

Théorème de Nash

.



Retour sur équilibres et détermination des jeux

Ex Prix équitable

$p(s, m)$: note de l'étudiant s
pour la matière m

- 1 le conseil des étudiants choisit un étudiant s .
- 2 le jury choisit une matière m .
- 3 le prix est $p(s, m) \cdot 100$.

⊗ CE maximale, jury minimise
(0-100)

Est-ce que CE a l'intérêt
d'inverser (1) et (2) ?

Résultat de (1) $\rightarrow$ (2) :

$\min_m p(s_0, m)$: s_0 choisi
par CE

Résultat de (2) $\rightarrow$ (1)

$\max_s p(s, m_0)$: m_0 choisi
par jury

Req :

$$\min_m p(d_0, m) \leq p(d_0, m_0) \leq \max_s p(s, m_0)$$

pour tout s_0, m_0

On a donc :

$$\begin{array}{ccc} (*) \max_s \min_m p(d, m) & \leq & \min_m \max_s p(s, m) \\ \parallel & & \parallel \\ \min_m p(d_0, m) & & \max_s p(s, m_0) \end{array}$$

Si maintenant les choix de CE et Jury sont faits simultanément, quand est-ce qu'ils ne regrettent pas leur choix ?

Si CE choisit d_0 et Jury m_0 alors aucun ne regrette

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \forall s : p(s, m_0) \leq p(s_0, m_0) \\ \text{et} & \forall m : p(s_0, m) \geq p(s_0, m_0) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\max_s p(s, m_0) \leq p(s_0, m_0) \leq \min_m p(s_0, m)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \min_m \max_s p(s, m) & \leq p(s_0, m_0) \leq \\ & \max_s \min_m p(s, m) \end{aligned}$$

Avec $\otimes$ on obtient :

$$\begin{aligned} \min_m \max_s p(s, m) & = p(s_0, m_0) = \\ & \max_s \min_m p(s, m) \end{aligned}$$

Comparaison avec jeux à 2 joueurs
à information parfaite (sans parties
indécises) :

jeu est déterminé si soit P_0
ou P_1 a une stratégie gagnante

σ_i : stratégie de P_i

$$p(\sigma_0, \sigma_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_0 \text{ gagne} \\ -1 & \text{si } P_1 \text{ gagne} \end{cases}$$

le jeu est déterminé si

$$\alpha := \max_{\sigma_0} \min_{\sigma_1} p(\sigma_0, \sigma_1) =$$

$$\min_{\sigma_1} \max_{\sigma_0} p(\sigma_0, \sigma_1) =: \beta$$

$(\Rightarrow)$ on a toujours $\alpha \leq \beta$ par $(*)$.

Si P_0 gagne avec $\hat{\sigma}_0$ alors

$$\min_{\sigma_1} p(\hat{\sigma}_0, \sigma_1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$
$$\Rightarrow \beta \leq \alpha$$

Si P_1 gagne avec $\hat{\sigma}_1$:

$$\max_{\sigma_0} p(\sigma_0, \hat{\sigma}_1) = -1$$

$$\Rightarrow \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \beta \leq \alpha$$

Dans les 2 cas : $\alpha = \beta$

($\Leftarrow$) Si $\alpha = \beta = 1$:

$$\exists \hat{\sigma}_0 \text{ tq. } \min_{\sigma_1} p(\hat{\sigma}_0, \sigma_1) = 1$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}_0$ gagnante pour P_0

Si $\alpha = \beta = -1$: idem pour P_1

Jusqu'à maintenant on a déf.
les éq. de Nash avec stratégies
pures ($s_i \in S_i$).

Pierre - feuille - viceux $\rightarrow$ choix probab.

- On va introduire des stratégies
probabilistes ("mixtes")
- On va montrer le thm. de Nash,
qui dit que dans tout jeu fini il
existe au moins un éq. de Nash
avec strat. mixtes
- On va montrer comment calculer
un éq. de Nash dans le cas spécif.
de 2 joueurs à zero sum:
Minimax - Théorème (von Neumann)

$A \neq \emptyset$ fini

Une distrib. de prob. sur A :

$$pr: A \rightarrow [0, 1]$$

$$\sum_{a \in A} pr(a) = 1$$

On note par ΔA = ens. des distrib. de proba: sur A

Jeux stratégiques

$$(S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$$

Une strat. mixte pour le joueur i

= distrib. de proba sur S_i

Not.

ΔS_i = ens. des stratégies mixtes pour i

$$m_i \in \Delta S_i$$

$$\text{supp}(m_i) = \{s \in S_i : m_i(s) > 0\}$$

$$m \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n \rightarrow$$

$$m = (m_1, \dots, m_n)$$

$$m_{-i} = (m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n)$$

$$s = (s_i)_i$$

payoff

$$m(s) := m_1(s_1) \cdot m_2(s_2) \cdot \dots \cdot m_n(s_n)$$

$$p_i(m) = \sum_{s \in S} \underbrace{m(s)}_{\in [0,1]} \cdot \underbrace{p_i(s)}_{\substack{\uparrow \\ \text{mixte}}}$$

ex Matching pennies

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

pas d'eq. de Nash
pour

$$m_1 = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} T = m_2$$

$$p_1(m) = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 = p_2(m)$$

def m est eq. de Nash si pour tout i , et pour toute strat. mixte m'_i :

$$p_i(m) \geq p_i(m'_i, m_{-i})$$

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

$$m_1 = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} T =$$

m_2 est Eq. de Nash

$$m_1' = p \cdot H + (1-p) \cdot T$$

$$p_1(m_1', m_2) = 1 \cdot \frac{p}{2} + (-1) \cdot \frac{p}{2} + (-1) \cdot \frac{1-p}{2} + 1 \cdot \frac{1-p}{2} = 0 = p_1(m)$$

[IESDS]: iterated elimination of strictly dominated strategies

→ on élimine une stratégie (pure) si elle est strictement dominée par une stratégie mixte m_i :

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i, m_{-i}),$$

$+ m_{-i}$

Rq. L'ordre d'élimination n'est pas important. les équilibres de Nash ne sont pas éliminés par IESDS

Ex Pour MP, la strat. H n'est pas strict. dominée, par aucune strat. mixte m_1 , car avec

$$\begin{cases} m_2 = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}T \\ m_1 = r \cdot H + (1-r)T \end{cases} \quad \text{on a}$$

$$p_1(H, m_2) = \frac{1}{2} + (r-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$= p_1(m_1, m_2) = \frac{r}{2} + \frac{1-r}{2} - \frac{r}{2} - \frac{1-r}{2} = 0$$

Donc iESDS n'élimine aucune stratégie dans MP.

lemme Pour tout jeu stratégique $(S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$ on a l'équivalence des points suivants :

(1) m est éq. de Nash

(2) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $s_i \in S_i$:

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

(3) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $s_i \in S_i \cap \text{supp}(m)$:

$$p_i(m) = p_i(s_i, m_{-i})$$

et pour tout i et tout

$s_i \in S_i \setminus \text{supp}(m)$:

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

démo

(1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1)

$$p_i(m) = \sum_{s \in \text{supp}(m)} m_i(s_i) \cdot m_{-i}(s_{-i}) \cdot p_i(s)$$
$$= \sum_{s_i \in \text{supp}(m_i)} m_i(s_i) \cdot p_i(s_i, m_{-i})$$

Ex Battle of sexes : possible aussi un éq. de Nash en strat. mixtes

		2	F	B
1				
F		2,1	0,0	
B		0,0	1,2	

$$m_1 = r_1 \cdot F + (1-r_1) \cdot B$$

$$m_2 = r_2 \cdot F + (1-r_2) \cdot B$$

$$0 \leq r_1, r_2 \leq 1$$

$$p_1(m) = 2 \cdot \overset{4/9}{r_1} \cdot \overset{2/9}{r_2} + (1-r_1) \cdot (1-r_2) = \frac{2}{3}$$

$$p_2(m) = \overset{2/9}{r_1} \cdot \overset{4/9}{r_2} + 2(1-r_1) \cdot (1-r_2) = \frac{2}{3}$$

Si m éq. de Nash :

$$\textcircled{3} \text{ support}(m_1) = \{F, B\}$$

$$\downarrow p_1(m) = \underset{\substack{\parallel \\ 2r_2}}{p_1(F, m_2)} = \underset{\substack{\parallel \\ 1 \cdot (1-r_2)}}{p_1(B, m_2)}$$

$$\Rightarrow 2r_2 = 1-r_2 \Rightarrow \textcircled{r_2 = \frac{1}{3}}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 2/3}}{p_2(m)} = p_2(m_1, F) = \underset{\substack{\parallel \\ 2(1-r_1)}}{p_2(m_1, B)}$$

$$\Rightarrow \textcircled{r_1 = \frac{2}{3}}$$

Ex: MP

$$m_1 = r_1 \cdot H + (1-r_1) \cdot T$$

$$m_2 = r_2 \cdot H + (1-r_2) \cdot T$$

$$\begin{aligned} p_1(m) &= r_1 r_2 + (1-r_1)(1-r_2) \\ &\quad - r_1(1-r_2) - (1-r_1)r_2 \\ &= r_1 r_2 + 1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2 \\ &\quad - r_1 + r_1 r_2 - r_2 + r_1 r_2 \\ &= 4r_1 r_2 - 2r_1 - 2r_2 + 1 \end{aligned}$$

Si $\text{support}(m_1) = \{H, T\}$:

$$p_1(H, m_2) = p_1(T, m_2)$$

$$\begin{aligned} r_2 - (1-r_2) &= -r_2 + (1-r_2) \\ 2r_2 &= 2(1-r_2) \Rightarrow r_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

? $(H, m_2^{\frac{1}{2}})$ eq. de Nash?

$$\begin{aligned} p_1(H, m_2) &= r_2 - (1-r_2) = 2r_2 - 1 \\ &= 4r_1 r_2 - 2r_1 - 2r_2 + 1 \end{aligned}$$

Th. de Nash (~ 1950)

Tout jeu stratégique fini a au moins un éq. de Nash avec strat. mixtes.

Rq Il y a des jeux qui n'ont pas de éq. de Nash en strat. pures (ex. MP, PFC, ...).

Preuve en utilisant le thm. de point fixe de Brouwer.

[Brouwer]: Si $D \subseteq \mathbb{R}^d$ est convexe et compact, et $f: D \rightarrow D$ est continue, alors il ex. $x \in D$ tq. $f(x) = x$.

On déf. pour $i \in [1..n]$, m strat. mixte, $s_i \in S_i$:

$$\text{Gain}_{s_i}(m) = \max \left\{ p_i(s_i, m_{-i}) - p_i(m) ; 0 \right\}$$

On applique Brouwer avec

- $D = [0, 1]^{s_1} \times \dots \times [0, 1]^{s_n}$

- $\forall m \in D : f(m) = m' \text{ tq.}$

$$\forall i, \forall s_i \in S_i :$$

$$m'_i(s_i) := \frac{m_i(s_i) + \text{Gain}_{s_i}(m)}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} \text{Gain}_{s'_i}(m)}$$

$$\underline{\text{Rq}} \quad \sum_{s_i \in S_i} m'_i(s_i) = 1$$

$$\underline{\text{Rq}}. \quad f \text{ est continue}$$

On montre que si $m = f(m)$, alors m est équilibre de Nash.

Il suffit de montrer :

$$\begin{aligned} & \text{Gain}_{s_i}(m) = 0, \quad \forall i, s_i \in S_i \\ & \text{''} \\ & \max \{ p_i(s_i, m_{-i}) - p_i(m); 0 \} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Gain}_{S_i}(m) = 0, \forall i, s_i \in S_i :}$$

Supposons par contradiction qu'il
ex. $i, s_i \in S_i$ tq.

$$\underline{\text{Gain}_{S_i}(m) > 0} \quad (\Leftrightarrow p_i(s_i, m_{-i}) > p_i(m))$$

On note que $\underline{m_i(s_i) > 0}$.
(pas possible d'avoir $m_i(s_i) = 0$
à cause de $m_i'(s_i) > 0$ et $m = m'$)
 $f(m) = m' (=m)$

$$p_i(m) = \sum_{s_i' \in S_i} m_i(s_i') \cdot p_i(s_i', m_{-i})$$

À cause de $m_i(s_i) > 0$ et
 $p_i(s_i, m_{-i}) > p_i(m)$, il doit ex.
 $s_i' \in S_i$ tq. $m_i(s_i') > 0$ et
 $p_i(s_i', m_{-i}) < p_i(m)$

$$(\Rightarrow \text{Gain}_{S_i'}(m) = 0)$$

$$\text{Donc } \underline{m_i'(s_i')} \stackrel{dt}{=} \underline{m_i(s_i') + \text{Gain}_{S_i'}(m)} < \underline{1 + \sum \text{Gain}_{S_i''}(m)} < \underline{m_i(s_i')} \rightarrow \text{contradict } m = m' !$$