

IF222, Introduction aux jeux
Büchi, parité

Rappel : Une réduction d'un jeu \mathcal{G} vers un jeu \mathcal{G}' transforme chaque instance $(\mathcal{A}, \text{Win}, v \in V)$ de \mathcal{G} en instance $(\mathcal{A}', \text{Win}', v' \in V')$ de \mathcal{G}' t.q. v est gagnant pour P_0 dans \mathcal{G} ssi v' est gagnant pour P_0 dans \mathcal{G}' .

1 Büchi

Les jeux suivants sont joués sur des arènes finies (sans sommet puits) :

$$\mathcal{A} = (V_0, V_1, E), \quad \text{Win} \subseteq V^\omega$$

Jeu de Büchi. $\text{Win} = (V^* F)^\omega$: une partie π est gagnée par P_0 si elle passe infiniment souvent par F :

$$\text{Inf}(\pi) \cap F \neq \emptyset$$

Jeu de co-Büchi. La condition est duale à celle de Büchi : π est gagnée par P_0 si elle passe finiment souvent par F

$$\text{Inf}(\pi) \cap F = \emptyset$$

Pour chacune des condition de victoire Win ci dessous il faut expliquer comment déterminer les régions gagnantes des deux joueurs, ainsi que leurs stratégies gagnantes. Vous pouvez donner des réductions vers un jeu de Büchi.

Jeu de Büchi avec obstacles. Win est constitué de deux ensembles, $B, G \subseteq V$. Une partie est gagnée par P_0 si elle passe infiniment souvent par G et jamais par B .

Jeu de Büchi avec obstacles 2. Win est constitué de deux ensembles, $B, G \subseteq V$. Une partie est gagnée par P_0 si elle passe infiniment souvent par G et finiment souvent par B .

Jeu de Büchi généralisé. Win est constitué de k ensembles $G_1, \dots, G_k \subseteq V$. Une partie est gagnée par P_0 si elle passe infiniment souvent par G_i , pour tout $1 \leq i \leq k$.

2 Parité

Jeu de parité. Un jeu de parité est décrit par une arène où chaque sommet $v \in V$ a une priorité $p(v) \in \{0, 1, \dots, k\}$. Une partie π est gagnée par P_0 si $\max(\text{Inf}(\pi))$ est pair.

Algorithme de McNaughton Zielonka.

```

Input: Parity game  $G = (V_0, V_1, E)$ ,  $p : V \rightarrow \{0, \dots, k\}$ 
Output: Parity( $G$ ) =  $(W_0, W_1)$ 

if  $V = \emptyset$  then
  | return  $(\emptyset, \emptyset)$ 

   $i := k \bmod 2$  ;                               /* parity of maximal priority */
   $U := \{v \in V : p(v) = k\}$  ;                 /* vertices of maximal priority */
   $A := \text{Attr}_i(U)$ ;
   $(W'_i, W'_{1-i}) = \text{Parity}(G \setminus A)$ ;
  if  $W'_{1-i} = \emptyset$  then
    |  $W_i := W'_i \cup A$  ;
    |  $W_{1-i} := \emptyset$  ;
    | return  $(W_i, W_{1-i})$ ;
  else
    |  $B := \text{Attr}_{1-i}(W'_{1-i})$ ;                 /* Attractor in  $G$  */
    |  $(W''_i, W''_{1-i}) = \text{Parity}(G \setminus B)$ ;
    |  $W_i := W''_i$  ;
    |  $W_{1-i} := B \cup W''_{1-i}$  ;
    | return  $(W_i, W_{1-i})$ ;
  end

```

Jeu de boucle. Un jeu de boucle se joue sur une arène \mathcal{A} avec coloriage des sommets $\chi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Une partie finit dès qu'on rencontre un sommet déjà visité (i.e., dès qu'on ferme une boucle). La partie est gagnée par P_0 si la couleur maximale sur la boucle est paire, et par P_1 sinon.

1. Donnez une réduction des jeux de max-parité aux jeux de boucle. (*Indication* : vous pouvez supposer pour le jeu de parité que les stratégies gagnantes sont positionnelles.)
2. Donnez une réduction des jeux de boucle aux jeux de max-parité.