

## Jeux mean-payoff.

Un jeu mean-payoff  $(\mathcal{A}, \alpha, d, \omega)$  se joue sur une arène  $\mathcal{A} = (V_0, V_1, E)$  sans puits, avec des poids entiers sur les arêtes :  $\omega : E \rightarrow \{-d, \dots, 0, \dots, d\}$ . Une partie est un chemin infini  $e_1, e_2, \dots, e_i \in E$ .

Le joueur  $P_0$  gagne à partir du sommet  $v$  si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(e_i) \geq \alpha$ .

**[Ehrenfeucht/Mycielski].** Pour tout jeu mean-payoff, tout sommet initial  $v$  possède une valeur  $a(v) \in \mathbb{Z}$  t.q.

—  $P_0$  a une stratégie garantissant

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(e_i) \geq a(v),$$

—  $P_1$  a une stratégie garantissant

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(e_i) \leq a(v).$$

De plus, les deux stratégies sont positionnelles. (Donc, une partie jouée conformément à ces stratégies satisfait

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(e_i) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(e_i) = a(v).$$

**Question 1.** Nous montrons une réduction polynomiale des jeux de max-parité vers les jeux mean-payoff.

A partir d'un jeu de max-parité  $(\mathcal{A}, \chi : \{0, \dots, d\})$  avec  $|V| = n$  on construit un jeu mean-payoff  $(\mathcal{A}, 0, n^d, \omega)$  en mettant

$$\omega(u, v) = (-n)^i \quad \text{si} \quad \chi(u) = i.$$

Montrez que pour tout sommet initial  $v$  et toutes stratégies positionnelles  $\sigma_0, \sigma_1$  : la partie  $\pi$  jouée à partir de  $v$  en appliquant les stratégies  $\sigma_0, \sigma_1$  satisfait

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(e_i) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max(\chi(\text{Inf}(\pi))) \text{ est pair}$$

**Question 2.** Nous montrons que le problème des jeux mean-payoff (tout comme celui des jeux de parité) appartient à  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ . Pour cela on utilise le fait que les stratégies gagnantes sont positionnelles.

On peut utiliser un algorithme dû à Karp, qui calcule pour un graphe  $G = (V, E)$  un cycle de poids moyen minimal (ou maximal), en temps  $O(|V||E|)$ .

1. Montrez qu'on peut déterminer en temps polynomial si la stratégie positionnelle  $\sigma_0$  est gagnante pour  $P_0$  à partir du sommet  $v$ .

*Indication :*  $\sigma_0$  est gagnante à partir de  $v$  ssi le poids moyen de tout cycle accessible à partir de  $v$  dans le sous-graphe  $G|_{\sigma_0}$  est au moins  $\alpha$ .

2. Déduisez que le problème des jeux mean-payoff appartient à  $\text{NP} \cap \text{coNP}$ .