחים נמשכים כמעט עד סוף המיון (אם כי בתדירות הולכת ופוחתת).

בסוף נשארו בחוץ רק ארבעת הריבועים הגדולים בלי החור. ביקשתי מהבנות להסביר למה אלו הצורות שנשארו. כמובן שהן לא נתנו הסבר ברור, אבל כן אמרו משהו בכיוון. אמרתי להן שנכון וכל הכבוד, ואז עשיתי כאילו אני חוזר על ההסבר שלהן, אבל למעשה ניסחתי אותו יותר במדויק. אחר כך הרשיתי לכל אחת מהן להחזיר לקופסה ריבוע אחד, ואת הריבוע האחרון החזירה אחותה הקטנה של דינה, שישבה לידנו.

תרגיל 3. תכנית אדריכלית של חדר.

ציירתי על דף את הצורה של הסלון, פחות או יותר, במבט מלמעלה. אחר כך ציירתי בו את הספה, הפסנתר והשידה, ועל כל דבר שאלתי את הבנות מה הוא. עברנו גם בכיוון ההפוך: שאלתי אותן איפה צריך לצייר את השולחן, וביקשתי מהן לסמן מסביב לשולחן איפה כל אחד מאיתנו יושב. ואז הצעתי להן להוסיף בעצמן את הספרייה והפטיפון (כמובן שהן ציירו לא בדיוק את איך שהדברים נראים במבט מלמעלה: ג’ני פשוט ציירה את החפץ כמו שהיא רואה אותו, וסוניה ציירה את החפץ במבט מלמעלה ומקדימה בו זמנית, כמו שהיו מציירים במצרים העתיקה). אחר כך ציירתי את הראש של פינוקיו (איור 149: קל לראות לאיזה כיוון הוא פונה) ושאלתי מה יש מלפניו, מאחוריו, מימינו ומשמאלו (דינה אמרה שמאחוריו יש כובע). סך הכל הן ענו יפה על כל השאלות.

איור 149. פינוקיו. אפשר לצייר אותו על פתק, להניח במיקומים שונים בתכנית האדריכלית ולשאל מה יש מלפניו, מה מאחוריו, מה מימינו ומה משמאלו.



גיאומטריה לקטנטנים.

החלטתי שנקרא ביחד את כל הספר הזה. התחלתי אותו מההתחלה למרות שכבר קראנו באיב את הפרק הראשון, כדי שיהיה להן רצף. כמו בפעם הקודמת, ב-26 במאי, כולן ציירו נקודות, קווים ישרים ועקומים וכו', רק שהפעם גם ג'ני הצליחה. קראנו את הפרק הראשון.

* * *

במהלך ארוחת הצהריים ג'ני אמרה:

— כל הזמן נדמה שעוד שנה דימה ישיג את פיטר. אבל כשעוברת שנה אז גם פיטר גדל, ותמיד נשאר גדול מדימה. אבל דימה, אל תהיה עצוב: לפיטר נשאר ממש מעט זמן לחיות, ולך הרבה יותר! שני חוקי שימור במכה אחת.

מפגש 14. מגדלי האנוי

חמישי, 22 בנובמבר 1984. 10:10-10:50. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. מגדלי האנוי.

הראיתי לבנות את המשחק והסברתי להן את החוקים. אחר כך נתתי לכל אחת מגדלי האנוי מקרטון מעשה ידי, והצעתי להן לשחק. ג'ני סירבה, "כי אני לא אצליח". שכנעתי אותה, ובסוף היא סיימה ראשונה. בהתחלה היא קצת נתקעה, ורמזתי לה איך להתקדם, אבל אחר כך זה זרם לה. אחרי איזה זמן שמת לי לב פתאום שאני ממוקד רק בג'ני, ובינתיים סוניה התקדמה ואיך לי מושג אם היא משחקת לפי החוקים. התחלתי לשים עין. היא הפרה את החוקים פה ושם, בעיקר כששיחקה בשתי הידיים והעבירה שתי לוחיות בו זמנית. אחרי שהתערבתי היא נתקעה, ורמזתי גם לה, כמו לג'ני, איך אפשר להתקדם. אחרי זה גם היא הצליחה. דינה הייתה אחרונה. אני חושב שהיא דווקא עבדה לפי החוקים, ולכן קצת פיגרה אחרי סוניה וג'ני. אבל זו רק השערה. כמעט לא עזרתי לה; גליה ניסתה לגרום לה להתקדם מהר יותר, אבל יותר בעזרת הערות מאשר רמזים (היו הרבה פעמים שדינה הסתכלה איך האחרות פותרות במקום להתרכז במשימה). ג'ני וסוניה לא פספסו את ההזדמנות לציין שדינה הייתה אחרונה, וג'ני גם הדגישה שהיא עצמה הייתה ראשונה. אמרתי להן עוד לפני שהתחלנו שזו לא תחרות אלא פשוט משחק, והדגשתי את זה שוב. ואז נתתי כמה רמזים לדינה.

דינה עבדה עוד די הרבה זמן, וג'ני וסוניה בינתיים השתעממו והתחילו להשתטות. עוד כשרק ג'ני סיימה הצעתי לה לשחק שוב, אבל היא סירבה, אמרה שזה משעמם אותה.

תרגיל 2. החזרת הלוחיות של דיינש לקופסה.

החזרנו שוב את אוסף הלוחיות של דיינש לקופסה (כמובן ששיניתי את הכללים לגבי מה כל אחת מכניסה). הפעם הבנות הראו הבנה טובה יותר של המשימה, והיו פחות מריבות.

גיאומטריה לקטנטנים.

התקדמנו בספר. במהלך הקריאה הן דרשו לצייר קווים כמו בפעם הקודמת, אבל הפעם לא היו בספר משימות כאלו. לא הצלחתי לגרום להן להפסיק לנדנד: עד שהייתי מצליח לסכם משהו עם אחת מהן, השניה הייתה קופצת; בכל פעם שהייתי מתחיל לקרוא משהי הייתה קוטעת אותי ומבקשת את הטושים. בסוף התעצבנתי ואמרתי להן שהן לא מתנהגות יפה ואני מפסיק את הקריאה, ובזה סיימנו את המפגש.

מפגש 15. מגדלים בגובה זהה

חמישי, 6 בדצמבר 1984. 10:00-11:00. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. שוב מגדלי האנוי.

הפעם הן היו זקוקות להרבה פחות רמזים. סוניה סיימה ראשונה, ג'ני שניה, ודינה שלישית. סוניה ביקשה וקיבלה את אחד ממגדלי הקרטון במתנה (למרות שאני בספק אם היא תשחק בו בבית).

תרגיל 2. מגדלים באותו גובה.

כבר נתתי פעם לבנות את התרגיל הזה: בונים מגדל קוביות על משטח מוגבה; צריך לבנות מגדל באותו גובה על משטח נמוך יותר (איור 150). הרעיון הוא שהילדים ככל הנראה יבנו מגדל לא באותו גובה אלא שמגיע לאותו גובה, ואז ננסה להציב בפניהם כל מיני סתירות.

זה בעצם מה שקרה, רק שבפעם הקודמת שנתתי לבנות את התרגיל הזה היינו בחצר, והמגדלים התפרקו ברוח. הפעם החלטתי לבנות את המגדל הראשון בגובה הנמוך יותר (על שרפרף), והבנות היו אמורות לבנות מגדל באותו גובה על השולחן (איור 151). כך הן בעצם לא יכולות לבנות את המגדל כך שיגיע לאותו גובה.

לא יצא מזה כלום. זה התחיל דווקא לא רע: הבנות בנו מגדל שני על השרפרף ואז העבירו אותו לשולחן. שאלתי:

– המגדלים זהים?

– כן.

– ואיזה יותר גבוה?

– זה.

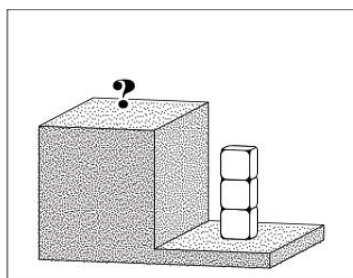
– מה זאת אומרת? ביקשתי שתבנו מגדל באותו גובה, אז למה הוא יותר גבוה?

– כי הוא על השולחן.

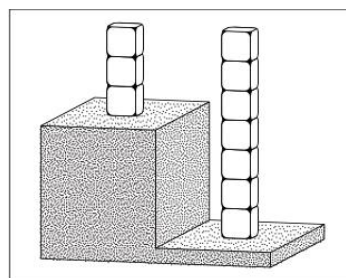
דינה התחילה לבנות מגדל מקוביות מאותו סוג ובאותו סדר כמו במגדל שעל השרפרף. אבל היא התבלבלה ושמה כמה פעמים קוביות מהסוג הלא נכון. ואז צץ לי רעיון – לבדוק טרנזיטיביות: לבנות שני מגדלים שזהים לראשון אבל שיהיו שונים אחד מהשני. בשביל זה היה צריך לבנות לפחות אחד מהמגדלים מקוביות בגודל שונה.

[אני כמו הצ'וקצ'י מהבדיחה⁴³: לא קורא אלא כותב. לו הייתי קורא לפחות את היומן של עצמי מדי פעם!]

כנראה שהייתה לי עוד איזו מחשבה צדדית עמומה, כי אמרתי לַבְנוֹת לַבְנוֹת את שני המגדלים על הפסנתר. יכול להיות שהתכוונתי שהן ינסו להשוות גבהים, כי הפסנתר קצת יותר גבוה מהשולחן. בסוף לא ניסחתי את המשימה בצורה מספיק ברורה, וחוץ מזה, הפסנתר (החלק שמכסה את הקלידים) לא היה לגמרי אופקי, וגם הקוביות שהבאתי לא התאימו למשימה הזו: אפילו אני לא הצלחתי לבנות מהן מגדל שלא מתפרק. בכל פעם הקוביות היו מתפרקות לחצאים בצורת משולש, מה שנורא הצחיק את הבנות, ואז הן היו זוחלות בסלון, מחפשות ואוספות את כל החלקים, והיינו מתחילים מחדש. בסוף פשוט קטעתי את התרגיל בלי שהגענו לאף נקודה.



איור 151. צריך לבנות על השולחן מגדל בגובה של המגדל שעל השרפרף. הפעם אי אפשר לבנות מגדל שיגיע לאותו גובה.



איור 150. כבר פגשנו את התרגיל הזה (ר' איור 143 בעמ' 185).

⁴³ בדיחה מוכרת עד כדי כך שהפכה למטבע לשון ברוסית: צ'וקצ'י אחד שולח להוצאה לאור רומן שהוא כתב. אחרי שהם קוראים את כתב היד, הם חוזרים אליו ואומרים לו: "שמע, זה קצת חלש... אתה קורא ספרות קלאסית? נניח ספרים של דוסטויבסקי, טולסטוי, טורגנייב?". "האמת היא שלא", עונה הצ'וקצ'י, "אני כותב, קריאה זה פחות התחום שלי". – ר.פ.

ספירוגרף.

הראיתי לבנות ספירוגרף (ר' איור 95 בעמ' 111). אני וגליה ציירנו להן במקביל כמה ספירלות. לצערי, לספירוגרף יש חסרון משמעותי אחד: ילדים לא יכולים לעבוד איתו בכוחות עצמם. אפילו כשהבנות ניסו לצייר משהו עם עזרתי הן לא הצליחו – לפעמים הגלגל הגדול ברח להן, לפעמים הקטן קפץ. אחרי המפגש שלנו דימה ניסה לשחק בספירוגרף, אבל גם הוא לא הצליח.

גיאומטריה לקטנטנים.

התקדמנו עוד בספר.

מפגש 16. סיבוב ב-90°

חמישי, 20 בדצמבר 1984. 10:10-10:50. ג'ני וסוניה.

התכוננתי למפגש הזה ברמה סבירה, חשבתי על הכל מראש והכנתי הרבה תרגילים, אבל עשר דקות לפני שהוא התחיל גליה התקשרה ואמרה שדינה חולה ולא תגיע היום. נאלצתי להמציא הכל מחדש תוך כדי תנועה. מבין שלוש הבנות, דינה הכי טובה במתמטיקה, כך שבכל מקרה היא לא הייתה צוברת פיגור משמעותי, אבל לא חשבתי על זה בזמן אמת. בין השאר, לא תכננתי להתעסק יותר במגדלי האנוי, אבל שילבתי אותם במפגש בכל זאת, בהיעדר רעיונות אחרים.

תרגיל 1. מגדלי האנוי.

סוניה שוב סיימה ראשונה ואפילו הספיקה לשחק פעמיים. זה חיזק עוד יותר את הרצון שלה לקחת את המשחק הביתה (מה שהיא תכננה לעשות פעם קודמת, אבל שכחה). הפעם קטיה באמת לקחה אותו.

תרגיל 2. סיבוב ב-90° בפסיפס.

הרכבתי צורות שונות על לוח הפסיפס, והבנות היו צריכות להרכיב את אותן צורות כשהן מסובכות ב-90° ("שוכבות על הצד"). בהתחלה הדגמתי להן בעצמי איך עושים את זה. ג'ני לא הבינה כלום; אחר כך התחילה להתמצא יותר ויותר בהדרגה, עד שלקראת הסוף עבדה כמעט עצמאית. בסוף נתתי לה תרגיל די קשה, של צורה עם זוויות של 45° ו-135°, ואותו היא לא הצליחה לפתור.

סוניה עבדה בסדר, בלי קשיים מיוחדים, אבל גם לא נתתי לה תרגילים קשים במיוחד. מעניין שגם אני וגם ג'ני תמיד סובבנו 90° בכיוון השעון, וסוניה תמיד סובבה נגד כיוון השעון. יכול להיות שזה קשור לזה שהיא שמאלית?

גיאומטריה לקטנטנים.

קראנו עוד כמה עמודים.

מפגש 17. פתיתי שלג

חמישי, 27 בדצמבר 1984. 10:00-11:10. ג'ני ודינה.

הפעם סוניה לא הגיעה, אבל החלטתי להשאיר את המפגש כמתוכנן, כי התאמתי אותו לנובי גוד, שחל עוד כמה ימים.

פתיתי שלג.

כמעט כל המפגש היה מוקדש לפתיתי שלג. בהתחלה התכוננתי בפתית שלג גדול מפלסטיק ובדקנו בעזרת מראה אילו צירי סימטריה יש לו. אחר כך הראיתי לבנות תמונות של פתית שלג מהספר "סימטריה" מאת ווייל, וגם את הכריכה של הספר "על פתיתי שלג משובשים" מאת קפלר (בספר עצמו אין תמונות, לצערי). אחר כך הנחתי במרכז לוח הפסיפס אבן כחולה ("מרכז") והסברתי להן על סימטריה ביחס למרכז. הן די התקשו, אבל בסוף הרכבנו משהו דומה לפתית שלג (לא משובש, כמובן). אחר כך הרכבנו פתית שלג משובש על לוח הפסיפס העגול. הוא יצא הרבה יותר מוצלח, אפילו השארנו אותו כדי להראות בערב לאלה.

אחר כך גזרנו פתיתי שלג מנייר.
אני זוכר שכילד הייתי מתמוגג מהפלא הזה. לוקחים דף נייר, מקפלים כמה פעמים, גוזרים בפיתולים אקראיים – כמה שיותר מפותלים, יותר טוב – ואז פותחים את הדף ומגלים עיטור סימטרי יפהפה. אחר כך היינו מדביקים את פתיתי השלג על החלון והם היו תלויים שם כל הנובי גוד ועוד הרבה אחריו. התגובה של דינה הזכירה מאד את זו שאני זוכר מעצמי. ג'ני בקושי הסתכלה לכיוון פתיתי השלג, מה שעניין אותה היה גזרי הנייר:
– יו, אבא, תראה, רגליים עם ברכיים! והנה ראש ושתי ידיים! והנה אגרוף! וזה איש רוקד – הנה הרגל שלו, והיד פה, על הראש...
הדגמתי להן את כל שלבי הגזירה בפירוט: קיבלתי דף לשניים, ואז לארבע וכו' – והראיתי להן איך בכל קיפול העיטור הוכפל, רובע, וכן הלאה. גם דימה השתתף.
גיאומטריה לקטנטנים.
לבקשת דינה, קראנו שוב את העמודים שהיא פספסה במפגש הקודם.

מפגש 18. פאות, קודקודים וצלעות של קוביה

חמישי, 11 באפריל 1985. 11:00-12:00. ג'ני, סוניה ודינה.

חלפו שלושה וחצי חודשים מאז המפגש הקודם. היו המון מחלות החורף: דינה וסוניה היו חולות בשעלת, אני וג'ני בשפעת, ולקח לגרון שלי המון זמן לחזור לעצמו. ובהזדמנויות הנדירות שהיה אפשר להפגש, גיליתי שאני "לא בכורשר". במהלך ההפסקה הזו לא למדתי עם ג'ני בכלל, למעט פעם אחת ספונטנית. דימה פתר כל מיני חידות מהספר "מתמטיקה בכיף" מאת ב. קורדמסקי, ובין השאר את החידה הבאה:
שני ילדים שטים בסירה ופוגשים שני דייגים שמבקשים טרמפ לגדת הנהר השניה, אבל בסירה יש מקום רק לשני ילדים או למבוגר אחד. איך הדייגים יכולים לחצות את הנהר, ועם זאת להשאיר את הסירה לילדים?

(בגרסה אחרת של החידה הזו צריך להעביר לגדה השניה לא שני דייגים אלא פלוגת חיילים).
למרבה ההפתעה, דימה לא פתר את החידה הזו נכון, למרות שהוא כבר הכיר את החידה עם הזאב, הכבשה והכרוב (אתיחס גם אליה בהמשך, בעמ' 196 ואילך) – אחד הדייגים שלו חצה את הנהר בשחיה. הוא לא היה בטוח שהפתרון הזה חוקי, ושאל לדעתי בארוחת הצהריים. ניהלנו דיון ארוך על המשמעות של להשאיר במסגרת שהחידה מגדירה (במהלך הדיון הוא פתר את החידה, כמובן). כשג'ני שמעה את השיחה בינינו היא ביקשה לתת גם לה שני ילדים ושני דייגים. נתנו לה שני גפרורים שלמים, שני חצאי גפרור, ועוד משהו מאולתר שישמש כסירה, והיא התחילה לנסות לפתור את החידה. אני חושב שהחידה הזו קשה יותר מהחידה עם הזאב, הכבשה והכרוב, כי צריך להפעיל בה פעמיים פעולה לא טריוויאלית (שני הילדים שטים לגדה השניה ואחד מהם חוזר). בהתחלה ג'ני הפעילה את הפעולה הזו פעם אחת ונתקעה. דימה נתן לה רמז (לא הספקתי לעצור אותו) והפתרון הושלם. אם כי, כצפוי, היא לא הצליחה לשחזר אחר כך את השלב שבו הוא נתן לה רמז: היא רצתה להראות לאלה את הפתרון שלה, אבל שוב נתקעה באמצע. הפעם עצרתי את דימה מלגלות לה, היא חשבה עוד קצת והגיעה לפתרון לבד. אני חייב להודות שהיא הפתיעה אותי. כבר התרגלתי שבמתמטיקה היא רחוקה מההישגים שהיו לדימה כשהיה בגילה, ופה היא הקדימה אותו: דימה לא הצליח לפתור את החידה עם הזאב, הכבשה והכרוב בגיל חמש (זה היה בקיץ, כשהיינו בחופשה; ציינו על האדמה נהר והעברנו בו חפצים הלוך ושוב, אבל זה לא עזר לו). הסיפור הזה קרה לפני בערך חודש. היום רציתי לחוד לבנות את החידה עם הזאב, הכבשה והכרוב, אבל לא הספקתי.

תרגיל 1. פאות, קודקודים וצלעות של קוביה.

נתתי לכל אחת מהבנות קוביה וביקשתי מהן לספור קודם את הפאות, אחר כך את הקודקודים, ואז את הצלעות. כולן פתרו נכון, חוץ מג'ני שספרה שמונה צלעות: היא ספרה את העליונות ואת הצידיות,

וכשעמדה לעבור לתחתונות סוניה צעקה "שתים עשרה!!!", ואז הסתכלתי עליה, ואז ראיתי שדינה לא סופרת אלא מסתכלת על ג'ני, ואז אמרתי לדינה שתספור, והיא ענתה לי שכבר סיימה – בקיצור, ג'ני הוסחה ושכחה לסיים את הספירה.

כשספרנו את הקודקודים ג'ני אמרה:

– שמונה. הרי ארבע ועוד ארבע זה שמונה, אז אפשר לדעת גם בלי לספור. היא ממש מתקדמת.

תרגיל 2. $\binom{5}{2}$ – שרשרת בשני צבעים.

נתתי לכל אחת מהבנות דף שמצוירות עליו 12 שרשראות זהות, כל אחת מחמישה עיגולים (איור 152). היה צריך לצבוע שני חרוזים בכחול בכל הדרכים האפשריות, בלי חזרות. להפתעתי, ג'ני פתרה את התרגיל הכי טוב. בכלל היא עשתה איזו קפיצה.

סוניה הייתה לא במיטבה היום, אולי קצת עצבנית. היא עבדה מהר מדי, בחוסר סדר, וחזרה על אותם פתרונות לעתים גם 6 פעמים. כשגילינו את זה (עברנו בסוף על כל הפתרונות) היא אמרה שהיא לא ידעה שאסור. נתתי לה עוד דף והיא ציירה בו רק פתרון חדש אחד (שהיא העתיקה מג'ני), וכל השאר שוב חזרו על עצמם. היא צבעה מהר, בלי לחשוב, בלי להסתכל רגע על פתרונות קודמים. בסך הכל בשני הדפים יחד היו לה ששה פתרונות.

יחסית לסוניה, דינה חשבה הרבה, אבל גם היססה מאד. היא מצאה שלושה פתרונות בקושי רב, ואז רצתה לוותר, אבל אמרתי לה שג'ני עדיין עובדת אז שגם היא תמשיך. ואז דינה הסתכלה על ג'ני, אמרה "אה!", וציירה שרשרת רביעית (וג'ני, קלפטע שכמותה, צעקה "דינה, די! אל תציצי!" – והסתירה את הדף שלה עם המרפק). אחרי הפתרון הרביעי דינה כמעט ויתרה שוב, אבל אז היא מצאה פתאום עוד כמה פתרונות (הפעם בעצמה). בסופו של דבר היו לה ששה פתרונות, כמו לסוניה, אבל עם חזרה אחת בלבד. מבחינת התוצאות נטו, ג'ני לא הצליחה משמעותית יותר מהאחרות: היו לה שבעה פתרונות (וחזרה אחת). מה שהיה שונה הוא בעיקר אופי העבודה. היא עבדה באותה תשומת לב כמו דינה, ובאותו בטחון כמו סוניה. במילים אחרות, אלמלא הנדנודים והרמזים שלי, ואם כל אחת הייתה עובדת בנפרד, לדינה היו שלושה פתרונות בלי חזרות, לסוניה 5 פתרונות ו-7 חזרות, ולג'ני – 7 פתרונות וחזרה אחת. וג'ני המשיכה לחפש – נאלצתי לקטוע אותה כי סוניה ודינה לא עשו כלום והתחילו להשתובב. אחרי שסיכמנו את התוצאות ג'ני אמרה:

– וואו, יש לי יותר מכולם!

אבל דינה ייבשה אותה:

– אל תשוויצי, זה לא יפה.

ג'ני לא ענתה לה (גם זה לא הכי אופייני לה).

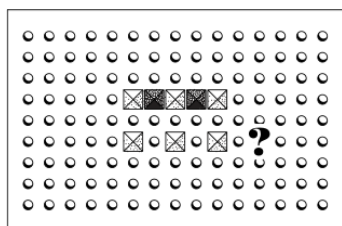
בסוף, כמו שהזכרתי, עברנו על הפתרונות של כולן וחיפשנו חזרות. בזה כולן הצליחו במידה דומה, מה שמראה שוב שבכל מה שקשור לכישורים, כולן היו מסוגלות לפתור את התרגיל, ואם משהו היה חסר להן, אלה היו ריכוז, בטחון ויצירתיות.

תרגיל 3. $\binom{5}{2}$ בפסיפס.

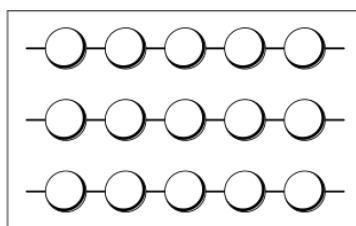
את התרגיל הזה כבר עשינו לפני קצת יותר משנה, במפגש הרביעי.

בהתחלה שאלתי את הבנות אם הן זוכרות שפעם פתרנו תרגיל דומה לזה שהן פתרו עכשיו. סוניה אמרה שהיא זוכרת שציירנו איקסים. אני לא יודע למה היא התכוונה, אבל כנראה שהתרגילים נראו לה דומים כי בשניהם ציירנו. דינה וג'ני לא זכרו שום דבר דומה. הבאתי את הפסיפס ואמרתי להן להרכיב "שרשרת" מחמש אבנים – שתיים כחולות ושלוש לבנות. ואז כולן נזכרו שאכן היה תרגיל כזה.

התחלנו להרכיב שרשראות כאלו, כל אחת בתורה. סוניה לא הייתה איתנו: היא לא הצליחה למצוא פתרון שני (!) אחרי שדינה הרכיבה את הראשון. בהתחלה היא הניחה שלוש אבנים לבנות באותם מיקומים שהן היו בפתרון של דינה (איור 153), ואז חשבה במשך הרבה זמן.



איור 153. הצבה כזו של האבנים הלבנות לא מאפשרת למצוא פתרון חדש.



איור 152. אחת הגרסאות של החידה המפורסמת בפרק 4.

למעשה, לא ממש היה על מה לחשוב, כי לא נשאר יותר מדי אפשרויות למיקום האבנים הכחולות, כך שהפתרון היחיד שיכול היה להתקבל הוא זה של דינה. הצעתי לה לשנות את המיקום של האבנים הלבנות. היא לקחה את שלושתן, חשבה קצת והניחה אותן מחדש באותם מקומות. התחלתי להסביר לה משהו, אבל היא התנהגה כאילו היא תחת היפנוזה: היא שוב לקחה את שלוש האבנים ושוב שמה אותן באותם מקומות. לקחתי את הסיכון שהיא תיעלב והעברתי את התור לג'ני. ג'ני הרכיבה ברגע פתרון חדש, וסוניה, כשראתה אותו, התעוררה פתאום ואמרה:

— אה, עכשיו אני גם יכולה!

ואכן היא מצאה פתרון שלישי בקלות, ואז את החמישי, ורק בפתרון השמיני היא נתקעה ונעזרנו שוב בג'ני. לכל שרשרת שהרכבנו, חיפשנו אותה בדפים של הבנות (כלומר, הן חיפשו, אני בדקתי). אם פתרון כבר הופיע בדפים סימנו אותו ב"++", ואם לא – ציירנו אותו. הפתרון העשירי נפל על תורה של דינה. לקח לה המון זמן. בסוף עזרתי לה: שאלתי אם למישהי מהן יש בדפים פתרון שעוד לא מסומן ב"++". לג'ני היה פתרון כזה, והיא הרכיבה שרשרת תואמת על לוח הפסיפס. הסבתי את תשומת ליבן לזה שעכשיו גם על לוח הפסיפס וגם בדפים שלהן יש עשרה פתרונות בדיוק. הראיתי להן איך אני מחפש בשיטתיות את הפתרון ה-11, כשאני עובר על כל האפשרויות, ובכל פעם וידאנו שהפתרון הזה כבר הופיע. הסקנו שאין יותר פתרונות, ובזה סיימנו את המפגש. אגב, הייתה פעם אחת שגם ג'ני הפעילה חיפוש שיטתי, אם כי באופן חלקי: היא שמה אבן כחולה במיקום הראשון, ואז עברה על מיקומים אפשריים לאבן השניה, וכך מצאה פתרון חדש. באופן כללי, היא מאד שימחה אותי היום.

* * *

החוג השפיע על ג'ני באופן משעשע – ליתר דיוק, על העיסוק החביב עליה: לספר לעצמה סיפורים בקול. היא התיישבה לעשות את זה מיד אחרי החוג, אבל הפעם גיבורי הסיפור שלה היו מספרים, ובראשם חמש. בקול נרגש ועם סימני קריאה כל שתיים-שלוש מילים, היא סיפרה כך:

— הם תפסו את חמש ולקחו אותו לכלא! ארבע רץ להציל את חברו הטוב, ואחריו כל השלושים והשתיים, אבל כבר היה מאוחר מדי. (שתיקה טראגית). הם לקחו אותו לנצח! "איך נסדר בלי מנהיגנו הנערץ?" אמר... – כבר שכחתי מי אמר.

מפגש 19. הזאב, הכבשה והכרוב

חמישי, 18 באפריל 1985. 11:00-12:00. ג'ני, סוניה ודינה.

תרגיל 1. הזאב, הכבשה והכרוב.

להלן החידה כפי שמנוסחת בספר של קורדמסקי:

"גם זו חידה עתיקה; היא מופיעה עוד בכתבים מהמאה ה-8 לספירה, ונכתבה כסיפור: איכר אחד היה צריך להעביר בסירה זאב, כבשה וכרוב מגדה אחת של נהר לגדה השנייה. בסירה היה מקום לאיכר, ומקום נוסף אחד בלבד: לזאב, לכבשה או לכרוב. אבל אם האיכר ישאיר את הזאב עם הכבשה בלי השגחה, הזאב יטרף את הכבשה, ואם ישאיר את הכבשה עם הכרוב בלי השגחה, הכבשה תאכל את הכרוב. כיצד יכול האיכר להעביר את הזאב, הכבשה והכרוב לגדת הנהר השנייה?"

אני זוכר עוד מילדות את הציור שהופיע בספר לצד החידה הזו: איכר מזוקן עם נעלי קש עומד ליד סירה ומגרד בפדחתו, שלושת ה"חפצים" שלו לידו; הזאב חושף שיניים ומסתכל על הכבשה. היום חדתי את החידה הזו לבנות סוף סוף. וג'ני לא הצליחה לפתור אותה! אני לא מצליח להבין: ייתכן שהחידה הזו קשה יותר מהחידה עם שני הילדים ושני הדייגים? ואם כן, במה היא קשה יותר? ולמה בחוג של כיתה א' (בבית הספר של דימה) אף אחד לא פתר אותה, אפילו גלב הגאון? היו לנו זאב, כבשה, כרוב, איכר וסירה "אמיתיים" – כלומר לא חפצים שרירותיים שמחליפים אותם, אלא זאב צעצוע, כבשה צעצוע וכו'. הנהר היה חרויץ שבאמצע השולחן המתקפל. דינה התבוננה בצעצועים בתשומת לב, ואז אמרה "נדמה לי שאני יכולה..." – והראתה את הפתרון. אחר כך התסריט המוכר חזר על עצמו: גם ג'ני וגם סוניה לא הצליחו לשחזר את הפתרון שהרגע צפו בו. סוניה ניסתה ראשונה. בשלב שבו צריך להחזיר את הכבשה היא נתקעה ולא ידעה מה לעשות; דינה אמרה לה. אבל אחר כך ג'ני נתקעה באותה נקודה. הפעם ביקשתי מדינה שלא תגיד, והחידה נשארה לא פתורה. ביקשתי מדינה שתדגים שוב את הפתרון שלה, ואמרתי לג'ני שתקוב. ג'ני "הבינה הכל" (לדבריה), ניסתה שוב, נתקעה שוב באותו מקום, והצליחה רק בעזרת רמז מדינה. נראה שבחידות שבהן העיקר הוא הארגון הלוגי של החומר, אי אפשר באמת לזכור את הפתרון ברמה הטכנית, בלי להבין את הארגון הזה.

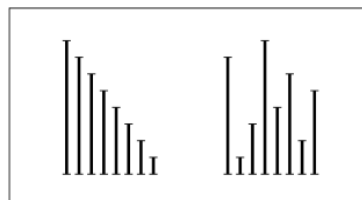
מה שמזכיר את אחד הניסויים המאוחרים יותר של פיאוזה בנוגע לזכרון. מראים לילד קטן שעוד לא יודע מה זה קבוצה סדורה (מוודאים בעזרת מבדקים מיוחדים שהוא אכן לא יודע) ציור עם מקטעים באורך עולה (איור 154 משמאל), ומבקשים ממנו לזכור מה מצויר.

– מקלות, – הוא עונה.

– תצייר את המקלות האלה.

בתגובה, הילד מצייר אוסף של קטעים מקבילים, כמו באיור 154 מימין. זה מה שהוא זוכר. חולפת חצי שנה, ושואלים את הילד אם הוא זוכר את התרגיל ההוא. מתברר שהוא זוכר. מבקשים ממנו לצייר את הציור שהראו לו – והוא מצייר את הקטעים נכון, כמו באיור משמאל, ואפילו מסביר שהם מסודרים לפי אורך. אחרי הניסוי הזה, מבנה הזכרון שלנו הוא כבר ממש בגדר תעלומה.

איור 154. משמאל: מקטעים מסודרים לפי אורך; מימין: האופן שבו ילד שעוד לא מבין את המושג של סדר "זוכר" ומשחזר את הציור. אחרי חצי שנה, אותו ילד משחזר את הציור כפי שהוא מופיע משמאל.



היה אפשר לשאול את ג'ני אחרי איזה זמן, נניח חצי שנה, האם היא זוכרת את הפתרון של החידה עם הזאב, הכבשה והכרוב. אם כי במקרה שלנו אי אפשר יהיה לדעת האם היא משחזרת את הפתרון או פותרת מחדש.

הייתה לי בעיה קבועה עם החידה הזו – תמיד הייתי שוכחת את הפתרון והייתי בחרדה שלא אצליח לפתור מחדש (זכרתי שהצלחתי בעבר, אבל זה לא נתן לי בטחון).

לא שכחתי את החידה עם הילדים והדייגים. בדיעבד אני חושבת שהכל תלוי במטרת גיבורי הסיפור. הדייגים רוצים לחצות את הנהר, וזה מה שהם עושים. הילדים עוזרים להם. הילדים לא ממהרים לשום מקום, הם פשוט שטים להם, ורוצים שהסירה תישאר אצלם בסוף. לא אכפת להם באיזה כיוון לשוט, ושום פעולה במהלך הפתרון לא סותרת את המטרה שלהם.

לעומת זאת, בפתרון החידה עם הזאב, הכבשה והכרוב יש מהלך אחד לא הגיוני מבחינה פסיכולוגית: האיש משיט בחזרה לגדה הראשונה את הכבשה שהוא כבר טרח להעביר לגדה השנייה. אני חושבת שזו הנקודה שבה נתקעתי בכל פעם. – ג'ני.

תרגיל 2. מנסרה משולשת.

בהמשך לתרגיל עם הקוביה, נתתי לבנות לספור כמה קודקודים, צלעות ופאות יש במנסרה משולשת. סוניה ודינה הצליחו, וג'ני – ככה ככה.

תרגיל 3. מצולעים.

ציינו כל מיני מצולעים וספרנו כמה צלעות וכמה קודקודים יש להם. אני לא זוכר איך בדיוק הלך התרגיל, אבל נדמה לי שבחלק מהמצולעים הכמות של הקודקודים והצלעות לא יצאה זהה. אני זוכר שהיה בלאגן.

תרגיל 4. שוב $\binom{5}{2}$.

המשפחה של דינה, בשונה מהמשפחות של כל שאר התלמידים שלי, עוסקת במתמטיקה, ולכן יש להם דעה על הסגנון של החוגים שלי. לפעמים נדמה לי שהם מרגישים סלידה מסוימת מהנוהג שלי לא להסביר איך פותרים תרגילים. כמו הרבה מתמטיקאים, הם חושבים שהמטרה העיקרית של המורה היא להסביר פתרונות באופן ברור ונגיש. זה הכיוון של רוב החידושים בתחום ההוראה: חיפוש אחר המחשות ויזואליות, מהלכים לוגיים, אלגוריות וכד'. למשל, איך מסבירים לסטודנט מה ההבדל בין אינטגרל רימן לאינטגרל לבג? אפשר לקחת ערימת מטבעות ולהדגים שתי דרכים לספור את סכומם: לסכום את כולם ברצף (לפי רימן), או כל ערך בנפרד (לפי לבג). אני חושד שהם רואים בהתעלמות שלי מהסברים יותר ביטוי של חוסר יכולת מאשר עמדה עקרונית. היו כמה פעמים שהם דיברו איתי על דרכים להסביר משהו לבנות, או סיפרו לי איך הם הסבירו משהו לדינה. אם כי פעם אלה אמרה לגליה משהו על זה שאני חושב שלא כדאי לדחוף לילדים הסברים בכח, והיא ענתה שכן, ברור, כולם יודעים שלא כדאי. אז לא יודע.

בין אם אני צודק ובין אם לא, במפגש הזה דינה הציגה לי בגאווה מחברת מלאה כמעט עד האמצע ב"שרשראות" וחישובים. ראשית, הופיעו שם כל האפשרויות לבחור תת-קבוצה של חמישה אובייקטים $(\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5})$, עם הדגמת הקשר בין $\binom{n}{k}$ ל- $\binom{n}{n-k}$. חוץ מזה היו שם עוד דוגמאות, כמו $\binom{7}{2}$. דינה סיפרה שסבתא שלה הסבירה לה הכל: גם את זה שצריך לקבע בכל פעם חרוז צבוע ולעבור על כל האפשרויות לחרוזים הבאים, וגם איך אפשר לחשב את מספר האפשרויות בקיצור, שיעור מתמטיקה בנוי היטב שהיה יכול להתאים לכיתה ד' (אני משער – מעולם לא לימדתי את כיתה ד').

צריך לציין שדינה הסבירה את כל מה שסבתא שלה לימדה אותה בצורה נכונה ובהירה להפליא. אני חושב שהיה קל להתקיל אותה בשאלות (נניח, אני חושב שהיא לא הייתה מצליחה להסביר למה צריך לצבוע את החרוזים דווקא בסדר הזה ולא בסדר אחר; כנראה שהיא הייתה אומרת שככה סבתא אמרה שצריך לעשות). אבל כמובן שלא עשיתי את זה. בכל מקרה היה לי תרגיל בקנה: לכתוב סדרות שונות שמורכבות משתי אותיות כ"ף ושלוש מ"ד: ככללל, כלכלל, וכו'. לא היה לי צל של ספק איך זה יראה. כשהגענו לתרגיל הזה, דינה פתרה אותו לא פחות ולא יותר טוב מהאחרות: היא מצאה ששה פתרונות, בקושי רב ובלי שום סדר. (אני חושש שאם סבתא שלה הייתה רואה את זה היא הייתה מצטערת מאד ומסיקה שדינה לא יודעת לחשוב. וגם בזה היא הייתה טועה. אם כי, כנראה שמראש לא היו נותנים לה אפילו שתי דקות לחשוב אלא היו דוחקים אותה לפינה עם שאלות מנחות, ולא היו מרפים ממנה עד שהיא הייתה פותרת "לפי הספר". ואז היו מחשיבים את זה להצלחה פדגוגית, ומדחיקים את הצער על זה שהילדה "לא יודעת לחשוב").

חזרנו על אותו תהליך שעשינו בפעם הקודמת: הסתכלנו על הפתרונות של כל אחת, חיפשנו חזרות, השלמנו פתרונות חסרים וכו', ובסופו של דבר הרכבנו רשימה של עשרה פתרונות. ואז אמרתי:

– אתן יודעות מה זה כ, ל, ל, ל? זה כחול, כחול, לבן, לבן, לבן!

הראיתי להן את השרשראות מהמפגש הקודם, ואיך מתאימים סדרת אותיות לשרשרת. חיפשנו כמה התאמות כאלו – הבנות מצאו אותן בקלות, אבל בלי ההתלהבות וחדוות הגילוי שהיו במפגש ההוא עם הבנים. באופן כללי שמתי לב שיחסית לבנים הן הרבה יותר מתרגשות מעצם המפגשים (כשאומרים להן שמחר יהיה מפגש הן צועקות "יש!", קופצות מרוב שמחה, מוחאות כפיים...), אבל במפגשים עצמם, בתגליות הקטנות שלנו, הן הרבה פחות מתלהבות – למעשה, הן לא מביעות כמעט שום רגש.

"על כוכבי לכת וכוכבים, לגיל הרך"

השאלתי לאלכס פצ'יקוב את "גיאומטריה לקטנטנים", אז הפעם, כדי לשמור על מסורת הקריאה, קראנו ספר על אסטרונומיה.

מפגש 20. שרשרת עם הבדל אחד

שני, 21 באוקטובר 1985. 14:30-15:20. ג'ני, סוניה ודינה.

אתחיל מהצטדקות. המפגשים התחדשו אחרי הפסקה של חצי שנה – לא הצלחתי לאסוף את עצמי ולהכניס את זה לל"ז. במהלך הזמן הזה (באוגוסט) התפרסם מאמר שלי בכתב העת "ידע הוא כח", ונהיה באזו שלם סביב החוג. התביישתי בעצמי שהזנחתי את זה, אבל גם העומס גדל – היה צריך לענות למתעניינים על שאלות, לדבר עם אנשים, להפגש וכו'. שלא לדבר על השינויים הנוראיים בלוח הזמנים שלי בעבודה, החתונה של האחיינית שלי אנה... והנה אנחנו בסוף אוקטובר. הבנות, כרגיל, התלהבו מאד לשמוע שקבענו מפגש.

תרגיל 1. חימום: חיפוש מספרים.

כל אחת מהבנות קיבלה דף מחולק לצורות שבכל אחת מהן כתובה ספרה (הדפים היו שונים אחד מהשני, באיור 155 מופיע דף לדוגמה). צריך להצביע ולהגיד בקול ספרה אחר ספרה, בסדר עולה. כולן מסתדרות מצוין. ג'ני וסוניה מתחילות מ-1, מגיעות ל-9, ומוסיפות את ה-0 בסוף. דינה שמה לב לזה ומתחילה מ-0. בזמנו סיטואציה דומה נורא הצחיקה אותן, אבל הפעם הן לא התרגשו. סוניה שאלה:

– ציירת את זה בעצמך?

– כן.

– ואיך עשית שזה יהיה כל כך ישר?

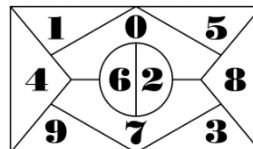
– בעזרת סרגל.

– ואת העיגולים?

– בעזרת מחוגה.

– אה...

איור 155. המשימה: להצביע על המספרים ולהגיד אותם בקול לפי הסדר.



תרגיל 2. שרשרת של צורות עם הבדל אחד.

לקחנו שוב את אוסף הלוחיות של דינש ודנו במה הצורות שונות אחת מהשניה. בזמנו ניסיתי לנהל איתן דיון כזה אבל זה לא כל כך הלך, הפעם הן ממש הבינו במה מדובר וציינו ארבעה פרמטרים: צבע, צורה, גודל וקיומו של חור. המשימה הייתה לסדר את הצורות בשורה כך שכל אחת תהיה שונה מקודמתה בפרמטר אחד בלבד. עסקנו במשימה הזו במשך כמעט כל המפגש. שאלתי את הבנות כמה פעמים אם לא נמאס להן, ובכל פעם הן ענו פה אחד שלא.

דינה וג'ני הסתדרו עם התרגיל יפה. ואילו סוניה... סוניה המסכנה עלתה לכיתה א', וזה אומר הכל: עייפות, פיזור, חוסר מוטיבציה. יכול להיות שזה לא מספיק משתקף מהיומן, אבל סוניה תמיד הייתה זורחת. דמיינו ילד שקיבל כלב במתנה לפני חמש דקות – ככה סוניה הייתה במצב רגיל, בלי שום כלב. ועכשיו זה נראה כאילו כיבו אותה, וכל כמה רגעים המבט שלה היה נודד. היא לוקחת צורה אקראית; מתברר שבמקרה הצורה מתאימה כפתרון; היא בוהה בה ארוכות, לא מצליחה לבודד את הפרמטרים מהצורה עצמה ולהשוות אותם לצורה הקודמת; לבסוף היא מחזירה את הצורה לערמה. אחר כך היא לוקחת צורה אקראית אחרת, והכל חוזר על עצמו. באיזשהו שלב היא מתעייפת מזה, ומניחה בשורה את הצורה שהיא מחזיקה באותו רגע, בין אם היא מתאימה או לא, והמבט שלה נודד הלאה... למעשה, מדי פעם שמת לב שגם כשהיא מחזיקה צורה היא לא מסתכלת עליה ולא על השורה, אלא בוהה באוויר.

התחלתי לשאול אותה האם הצורות זהות בגודלן, והאם בצבען, והאם פה יש חור, והאם יש שם. היא ענתה נכון על כל השאלות, אבל לרוב לא הצליחה להסיק מסקנות מהתשובות. לא ידעה כמה הבהדלים יצאו וכמה צריכים להיות. ולפעמים, אחרי שהיא כבר הייתה מצרפת צורה חדשה לשורה, היא הייתה שמה לב פתאום שהצורה שונה במשהו מהצורה הקודמת (כפי שאמור להיות), ואז היא הייתה "תופסת את עצמה" ומחזירה את הצורה לערמה. אני לא יודע אם זה נכון, אבל חלק מהזמן היה נדמה לי שעצם נתינת השמות לפרמטרים מבלבלת אותה. יש משולשים, עיגולים וריבועים – רואים את זה וזה ברור; אבל יש גם "צורה", ולא ברור מה בדיוק זה אומר ואיך זה קשור. רואים שמשולש שונה מריבוע; אבל כנראה שחופן מזה הוא שונה ממנו גם בצורה – זה הבהדל נוסף? היא גם התבלבלה בין המילים "צורה" ו"גודל". אני מניח שעם הזמן היא תעלה על המסלול, אבל במפגש הזה ממש לא הלך לה.

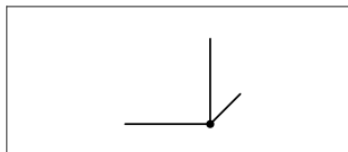
לג'ני היה קטע מעניין. כשהיה תור סוניה או דינה, היא זיהתה פתרונות בשניה, במבט אחד. היא הייתה מקפצצת, מתאפקת לא לרמוז, מלחששת לי באוזן שהפתרון הוא כך וכך והוא ממש מתחת לאף של סוניה והיא לא שמה לב, הייתה צווחת בהתרגשות אם מהערמה צץ פתאום פתרון מתאים, וכו'. היה ברור שהיא מזהה פתרונות נכונים ברגע, ממש כמוני. אבל כשהיה מגיע תורה, היא הייתה מאבדת את זה פתאום, ומתחילה לעבוד בסרבול – לעבור על כל הפרמטרים, לבדוק אותם בזה אחר זה, לספור כמה אי-התאמות יש וכו'. היא הייתה גם שוכחת מפרמטרים או מתבלבלת בספירה (סופרת הבהדל אחד פעמיים, או שוכחת מהבהדל אחד כשהיא מוצאת הבהדל שני), ואז היא גם הייתה טועה.

אבל הבהדל המשמעותי יותר היה שבמקום לקחת מיד צורה מתאימה, כמו שהיא הייתה מסוגלת לעשות כשהיה תורן של הבנות האחרות, היא הייתה לוקחת צורה אקראית ובודקת אותה. הבהדל בינה לבין הגרסה ה"לא נושאת בנטל חובת ההוכחה" של עצמה היה דומה להבהדל בין אדם שיוודע להבחין בין שירה לפרוזה משמיעה לבין מי שצריך לספור הברות מוטעמות ולא-מוטעמות בשביל להבחין. השני עלול להתבלבל בספירה, בעוד שהראשון לא יכול לטעות, הוא פשוט יודע משמיעה כמה מדובר. ההשוואה הזו יכולה להדגים גם מהי תיאוריית העיצוב ההדרגתי של הפעולות המנטליות. איך הוגי התיאוריה הזו היו מלמדים אותנו לזהות שירה? היינו צריכים להתחיל ב"פעולות מוכוונות-אובייקטיביות". למשל, לסמן הברה מוטעמת בריבוע אדום, והברה לא מוטעמת בכחול, ואז להתאים לכל שורה סדרת ריבועים ולחפש תבניות. אחר כך היינו עוברים ל"שלב הפעולות הסימבוליות", ומסמנים את ההברות המוטעמות והלא-מוטעמות בסימונים מופשטים יותר, כשהמטרה היא להפנים בהדרגה את הסכמה ולסמן את ההברות המוטעמות והלא-מוטעמות במחשבה בלבד, באופן "לא מפורש", ובמקביל לספור את ההברות יותר ויותר מהר, עד שהספירה תהפוך לאוטומטית. מפה לשם, היינו לומדים להבחין בין שירה לפרוזה.

בעוד שהדרך הנכונה היא פשוט לקרוא הרבה שירה, רצוי שירה טובה, ורצוי עוד יותר לאהוב את מה שקוראים.

לגבי השירה, אני לא מגזים. ראיתי איפשהו מאמר שמתאר איך מלמדים ילדי כיתה ו' להבין תיאור דו-מימדי של אובייקטים תלת-מימדיים. הוא מתאר איך מלמדים אותם להתייחס בנפרד לחלקים מהציור ולפרש את היחס בין הקווים. למשל, באיור של קודקוד קוביה (איור 156) קו אחד מתאר את האנך, קו שני מתאר את המישור המקביל למישור הציור, וקו שלישי מתאר את המישור המאונך למישור הציור. החלק הכי משעשע הוא שהילדים אכן למדו. זה הגיוני, כי אם מתעסקים במשך תקופה בקוואזי-ניתוח-שירה, בדרך קוראים לא מעט ממנה. וילדים שמבינים את החומר גם בלי כל זה לומדים על הדרך את יסודות ניתוח השירה הפורמלי. מה שלא מבטל את העובדה שהתיאוריה מגוחכת: זו לא הדרך לגרום לילדים להבין דברים.

איור 156. קודקוד של קוביה.



נחזור למפגש שלנו. ג'ני טעתה לעתים רחוקות, ומדי פעם הייתה מתעוררת בה הראיה המיידית הזו והיא הייתה פותרת את התרגיל ברגע. והיה הבדל בהיבט נוסף. רוב הפתרונות של הבנות היו "טריוויאליים": הם שינו רק את צבע הלוחית. אם למשל השרשרת נגמרת בריבוע אדום גדול בלי חור, מניחים אחריו ריבוע כחול גדול בלי חור, ואז צהוב, ואז ירוק. בזה נגמרות הדרכים להחליף צבע, וצריך לשנות פרמטר אחר, פחות טריוויאלי, ולשמר את השאר. בשלב הזה לרוב היו מתעוררים קשיים. אז בנקודה הזו ג'ני הצליחה יותר מהאחרות, ולפעמים גם הייתה מציעה פתרון לא טריוויאלי עוד לפני שלא הייתה ברירה. דינה הייתה במקום שני מבחינת כמות הפתרונות הלא טריוויאליים, וסוניה לא ממש הצליחה למצוא אותם. חשבתי שאולי הצבע נתפס כפרמטר פשוט יותר כי בשפה הוא מופיע כשם תואר (אדום, כחול, צהוב, ירוק), בעוד שצורה היא שם עצם (משולש, עיגול, ריבוע). אבל בעצם גם גודל (גדול, קטן) נתפס כפרמטר פחות ברור מצבע.

[מצחק: במקום אחר אני טוען שילדים הכי פחות שמים לב להבדל בצבע. נראה שיש לי כשרון מדהים להגות תיאוריות לא בשלות].

לקראת הסוף דינה נתקעה עם עשר צורות שאף אחת מהן לא התאימה להמשך השרשרת. יש תופעה שכבר ראיתי אצל ילדים עשרות פעמים, ואני עדיין לא מצליח להבין אותה. לכאורה, הדבר הכי מתבקש הוא לקחת צורות בזו אחר זו, לבדוק אותן, ואם הן לא מתאימות, להניח אותן בנפרד. אבל הנסיון מראה שאף ילד לא חושב לעשות את זה. למה? זה עד כדי כך מסובך? הם ינברו בערמה, יבדקו שוב ושוב את אותם פתרונות אפשריים, וזה ימשך המון זמן ויגרור יותר ויותר יאוש. אז זה מה שקרה גם הפעם. באיזשהו שלב התערבתי והתחלתי להניח בצד צורות שכבר ראינו שאינן מתאימות. הגענו למסקנה שאין צורות מתאימות וסיימנו את התרגיל. גליה הציעה להמשיך את השרשרת מהצד השני שלה, אבל הרגשתי שגם ככה התרגיל התארך יותר מדי (כמו התיאור שלי כאן), ושאלתי את הבנות האם הן רוצות להמשיך. בפעמיים ששאלתי לפני כן אם נמאס להן הן אמרו שלא, אבל הפעם כולן העדיפו להפסיק.

יש לי שני הסברים אפשריים לכך שילדים לא שמים בצד פתרונות שהם דחו אלא משאירים אותם בערמה הכללית. הראשון: הם לא לגמרי בטוחים שהם צודקים. השני: הם עוד לא בטוחים כמונו בדטרמיניזם של חוקי הטבע והלוגיקה; מבחינתם, יכול להיות שעכשיו הפתרון לא מתאים, אבל עוד כמה דקות הוא יתאים. זה קרה בעבר, והסיבות לא תמיד היו ברורות.

תרגיל 3. החזרת הצורות לקופסה.

כמו בעבר, נתתי לבנות כללים חופפים חלקית לבחירת הצורות שהן מחזירות לקופסה: אחת מחזירה רק צורות גדולות, השנייה רק צורות עם חור, והשלישית רק צהובות. הפעם כולן הבינו איך זה עובד. ג'ני אפילו אמרה על איזו צורה שגם היא וגם סוניה יכולות להחזיר אותה לקופסה. כך שלא היו מריבות הפעם. כשג'ני נגמרו הצורות הצהובות, שאלתי אותה למה הצורות שלה נגמרו לפני כולן. היא חשבה שהסיבה היא שגם סוניה לקחה צורות צהובות מדי פעם. הסברתי לה שבעוד שחצי מהצורות הן גדולות ובחצי מהצורות יש חור, רק רבע מהצורות הן צהובות, כי יש ארבעה צבעים, ולכן היא יכולה לעבור עכשיו לצורות אדומות. בסוף, כרגיל, נשאר הצורות שלא התאימו לכללים של אף אחת – החיתוך של משלימי הקבוצות. החזרנו אותן לקופסה ביחד. בגדול, התרגיל עבר מצוין והבנות נהנו.

גיאומטריה לקטנטנים.

נשאר עוד שניים-שלושה תרגילים שלא הגענו אליהם, אבל כבר חלפו 45 דקות, ולכן עזבתי אותם ובחמש הדקות האחרונות הקראתי להן "גיאומטריה לקטנטנים".

* * *

כך הסתיים החוג השני שלנו; כל המאמצים שלנו להמשיך אותו לא נשאו פרי. החיים המשיכו הלאה, והצלחתי "לעצור ולהביט לאחור" רק עכשיו, בשנת 2005.

11 זה לא אפילו

אני מניח שהקוראים סקרנים לגלות מה קרה לגיבורי הסיפור שלי. התלבטתי האם אני צריך לספק את הסקרנות הזו. הרי החיים ממשכימים, ומה שנכון היום יכול להשתנות מחר. אבל החלטתי לכתוב בכל זאת.

כבר התנצלתי הרבה על זה שאני מקדיש לדימה ולג'ני יותר תשומת לב מאשר לילדים האחרים. הפעם המצב מחריף עוד יותר: על הילדים שלי הייתי יכול לכתוב לפחות פרק שלם; על האחרים אני שומע רק מדי פעם, ומכלי שני או שלישי. אני מקווה שיבינו אותי ויסלחו לי.

מהבנים, דימה הוא היחיד שעוסק במקצועו במתמטיקה. הוא סיים דוקטורט וקיבל משרת חוקר באחת האוניברסיטאות בפריז. בתחילת הספר הזה, במבוא, הזכרתי את המרכז לחינוך מתמטי מתמשך במוסקבה (זה שמוציא לאור את הספר הזה), ואת אוניברסיטת מוסקבה העצמאית. ובכן, במשך כמה שנים דימה היה האחראי (מהצד הצרפתי) על חילופי סטודנטים בין האוניברסיטה העצמאית לבין Ecole Normale, המוסד שבו למד. הוא גם עובד הרבה עם בתי ספר; בין השאר, הוא ארגן בפריז תחרות בינלאומית במתמטיקה (מטעם מרכז מוסקבה לחינוך מתמטי מתמשך). עוד פן בחיים שלו: הוא מרכז מקהלה רוסית בפריז, מנגן בגיטרה ושר.

פיטר סיים לימודי מזרח רחוק, התמחה בשפה היפנית, בילה שנה ביפן ועובד כמתרגם. הוא ממקימי וממובילי תנועת נוער מטעם הכנסיה שהוא משתייך אליה, ועורך עיתון לנוער.

אנדריי סיים לימודי כלכלה, והתמחה בכלכלה עולמית. הוא עובד בסניף המוסקבאי של אחד הבנקים הגדולים במערב, ועוסק במסחר במוצרים פיננסיים – ניירות ערך, מט"ח, חוזים וכד'. יש לו בת.

לצערי, איבדתי קשר עם יבגני; אני לא יודע איפה הוא היום ובמה הוא עוסק.

ג'ני סיימה לימודי קולנוע ועושה דוקטורט; התזה שלה עוסקת בבמאית קירה מורטוב. חוץ מזה, היא מלמדת קולנוע באוניברסיטה ובמכללות להוראה, מתרגמת, יוצרת כתוביות של סרטים, מארגנת פסטיבלים לקולנוע, הייתה חברה בחבר המושבעים של הנוער בפסטיבל קאן, צילמה כמה סרטים קצרים וייצגה את הקולנוע הצרפתי המודרני ברוסיה, קזחסטן וקירגיזיה, רוקדת סווינג... לא יודע איפה לעצור את הרשימה.

סוניה סיימה לימודי היסטוריה ופילולוגיה באוניברסיטת רוסיה למדעי הרוח. כמו אחיה פיטר, גם היא עובדת עם ילדים מטעם הכנסיה, רק שהכנסיה פרוטסטנטית ולא קתולית. כרגע היא עובדת על פתיחת בית ספר פרטי.

דינה חיה בארה"ב; היא סיימה לימודי מתמטיקה באוניברסיטת ברנדייס, עובדת כמורה למתמטיקה, עורכת ספרי לימוד במתמטיקה, ועוסקת בקרמיקה – היא אפילו השתתפה בכמה תערוכות.

* * *

איך מסיימים את הספר? אני יודע שנקודת השיא אמורה להיות בערך שלישי מהסוף, ומשם המתח אמור לרדת בהדרגה. ואצלי הכל מתקדם בקצב קבוע מההתחלה ועד הסוף. סגנון שקצת מזכיר סאגה (אם כי ההשוואה כמובן מחמיאה לי שלא בצדק). בזמנו הייתי המום ומוקסם מסאגות איסלנדיות; עד היום הן הסוגה האהובה עלי. החיים בהן מבעבעים, אירוע רודף אירוע, ופתאום... משפט אחד קצר: "הסאגה הזו מסתיימת כאן".

”רעיון אינו מתיימר לנוע, הוא לא מראה את הדרך, אלא מציג אמצעי להתקדמות. טוב כשקורא מסיים ספר בתחושה שכעת הוא יודע פחות משחשב שהוא יודע.”
ס. אברניצב