

1 Jeux combinatoires

Deux voleurs mettent des pièces de 1 euro sur une table ronde, en alternance. Les pièces n'ont pas le droit de se toucher. Celui qui ne peut plus placer une pièce, perd. Quel joueur a une stratégie gagnante ?

2 Jeux réguliers sur arènes finies

Arène de jeu.

$$G = (V_0, V_1, E)$$

- Deux joueurs P_0 et P_1 . L'ensemble $V = V_0 \cup V_1$ des sommets du graphe est partitionné entre les deux joueurs : V_0 appartient à P_0 et V_1 à P_1 .
- Arêtes $E \subseteq V \times V$.

Parties. Une **partie** π du jeu est un chemin **maximal** de G :

- soit un chemin infini $\pi = v_0, v_1, \dots$
- ou un chemin fini $\pi = v_0, v_1, \dots, v_n$ tel que v_n est un sommet sans successeur.

Stratégies.

- Une stratégie pour P_0 est une fonction $\sigma : V^*V_0 \rightarrow V$ t.q. $\sigma(\pi v) \in vE := \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ ($\pi \in V^*, v \in V$).
- Une stratégie σ s'appelle *positionnelle* (sans mémoire) si $\sigma : V_0 \rightarrow V$. Elle s'appelle à *mémoire finie* si $\sigma : V_0 \times M \rightarrow V$, où M est une mémoire finie, avec mise-à-jour $\text{upd} : M \times V_0 \rightarrow M$.
- Une partie $\pi = v_0, v_1, \dots$ est conforme avec la stratégie σ si $v_{i+1} = \sigma(v_0 \dots v_i)$ pour tous i t.q. $v_i \in V_0$.

Jeu. Un jeu sur un graphe fini G est décrit par une condition de victoire $\text{Win} \subseteq V^* \cup V^\omega$ (V^ω est l'ensemble des séquences infinies sur V).

Gagnant.

- Une partie π de G est gagnée par P_0 si (1) π est infinie et appartient à Win ou (2) π est finie et le dernier sommet est dans V_1 .

- Une stratégie $\sigma : V^*V_0 \rightarrow V$ est gagnante pour P_0 à partir du sommet $v \in V$: toute partie conforme à σ et qui commence dans v , est gagnée par P_0 .
- Région gagnante W_0 de P_0 dans G : ensemble des sommets de G pour lesquels P_0 a une stratégie gagnante.

3 Jeux d'accessibilité

Win est l'ensemble des parties qui passent au moins une fois par $F \subseteq V$.

Attracteurs.

$$\begin{aligned} \text{Attr}_0^0(F) &= F \\ \text{Attr}_0^{n+1}(F) &= \text{Attr}_0^n(F) \cup \\ &\quad \{v \in V_0 \mid \exists w \in \text{Attr}_0^n(F), (v, w) \in E\} \\ &\quad \{v \in V_1 \mid \forall w \text{ t.q. } (v, w) \in E : w \in \text{Attr}_0^n(F)\} \end{aligned}$$

$$\text{Attr}_0^0(F) \subseteq \text{Attr}_0^1(F) \subseteq \dots \subseteq \text{Attr}_0^{|V|}(F)$$

$\text{Attr}_0^i(F)$ est l'ensemble des sommets à partir desquels P_0 peut arriver dans F après au plus i coups. $W_0 = \text{Attr}_0^{|V|}(F)$ est la **région gagnante** de P_0 et $V \setminus \text{Attr}_0^{|V|}(F)$ est la **région gagnante** de P_1 .

1. Décrivez un algorithme de complexité $O(|V| + |E|)$ pour calculer les régions gagnantes dans un jeu d'accessibilité.
2. Calculez les régions gagnantes du jeu de la figure 3 ($F = \{s_3, s_4\}$).
3. On redéfinit Win comme l'ensemble des parties qui passent au moins 2 fois par F .
 - Construisez un nouveau jeu d'accessibilité $G' = (V'_0, V'_1, E')$ et une fonction $f : V \rightarrow V'$ t.q. $v \in V$ est gagnant pour P_0 dans le jeu (G, Win) ssi $f(v)$ est gagnant pour P_0 dans le jeu d'accessibilité G' .
 - Est-il possible de gagner dans le jeu (G, Win) avec des stratégies positionnelles ($\sigma_0 : V_0 \rightarrow V$) ? Justifiez votre réponse.
4. Soit Win défini par un langage régulier $R \subseteq V^*$: une partie π appartient à Win si on peut l'écrire comme $\pi = \pi_1\pi_2$ avec $\pi_1 \in R$.
Proposez un algorithme pour calculer les régions gagnantes et de stratégies gagnantes dans ce jeu.

Example

