

1 Notations

On considère des jeux à deux joueurs, qui alternent leurs coups. Pour les jeux combinatoires on appelle les joueurs P_1 et P_2 .

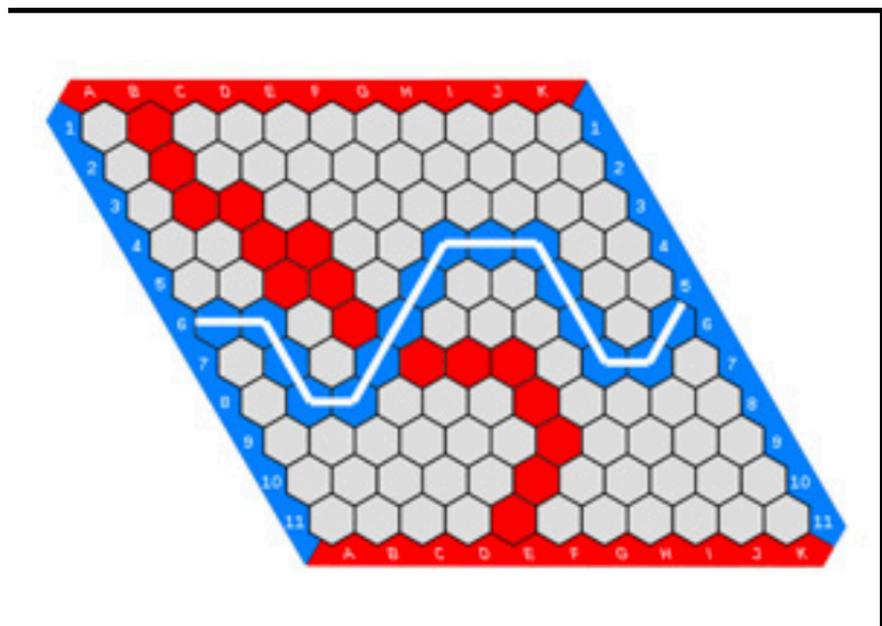
- Un jeu est joué sur une *arène* (exemples : tablier $n \times n$ de Hex, tablette de taille $m \times n$, ...).
- Une *partie* d'un jeu est une séquence alternée de coups de P_1 et P_2 .
- Un jeu est fini s'il n'existe pas de partie infinie.
- La *condition de victoire* détermine le gagnant d'une partie.

Exemples : pour Hex créer une ligne continue d'un coté au coté opposé appartenant au joueur, pour Chocolat ne pas prendre le dernier carré.

- Un jeu est appelé à *somme nulle* si toute partie est gagnée par P_1 ou par P_2 (mais pas les deux).
- Une partie est *indécise* s'il n'y a pas de gagnant.
- Une *stratégie* pour un joueur P_i indique le prochain coup du joueur P_i en fonction du début de partie déjà joué.
- Une stratégie σ_i de P_i est gagnante si toute partie que P_i joue conformément à σ_i est gagnée par P_i - donc, quelque soient les coups de son adversaire.
- Un jeu est appelé *déterminé* si soit P_1 ou P_2 possède une stratégie gagnante, quelque soit la position de départ.
- Nous avons vu que tout jeu fini, sans partie indécise, est déterminé.

Exemple : dans Hex et Chocolat, P_1 possède une stratégie gagnante à partir de la position initiale du jeu. Dans Nim, P_1 possède une stratégie gagnante à partir de la configuration initiale (n_1, \dots, n_k) si et seulement si $n_1 \text{ XOR } n_2 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_k \neq 0$.

2 HEX



Nous avons montré que (1) Hex n'a pas de partie indécise et que (2) le joueur qui commence (disons, R Rouge) possède une stratégie gagnante. On revoit maintenant les arguments.

1. Nous supposons par contradiction que le deuxième joueur (B Bleu) possède une stratégie gagnante σ . Nous définissons une stratégie σ' pour R : R joue le premier jeton n'importe où, en le marquant X . Après le premier coup de B , R joue selon σ : si σ demande de mettre un jeton sur la place marquée X , alors R choisit une place libre quelconque et y met le jeton ; cette place devient la nouvelle place marquée X . Si X est la dernière place libre du tablier, R joue cette place.

On montre que la stratégie σ' est gagnante pour R par contradiction. Supposons que B a une stratégie gagnante τ sur l'arène avec le jeton X , cette stratégie est toujours gagnante si on « oublie » X . Mais en « oubliant » le premier coup avec X , on obtient un jeu où B commence, et R joue σ . L'existence de τ contredit l'hypothèse que σ est stratégie gagnante pour le deuxième joueur.

2. Pour montrer qu'il n'y a pas de partie indécise dans Hex, nous montrons que si le tablier est rempli de jetons alors il existe soit une ligne bleue Ouest-Est ou une ligne rouge Nord-Sud.

Pour cela nous colorions en rouge les bords sud et nord, et en bleu les bords ouest et est.

Ensuite nous construisons en partant du coin sud-ouest un chemin par les arêtes des hexagones, satisfaisant l'invariant suivant : à gauche de l'arête actuelle la couleur est bleu, à droite rouge.

- (a) Comment doit-on former le chemin afin de préserver l'invariant ?
- (b) Argumentez que le chemin ne boucle pas.
- (c) Finissez l'argument, en montrant que le chemin ainsi construit atteint soit la rangée nord, ou la rangée est.

3 D'autres jeux combinatoires

1. Deux joueurs P_1, P_2 jouent en alternance, en posant des jetons sur une table ronde (sans qu'ils se superposent). Le premier joueur qui ne peut plus poser un jeton, perd.

Est-ce qu'un des joueurs a une stratégie gagnante ?

2. Deux joueurs P_1, P_2 jouent en alternance, en prenant 1,2 ou 3 jetons d'une pile de N jetons. Le joueur qui vide la pile a gagné.

Pour quelles valeurs de N est-ce que P_1 a une stratégie gagnante ?

3. Dans la variante « Misère Nim », le joueur qui prend le dernier jeton perd. Pour déterminer si la configuration de départ (n_1, \dots, n_p) est gagnante (W , winning) ou perdante (L , losing) pour P_1 on distingue 3 cas :
- (a) $n_i = 1$ pour tout i : qui de P_1 ou P_2 gagne ?
 - (b) $n_1 > 1$ et $n_i = 1$ pour tout $i > 1$: qui de P_1 ou P_2 gagne ?
 - (c) Sinon : on montre que si P_1 joue la stratégie du jeu de Nim usuel (vue en cours) tant qu'il y a au moins 2 tas avec > 1 jetons, alors elle gagne ce jeu.
4. Dans le jeu « Vider et diviser » on a deux piles avec m et n jetons, respectivement. La configuration $m = n = 1$ est terminale. Les deux joueurs P_1, P_2 s'alternent. Un coup consiste à vider une des piles et diviser le contenu de la deuxième sur les deux piles. Le premier joueur qui ne peut plus jouer, perd.
- Déterminer les configurations gagnantes pour P_1 .
5. Dans le jeu 2K le plateau est une rangée de n cases. Les deux joueurs P_1, P_2 s'alternent. Un coup consiste à écrire la lettre S ou O dans une case vide. Le premier joueur qui arrive à produire 3 cases consécutives contenant le mot SOS, gagne. Si la rangée est complète et ne contient pas SOS, alors la partie est indécise.
- (a) Supposons que $n = 4$ et que P_1 joue S dans la première case. Montrer que P_2 gagne.
 - (b) Montrer que P_1 gagne pour $n = 7$.
 - (c) Montrer que P_2 gagne pour $n = 2000$.