

Cours 1 - jeux combinatoires

Exemple 1 : Chomp - jeu de la tablette de chocolat

Etant donnée une tablette de chocolat (rectangle $m \times n$) avec le carré $(1,1)$ empoisonné, 2 joueurs P1 et P2 jouent de façon alternée, avec P1 qui commence. Chaque joueur choisit une position (i,j) et enlève les carrés en dessous et à droite de (i,j) (donc tout carré (k,m) avec $k \geq i$ et $m \geq j$). Le joueur qui prend le dernier carré $(1,1)$, perd.

On veut savoir quel joueur gagne ce jeu. Le joueur P1 gagne si, quelque soient les coups de P2, il ne prend pas le dernier carré. Une *stratégie* de P1 est une façon de jouer, c'est à dire, de répondre aux coups de P2. Une partie du jeu est une séquence alternée de coups, avec P1 qui commence. Une partie est *conforme à une stratégie* de P1 si tous les coups de P1 sont conformes à la stratégie. Une stratégie S de P1 est *gagnante*, si toute partie conforme à S est gagnée par P1. Toutes ces définitions sont analogues pour P2.

On montre que dans Chomp, P1 a toujours une stratégie gagnante.

1. Cas $m = n$: P1 joue la stratégie S suivante

1. P1 choisit d'abord $(2,2)$ // il reste la 1ere ligne et la 1ere colonne
2. Si P2 prend $(1,i)$, alors P1 prend $(i,1)$.
- 2'. Si P2 prend $(i,1)$, alors P1 prend $(1,i)$.

La stratégie S est gagnante pour P1.

2 Cas general

On montre que P1 a une stratégie gagnante par l'absurde.

Supposons que P2 a une stratégie gagnante : si P1 choisit (m,n) , ensuite P2 peut jouer un coup (i,j) , qui est gagnant par hypothèse. Alors P1 aurait pu jouer lui-même (i,j) dès le départ, et gagner. Contradiction.

(Rq : cette technique s'appelle "vol de stratégie")

Rq : Si $m \neq n$ on n'a pas de description compacte des stratégies gagnantes de P1.

Ex : $m=2, n=4$

P1: $(2,4)$

si P2: $(1,2)$ or $(2,1)$ ok

si P2: $(1,3)$ ok (cas 1)

si P2: $(1,4)$ alors P1: $(2,3)$

si P2: (2,2) alors P1: (1,3)
si P2: (2,3) alors P1: (1,4)

=====

Jeux combinatoires (Chomp, Nim, ...) - caractéristiques :

Nombre fini de positions de jeu.

Jeu impartial : à chaque position, P1 et P2 on les mêmes coups possibles.

P1 et P2 jouent en alternance >> une alternance de coups = partie

Partie $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots$ (\rightarrow coup de P1, \rightarrow coup de P2)

Le joueur qui ne peut plus bouger, perd.

Jeu fini : toutes les parties sont finies.

Un jeu est *déterminé* si soit P1 ou P2 a une stratégie gagnante. (On considère que de jeux "à somme nulle", ou aucune partie n'est gagnée par P1 et P2 en même temps).

Thm: tout jeu fini est déterminé.

preuve : on considère l'arbre de jeu, où les noeuds sont les positions du jeu et les arêtes les coups possibles; on peut voir les noeuds de niveau 0,2,... comme noeuds existentiels et ceux aux niveaux 1,3, ... comme noeuds universels. Les premiers appartiennent à P1, les deuxièmes à P2. On montre le résultat par induction sur la hauteur, en partant des feuilles.

P = ensemble des positions de jeu

$P = W \cup L$

W = ensemble des positions gagnantes de P1

L = ensemble des positions perdantes de P1

Rq. W, L satisfont :

1. toute position "dead" (sans successeur) est dans L
2. $p \in L$ ssi tous les coups (p,p') mènent à $p' \in W$
3. $p \in W$ ssi il existe un coup (p,p') où $p' \in L$

=====

Exemple : Nim

p tas, avec n_1, \dots, n_p jetons chacun

Règle du jeu: on choisit un tas et on enlève >0 jetons de ce tas
Le joueur qui prend le dernier jeton, gagne.

Si m, n sont des nombres, on écrit $m \text{ XOR } n$ pour le nombre obtenu en prenant le XOR bitwise de m et n .

Ex : $6 \text{ XOR } 11 = 13$ ($110 \text{ XOR } 1011 = 1101$)

Thm (Bouton, 1902)

$(n_1, \dots, n_p) \in W$ ssi $(n_1 \text{ XOR } n_2 \dots \text{ XOR } n_p) \neq 0$

On vérifie les conditions de W et L de la page précédente :

Cond 1: ok ($n_1 = \dots = n_p = 0$)

Cond 2: $p = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_p) \in L$, $p' = (n_1, \dots, m_i, \dots, n_p)$
 $m_i < n_i$

$k = n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_{i-1} \text{ XOR } n_{i+1} \dots \text{ XOR } n_p$

$k \text{ XOR } n_i = 0$ ssi $k = n_i$, donc $k \text{ XOR } m_i \neq 0$

Cond 3: $p = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_p) \in W$, donc
 $a = n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p \neq 0$

Soit r le bit le plus fort de a égal à 1.
Il existe i tq $(n_i)_r = 1$. Donc, $n_i \text{ XOR } a < n_i$.

L'action de P_1 dans $p \neq 0$ consiste à réduire le i -ème tas à m_i :

$n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } m_i \dots \text{ XOR } n_p = n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } (n_i \text{ XOR } a) \dots \text{ XOR } n_p = a \text{ XOR } a = 0$

=====

Exemple : Hex (<https://fr.wikipedia.org/wiki/Hex>)

P_1 doit former chemin rouge N-S, P_2 chemin bleu O-E

Lemma: il n'y a pas de partie indéfinie dans Hex (c-a-d : si l'arène est remplie de jetons rouges et bleus, alors il existe soit un chemin N-S rouge, ou un chemin E-O bleu).

Hex est fini, donc déterminé.

Thm: P_1 a une stratégie gagnante pour toute arène $n \times n$.

Preuve par absurde (vol de stratégie) : supposons que P2 a une stratégie gagnante S

P1 commence par un coup arbitraire - il marque ce coup par un jeton spécial, disons X.
Après le premier coup de P2, P1 commence à jouer la stratégie S.
Si S indique de mettre un jeton sur la place "X", P1 choisit une autre place arbitraire et met X sur celle ci.

Rq à chaque instant, les jetons de P1 correspondent à la stratégie S, sauf peut-être le jeton X.

On montre que toute partie est gagnée par P1 : si P2 réussit à former un chemin E-O, alors il aurait réussi cela aussi sans la présence du jeton X.
Donc S n'aurait pas été gagnante pour P1 à la place de P2 (en tant que 2eme joueur).

Rq : on ne connaît pas de stratégie explicite pour $n > 9$.

preuve lemme : si l'arène est couverte par des jetons rouge/bleu, alors il existe soit un chemin rouge N-S, ou un chemin bleu E-O

On colorie en rouge la région en dessous de la rangée sud, et en bleu celle à gauche de la rangée ouest.

Ensuite on construit un chemin en partant du coin sud-ouest, et en suivant les arêtes, pour préserver l'invariant suivant : la couleur à gauche de l'arête actuelle est bleu, et la couleur à droite est rouge.
Si on montre que le chemin atteint le côté "est", alors P2 a gagné.
Si le chemin atteint le côté "nord", c'est P1 qui gagne.

Si le chemin arrive dans un noeud de degré 3, on va à gauche/droite selon la couleur de la 3eme région.

Si le chemin arrive dans un noeud de degré 2, ça doit être sur le côté "sud" ou "ouest", et l'invariant est préservé à cause du coloriage des 2 régions.

De plus en utilisant l'invariant on montre que le chemin ne peut pas boucler.