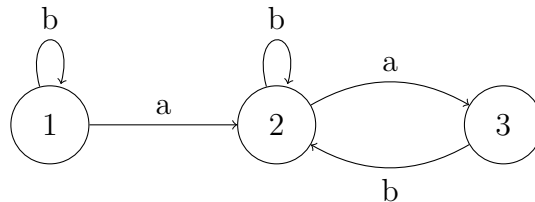


1 Automates à parité et automates de Büchi

On rappelle qu'un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ de Büchi accepte un mot infini $w \in \Sigma^\omega$ si \mathcal{A} a une exécution ρ sur w telle que $\text{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$. Un automate à parité $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \chi)$ avec fonction de coloriage $\chi : Q \rightarrow \mathbb{N}$ accepte un mot infini w si \mathcal{A} a une exécution ρ sur w telle que la couleur maximale répétée infiniment souvent, $\max(\text{Inf}(\chi(\rho)))$, est paire.

1.1 Exemple

L'automate suivant \mathcal{A} est un automate à parité, où chaque état est marqué par sa couleur.



1. Quel est le langage reconnu par \mathcal{A} ?
2. Construisez un automate de Büchi équivalent.

1.2 Parité et Büchi

Montrez les 2 assertions suivantes :

1. On peut transformer chaque automate de Büchi en automate à parité équivalent, en préservant l'ensemble des états ainsi que la relation de transition.
2. Pour chaque automate à parité on peut construire un automate de Büchi équivalent, dont la taille est polynomiale en la taille de l'automate de départ.

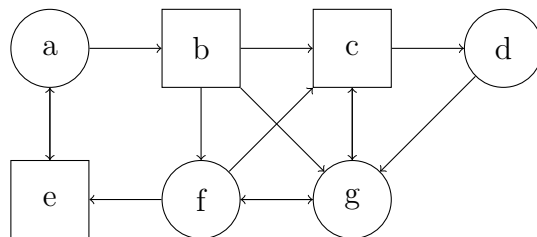
2 Jeux de parité

On rappelle qu'une arène G est un graphe $(V = V_0 \cup V_1, E)$ où (V_0, V_1) est une partition de l'ensemble V des sommets. On suppose que de tout sommet part au moins une arête.

On considère dans cette partie des *jeux de parité* sur des arènes finies, où les sommets sont coloriés par une fonction $\chi : V \rightarrow \mathbb{N}$, qui associe à chaque sommet v la couleur $\chi(v)$. Une partie infinie ρ est gagnée par J_0 si la couleur maximale rencontrée infiniment souvent est paire, et par J_1 sinon.

2.1 Exemple

Le jeu suivant est un jeu à parité, où $\chi(a) = \chi(e) = 0$, $\chi(b) = \chi(f) = 1$, $\chi(c) = \chi(g) = 2$, $\chi(d) = 3$:



Déterminez Win_0 et indiquez une stratégie gagnante pour J_0 .

2.2 Jeux de parité et algorithmes

On rappelle que les jeux de parité sont déterminés et qu'ils ont des stratégies gagnantes positionnelles. Autrement dit, à partir de chaque sommet v il y a exactement un joueur qui gagne, et ceci avec une stratégie positionnelle σ .

Proposez un algorithme *polynomial* qui vérifie pour une arène coloriée \mathcal{A} , un sommet $v \in V$, et une stratégie positionnelle $\sigma : V_0 \rightarrow V$ de J_0 , que σ est gagnante pour J_0 à partir de v .

2.3 Jeux de parité et jeux finis

On fixe un sommet v_0 de départ et on définit un nouveau jeu G' , où les parties sont finies. Le jeu s'arrête dès que le jeton arrive à un sommet

qui a déjà été visité. Une partie est donc un chemin fini v_0, \dots, v_n tel que les sommets v_0, \dots, v_{n-1} sont deux à deux distincts et que v_n soit égal à v_k pour un certain $0 \leq k \leq n-1$. Le joueur J_0 gagne si la couleur maximale sur la boucle, $\max\{\chi(v_k), \dots, \chi(v_n)\}$, est paire et J_1 gagne sinon.

On veut montrer que le jeu de parité G à partir de v_0 et G' sont *équivalents*, c'est à dire qu'un joueur gagne le jeu G si et seulement si il gagne le jeu G' .

1. Montrer que si un joueur J_k a une stratégie *positionnelle* σ qui est gagnante dans le jeu G , alors σ est une stratégie gagnante de J_k dans le jeu G' .
2. Montrer que si un joueur a une stratégie gagnante dans le jeu G' , alors il a une stratégie gagnante dans le jeu G .

3 Variantes de jeux de parité

Dans cette partie, on se donne un jeu de parité sur une arène $G = (V, E)$ dont les sommets sont coloriés par $\chi : V \rightarrow \mathbb{N}$. On modifie un peu les règles dans l'espoir de rétablir l'équilibre entre les joueurs.

3.1 Choix du camp

On a deux joueurs, Adam et Ève. Adam joue le premier coup, et Ève choisit son camp, c'est-à-dire qu'elle décide si elle joue en tant que J_0 ou J_1 ; ensuite, le jeu se déroule normalement. Montrer qu'alors Ève a une stratégie pour gagner quel que soit le sommet de départ.

3.2 Jeu à n coups de handicap

Le joueur J_1 étant réputé plus faible que le joueur J_0 , on lui accorde le droit de jouer les n premiers coups de J_0 à la place de son adversaire; ensuite, le jeu se déroule normalement.

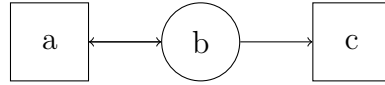
Une stratégie positionnelle pour J_1 est une application $\sigma : V \rightarrow V$ (pour un sommet $v \in V_0$, $\sigma(v)$ est le coup de J_1 quand il joue à la place de J_0).

1. On suppose tout d'abord $n = 1$. On construit une arène

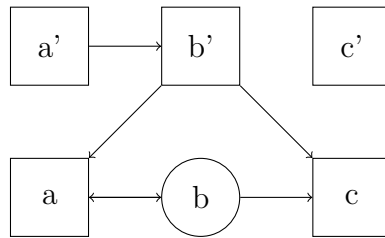
$$G' = (V = (V_0, V_1 \cup V'), E \cup E')$$

à partir de G de la manière suivante : V' est une copie de V dont tous les sommets appartiennent à J_1 (on note v' la copie d'un sommet v) ; et pour toute arête $v \rightarrow w$ de G , on ajoute dans E' une arête $v' \rightarrow w'$ si $v \in V_1$, et une arête $v' \rightarrow w$ si $v \in V_0$.

Par exemple, si G est l'arène



l'arène G' sera la suivante :



Toute partie à 1 coup de handicap jouée dans G à partir d'un sommet v peut être simulée par une partie de G' jouée à partir de la copie v' : si $v \in V_1$, le coup $v \rightarrow w$ que joue J_1 est simulé par $v' \rightarrow w'$ et on reste dans V' , si $v \in V_0$, le coup $v \rightarrow w$ que joue J_1 à la place de J_0 est simulé par $v' \rightarrow w$ et le reste de la partie se déroule comme dans G .

On colorie les sommets de G' comme dans le jeu d'origine : chaque sommet v garde sa couleur, et sa copie v' prend la même couleur.

Montrer que chaque joueur a une stratégie gagnante à partir de v dans le jeu d'origine si et seulement s'il a une stratégie gagnante à partir de v' dans le jeu de parité G' .

2. Montrer que dans le cas général (n quelconque) le jeu est déterminé, et que les stratégies gagnantes sont positionnelles.
3. Exprimer par un terme du μ -calcul l'ensemble des positions de G depuis lesquelles J_1 a une stratégie gagnante.

3.3 Variante du Président

Le joueur J_1 étant réputé plus faible que le joueur J_0 , on lui accorde le droit de jouer 1 coup de J_0 à la place de son adversaire (à n'importe quel moment de la partie) ; ensuite, le jeu se déroule normalement.

Montrer que le jeu est déterminé, et que les stratégies gagnantes sont positionnelles.