

*Question 2*

1. Jeu  $\mathcal{G}_n$  : on calcule les régions gagnantes  $W_0, W_1$  dans le jeu de parité usuel. Ensuite,  $W'_0$  est l'ensemble des sommets à distance  $\leq n$  de  $W_0$ . La stratégie de  $P_0$  est positionnelle : stratégie de parité dans  $W_0$  et stratégie de distance (= diminuer la distance vers  $W_0$ ) dans  $W'_0 \setminus W_0$ .
2. Jeu  $\mathcal{G}'$  : réduction à jeu de parité usuel avec des copies de  $\mathcal{G}$ .

Soit  $V'_1 = \{v' : v \in V_1\}$  une copie des nœuds de  $P_1$ , ainsi que  $\bar{V} = \{\bar{v} : v \in V\}$ ,  $\bar{E} = \{(\bar{u}, \bar{v}) : (u, v) \in E\}$  une copie du graphe  $G$ .

La nouvelle arène de jeu de parité  $\mathcal{H}$  a comme ensemble de sommets  $U = V \cup V'_1 \cup \bar{V}$ . Les sommets de  $V'_1$  appartiennent à  $P_0$ , les autres appartiennent au même joueur que dans  $\mathcal{G}$ . Les couleurs sont héritées du jeu  $\mathcal{G}'$ . L'ensemble des arêtes est

$$F = (E \setminus \{(u, v) : v \in V_1\}) \cup \{(u, v'), (v', v) : (u, v) \in E, v \in V_1\} \cup \{(v', \bar{w}) : (v, w) \in E\} \cup \bar{E}$$

Idée : toute partie qui reste dans  $V \cup V'_1$  est en fait une partie de  $\mathcal{G}$  (sans coup franc), modulo le fait que chaque nœud de  $v \in V_1$  est précédé par sa copie  $v'$  dans  $V'_1$ . Les autres parties sont celles qui passent dans  $\bar{V}$  (et y restent) - elles correspondent aux parties avec un coup franc. La fonction  $f$  qui associe aux sommets de  $\mathcal{G}'$  des sommets de  $\mathcal{H}$  est l'identité.

Alternative :

- On calcule  $W_0, W_1$  pour la condition usuelle de parité.
- Soit  $F = \{u \in V_1 : \exists v \in W_0, (u, v) \in E\}$ , et  $X = \text{Attr}_0(F)$ . On met  $V' = V \setminus X$  et on calcule les régions gagnantes  $W''_0, W''_1$  dans le sous-jeu défini par  $V'$ .
- On montre que  $W'_0 = X \cup W''_0$ , et  $W'_1 = W''_1$ .  
 En partant de  $X$ ,  $P_0$  joue la stratégie d'attracteur pour arriver dans  $F$ , où elle joue un coup de  $P_1$  pour aller dans  $W_0$ . Ensuite, dans  $W_0$  elle joue la stratégie de parité.  
 En partant de  $W''_0$  : tant que le jeu reste dans  $V'$ ,  $P_0$  applique la stratégie de parité. Si  $P_1$  va dans  $X$ ,  $P_0$  joue comme ci-dessus, pour arriver dans  $W_0$ .

En partant de  $W_1''$ ,  $P_1$  joue la stratégie de parité du sous-jeu  $V'$ . Si  $P_0$  utilise le coup franc pour aller dans  $X$  :  $P_1$  utilise la stratégie de parité du jeu sur  $V$  (et le jeu reste dans  $W_1$ ).

Exemple :  $V_0 = \{a, c, e\}$ ,  $V_1 = \{b, d\}$ ,  $\chi^{-1}(1) = \{a, c, d\}$ ,  $\chi^{-1}(2) = \{b, e\}$ ,

$$E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, d), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}.$$

$W_0' = V$  et la stratégie positionnelle de  $P_0$  est  $\sigma(a) = b$ ,  $\sigma(c) = d$ ,  $\sigma(e) = e$ .

### Question 3

On définit une nouvelle arène  $\mathcal{A}'$  avec ensemble de sommets  $V' = V \times \{0, 1\}$ . L'ensemble des arêtes est défini par  $((u, d), (v, e)) \in E'$  si  $(u, v) \in E$  et une des conditions suivantes est vraie :

- $d = e = 0$ ,  $u \notin Q$ ,
- $d = 0$ ,  $e = 1$ ,  $u \in Q$ ,
- $d = 1$ ,  $e = 0$ ,  $u \in R$ ,
- $d = e = 1$ ,  $u \notin R$ .

Les couleurs sont  $\chi(u, d) = 1$  si  $d = 1$ , et  $\chi(u, d) = 2$  si  $d = 0$ .

La fonction  $f : V \rightarrow V'$  envoie le sommet  $v \in V$  sur le sommet  $(v, 0)$  de  $V'$ .

Une partie (infinie) est gagnante pour la condition de parité sur  $\mathcal{A}'$  ssi elle ne finit pas ultimétement avec  $d = 1$ , ce qui est équivalent à demander que  $d = 0$  apparaîsse infiniment souvent. Donc on peut soit utiliser la condition de parité ci-dessus, ou définir l'ensemble  $\{(u, d) : d = 0\}$  comme condition de Büchi.