

# 1 Jeux réguliers sur arènes finies

**Arène de jeu.**

$$\mathcal{A} = (V_0, V_1, E)$$

- Deux joueurs  $P_0$  et  $P_1$  (ou **Eve** et **Adam**). L'ensemble  $V = V_0 \cup V_1$  des sommets du graphe est partitionné entre les deux joueurs :  $V_0$  appartient à  $P_0$  et  $V_1$  à  $P_1$ .
- $(V, E)$  est un graphe orienté ( $E \subseteq V \times V$ ), en général fini.

On note  $\text{post}(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ .

**Parties.** Une **partie**  $\pi$  du jeu est un chemin **maximal** dans  $\mathcal{A}$  :

- soit un chemin infini  $\pi = v_0, v_1, \dots$
- ou un chemin fini  $\pi = v_0, v_1, \dots, v_n$  tel que  $v_n$  est un sommet sans successeur (puits).

**Stratégies.**

- Une stratégie pour  $P_0$  est une fonction  $\sigma : V^*V_0 \rightarrow V$  t.q.  $\sigma(\pi v) \in \text{post}(v)$ . Ici,  $\pi \in V^*$  (historique de la partie),  $v \in V$ .
- Une partie  $\pi = v_0, v_1, \dots$  est conforme avec la stratégie  $\sigma$  si  $v_{i+1} = \sigma(v_0 \cdots v_i)$  pour tous  $i$  t.q.  $v_i \in V_0$ .

**Jeu.** Un jeu sur un arène fini  $\mathcal{A}$  est donné par une condition de victoire pour  $P_0$  :  $\text{Win} \subseteq V^* \cup V^\omega$ .

**Gagnant.**

- Une partie  $\pi$  est gagnée par  $P_0$  si  $\pi \in \text{Win}$ .
- $\sigma : V^*V_0 \rightarrow V$  est une stratégie gagnante pour  $P_0$  à partir de  $v \in V$  si toute partie *maximale* conforme à  $\sigma$  et qui commence en  $v$  est gagnée par  $P_0$ .
- Région gagnante  $W_0$  de  $P_0$  : ensemble des sommets à partir desquels  $P_0$  a une stratégie gagnante.

## 2 Jeux d'accessibilité

On fixe un ensemble  $F \subseteq V$ . Une partie est gagnée par  $P_0$  si elle passe par  $F$  (Win =  $V^*F(V^* \cup V^\omega)$ ).

**Attracteurs.**

$$\begin{aligned} \text{Attr}_0^{(0)}(F) &= F \\ \text{Attr}_0^{(n+1)}(F) &= \text{Attr}_0^{(n)}(F) \cup \\ &\quad \{v \in V_0 \mid \text{post}(v) \cap \text{Attr}_0^{(n)}(F) \neq \emptyset\} \cup \\ &\quad \{v \in V_1 \mid \text{post}(v) \subseteq \text{Attr}_0^{(n)}(F)\} \end{aligned}$$

$$\text{Attr}_0^{(0)}(F) \subseteq \text{Attr}_0^{(1)}(F) \subseteq \dots \subseteq \text{Attr}_0^{(|V|)}(F) =: \text{Attr}_0(F)$$

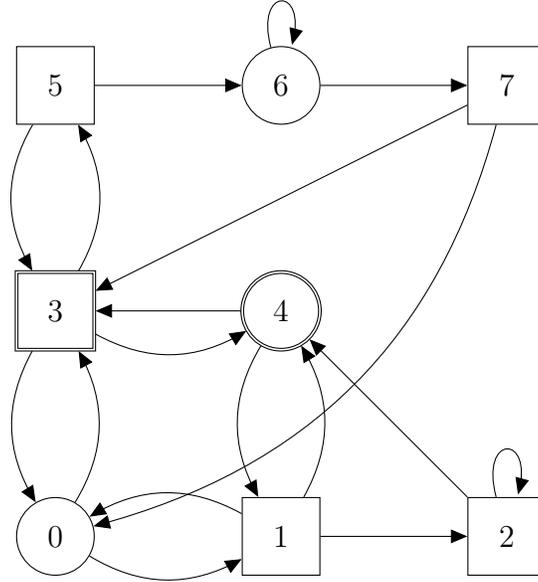
$\text{Attr}_0^{(i)}(F)$  représente l'ensemble des sommets à partir desquels  $P_0$  peut arriver dans  $F$  après *au plus*  $i$  coups. L'ensemble  $\text{Attr}_0(F)$  est la **région gagnante** de  $P_0$  et son complémentaire  $V \setminus \text{Attr}_0(F)$  est la **région gagnante** de  $P_1$  dans le jeu d'accessibilité vers  $F$ .

- L'attracteur  $\text{Attr}_1(G)$  de  $P_1$  vers un ensemble  $G$  est défini de manière symétrique, en inversant  $P_0$  et  $P_1$ .
- Le complémentaire d'un attracteur de  $P_0$ , donc un ensemble de la forme  $U = V \setminus \text{Attr}_0(F)$ , est un **piège** pour  $P_0$  (0-piège) :  $P_0$  ne peut pas quitter  $U$ , et  $P_1$  a toujours un coup qui lui permet de rester dans  $U$ .

Calculez les régions gagnantes et des stratégies gagnantes de  $P_0$  et de  $P_1$  sur l'exemple ci-dessous.

**Jeux de sûreté.** Etant donné  $F \subseteq V$ , Win est l'ensemble des chemins qui évitent  $F$ .

Jeu d'accessibilité pour  $P_0$  = jeu de sûreté pour  $P_1$



**Accessibilité - variantes.** Etant donné une arène  $\mathcal{A} = (V_0, V_1, E)$  et des sous-ensembles  $F, F_1, F_2 \subseteq V$ , donnez des algorithmes pour calculer les régions gagnantes des 2 joueurs, ainsi que des stratégies gagnantes, pour les conditions de victoire ci-dessous. Est-ce que ces jeux sont déterminés? Est-ce que les stratégies sont positionnelles? Si la réponse est non, indiquez des contre-exemples.

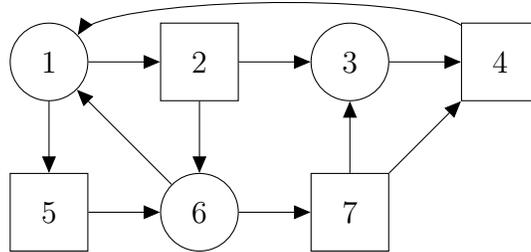
1.  $P_0$  doit passer par  $F_1$ , et plus tard par  $F_2$ .
2.  $P_0$  a le droit de passer au plus 1 fois par  $F$ .
3.  $P_0$  a le droit de passer au plus  $k$  fois par  $F$  ( $k$  fixé).
4.  $P_0$  doit passer plus que  $n = |V|$  fois par  $F$ .

**Jeux d'obligation.** Win est combinaison booléenne de condition d'accessibilité.

*Exemple* : il faut visiter soit les états  $p$  et  $q$  mais pas  $r$ , ou  $q$  et  $r$  mais pas  $p$ .

Formulation équivalente :

- Win =  $\mathcal{F}$ , où  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ ,  $F_i \subseteq V$ .
- Une partie  $\pi = v_0, v_1, \dots$  est gagnante si  $\text{Occ}(\pi) \in \mathcal{F}$ .  
Notation :  $\text{Occ}(\pi) = \{v \mid \exists i \text{ t.q. } v = v_i\}$  l'ensemble des sommets visités par  $\pi$ .



Victoire :  $\pi \in \text{Win}$  si et seulement si  $\{2, 7\} \subseteq \text{Occ}(\pi)$ . Pour gagner,  $P_0$  doit utiliser de la mémoire dans l'état 1 : il doit visiter les états 2 et 5.

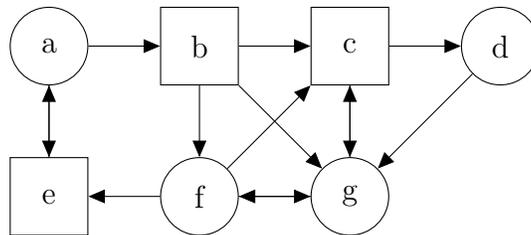
Solution pour jeux d'obligation : réduction aux jeux avec condition faible de parité.

### Jeux faibles de parité.

- L'arène  $\mathcal{A}$  est équipée d'une fonction de priorité  $p : V \rightarrow \{0, \dots, d\}$  :  $p(v)$  est la priorité (couleur) du sommet  $v$ .
- Win est l'ensemble des chemins dont la plus grande priorité est paire :

$$\pi \in \text{Win} \quad \text{ssi} \quad \max\{p(v) \mid v \in \text{Occ}(\pi)\} \text{ est pair}$$

*Exemple.*



$$p(a) = p(e) = 0, p(b) = p(f) = 1, p(c) = p(g) = 2, p(d) = 3.$$

- $d \in W_1$  et  $\text{Attr}_1(d) = \{d, c, b\} \subseteq W_1$
- $V' = V \setminus \{b, c, d\}$  est piège pour  $P_1$ , c-à-d  $P_0$  peut garder le jeu dans  $V'$ . Dans  $V'$ ,  $P_0$  peut éviter la couleur 3, et  $\text{Attr}_0(g) \upharpoonright_{V'} = \{g, f\} \subseteq W_0$
- $V'' = V' \setminus \{f, g\}$  est piège pour  $P_0$ , c-à-d  $P_1$  peut garder le jeu dans  $V''$ .

$$W_1 \upharpoonright_{V''} = \emptyset, W_0 \upharpoonright_{V''} = \{a, e\}$$

Conclusion :  $W_0 = \{a, e, f, g\}$ ,  $W_1 = \{b, c, d\}$ . Les deux joueurs ont des stratégies gagnantes positionnelles (stratégies d'attracteur).

Solution pour jeux faibles de parité : décomposition de l'arène en attracteurs.