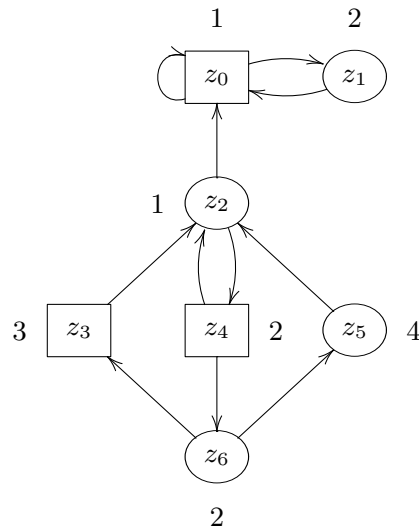


Question 1

Calculez les sommets gagnants du jeu de parité suivant, en appliquant l'algorithme de Zielonka. Indiquez également des stratégies gagnantes positionnelles pour chaque joueur.



Question 2

On considère les 2 variantes suivantes du jeu de parité. On supposera, comme d'habitude, que l'arène $\mathcal{A} = (V = V_0 \cup V_1, E, \chi)$ est finie, et que chaque sommet a au moins un successeur.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Dans le jeu \mathcal{G}_n , le joueur P_0 joue les n premiers coups de n'importe quelle partie (même si un sommet appartient à P_1). A partir du $(n + 1)$ -ème coup, le joueur P_i joue seulement dans les sommets de V_i .
2. Dans le jeu \mathcal{G}' , dans chaque partie, le joueur P_0 a le droit de jouer au plus un coup à la place de P_1 .

Pour les deux variantes, le joueur P_0 gagne une partie infinie v_0, v_1, \dots si $\max\{\chi(v) : \exists^\infty n : v = v_n\}$ est pair.

Vous pouvez supposer qu'il existe un algorithme qui détermine quel joueur gagne à partir d'un sommet donné dans un jeu de parité.

- Proposez un algorithme qui détermine les sommets gagnants de P_0 dans le jeu \mathcal{G}_n .
- Pour la variante \mathcal{G}' on demande de décrire une réduction vers un jeu de parité usuel : à partir de \mathcal{A} vous allez construire une arène $\mathcal{A}' = (V' = V'_0 \cup V'_1, E', \chi')$ et une fonction $f : V \rightarrow V'$ tels que v est gagnant pour P_0 dans \mathcal{G}' ssi $f(v)$ est gagnant pour P_0 dans le jeu de parité sur \mathcal{A}' .
- Est-ce que P_0 peut avoir une stratégie gagnante positionnelle dans le jeu \mathcal{G}_n ? Même question pour \mathcal{G}' . Justifiez votre réponse, soit en montrant qu'une stratégie positionnelle existe, ou par un contre-exemple.

Question 3

Le jeu qui suit est décrit par une arène finie $\mathcal{A} = (V = V_0 \cup V_1, E)$ et deux ensembles $Q, R \subseteq V$ de sommets. On suppose de nouveau que chaque sommet a au moins un successeur. Le joueur P_0 gagne une partie infinie v_0, v_1, \dots si pour tout $n \geq 0$: si $v_n \in Q$ alors il existe $m > n$ tel que $v_m \in R$.

1. Décrivez une réduction vers un jeu de parité $\mathcal{A}' = (V' = V'_0 \cup V'_1, E', \chi)$.
Indication : Deux couleurs et un bit de mémoire suffisent.
2. (Question bonus) Reformulez la condition de victoire du jeu sur \mathcal{A}' en condition de Büchi.