

## 1 Jeux réguliers sur arènes finies

**Arène de jeu, condition de victoire.**

$$\mathcal{A} = (V_0, V_1, E), \quad \text{Win} \subseteq V^\omega$$

**Jeux d'accessibilité.**  $\text{Win} = V^*FV^\omega$ ,  $F \subseteq V$

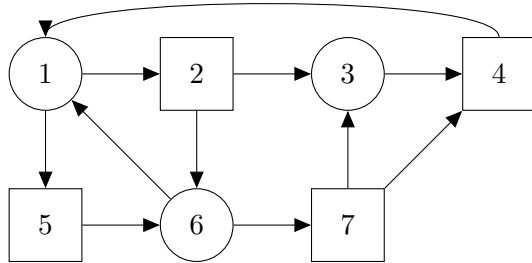
**Jeux de sûreté.**  $\text{Win} = V^\omega \setminus V^*BV^\omega$ ,  $B \subseteq V$   
Jeu d'accessibilité pour  $P_0$  = jeu de sûreté pour  $P_1$

**Jeux d'obligation.** Win est combinaison booléenne de condition d'accessibilité.

*Exemple* : il faut visiter les états  $p$  et  $q$  mais pas  $r$ , ou  $q$  et  $r$  mais pas  $p$ .

Formulation équivalente :

- $\text{Win} = \mathcal{F}$ , où  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ ,  $F_i \subseteq V$ .
- Une partie  $\pi = v_0, v_1, \dots$  est gagnante si  $\text{Occ}(\pi) \in \mathcal{F}$ .  
Notation :  $\text{Occ}(\pi) = \{v \mid \exists i \text{ t.q. } v = v_i\}$  l'ensemble des sommets visités par  $\pi$ .



Victoire :  $\pi \in \text{Win}$  si et seulement si  $\{2, 7\} \subseteq \text{Occ}(\pi)$ . Pour gagner,  $P_0$  doit utiliser de la mémoire dans l'état 1 : il doit visiter les états 2 et 5.

Solution pour jeux d'obligation : réduction aux jeux avec condition **faible de parité**.

On note par  $W_0$  et  $W_1$  les régions gagnantes de  $P_0$  et  $P_1$ .

**Réduction de jeu**  $(G, \text{Win}) \leq (G', \text{Win}')$  .

On transforme le jeu  $(G, \text{Win})$  en un jeu (plus grand)  $(G', \text{Win}')$ . Le cas usuel est quand  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$ , où  $V' = V \times M$  et  $M$  est un ensemble fini (mémoire). On distingue  $m_0 \in M$  comme valeur initiale de la mémoire. On a une réduction de jeu si pour tout sommet  $v \in V$  :  $v \in W_0$  dans  $(G, \text{Win})$  ssi  $(v, m_0) \in W'_0$  dans  $(G', \text{Win}')$ .

**Question.**

1. Un ensemble de sommets  $U \subseteq V$  s'appelle *i-piège* si (1) pour tout  $v \in U \cap V_i : \{w : (v, w) \in E\} \subseteq U$ , et (2) pour tout  $v \in U \cap V_{1-i} : \{w : (v, w) \in E\} \cap U \neq \emptyset$ .

Justifiez que le complémentaire d'un attracteur  $\text{Attr}_i(F)$  (attracteur pour  $P_i$ ) est un *i-piège*.

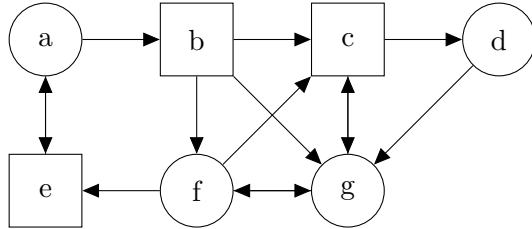
2. Un ensemble de sommets  $U \subseteq V$  induit un sous-jeu de  $G$  si tout sommet  $u \in U$  sans successeur dans  $U$ , n'a pas de successeurs dans  $V$  non plus.

Justifiez que si  $\sigma$  est une stratégie gagnante pour  $P_0$  dans le sous-jeu  $(G|_U, \text{Win})$  t.q.  $U$  est 1-piège, alors  $\sigma$  est gagnante pour  $P_0$  dans le jeu  $(G, \text{Win})$  pour tous les sommets de  $W_0|_U$  (ce dernier ensemble désigne la région gagnante de  $P_0$  dans le sou-jeu  $(G|_U, \text{Win})$ ).

**Jeux faibles de parité.** Win : la *plus grande* couleur rencontrée sur un chemin maximal doit être paire. Formulation équivalente :

$$\pi \in \text{Win} \quad \text{ssi} \quad \max\{\chi(v) \mid v \in \text{Occ}(\pi)\} \text{ est pair}$$

*Exemple.*



$$\chi(a) = \chi(e) = 0, \chi(b) = \chi(f) = 1, \chi(c) = \chi(g) = 2, \chi(d) = 3.$$

- $d \in W_1$  et  $\text{Attr}_1(d) = \{d, c, b\} \subseteq W_1$
- $V' = V \setminus \{b, c, d\}$  est *1-piège*, c-à-d  $P_0$  peut garder le jeu dans  $V'$ . Dans  $V'$ , la couleur maximale est 2.

On a  $\text{Attr}_0(g) |_{V'} = \{g, f\} \subseteq W_0$  (pourquoi  $g, f$  sont-ils gagnants dans le jeu entier?)

- $V'' = V' \setminus \{f, g\}$  est *0-piège*, c-à-d  $P_1$  peut garder le jeu dans  $V''$ . Donc on peut calculer la région gagnante de  $P_1$  dans ce sous-jeu :  $W_1 |_{V''} = \emptyset, W_0 |_{V''} = \{a, e\}$

Conclusion :  $W_0 = \{a, e, f, g\}, W_1 = \{b, c, d\}$ . Les deux joueurs ont des stratégies gagnantes positionnelles (stratégies d'attracteur).

Solution générale pour les jeux faibles de parité : décomposition successive de l'arène en attracteurs. On calcule les régions gagnantes en temps polynomial, et les stratégies gagnantes sont positionnelles.