

Jeux sur des graphes finis

Arène de jeu

$$\mathcal{A} = (V_0, V_1, E)$$

- Deux joueurs J_0 et J_1 . L'ensemble des sommets est partitionné en deux ensembles disjoints V_0 (sommets appartenant à J_0) et V_1 (sommets appartenant à J_1).
- Ensemble d'arêtes $E \subseteq V \times V$, $V = V_0 \cup V_1$.

Parties

Une **partie** dans \mathcal{A} est

- soit un chemin infini $\pi = v_0, v_1, \dots$ dans le graphe (V, E) ,
- ou un chemin fini $\pi = v_0, v_1, \dots, v_n$ dans (V, E) tel que v_n n'a pas de successeur dans (V, E) .

.Jeux et stratégies

Jeux

Un jeu est décrit par une paire $(\mathcal{A}, \text{Win})$, où \mathcal{A} est une arène et $\text{Win} \subseteq V^\omega$ est la condition de victoire.

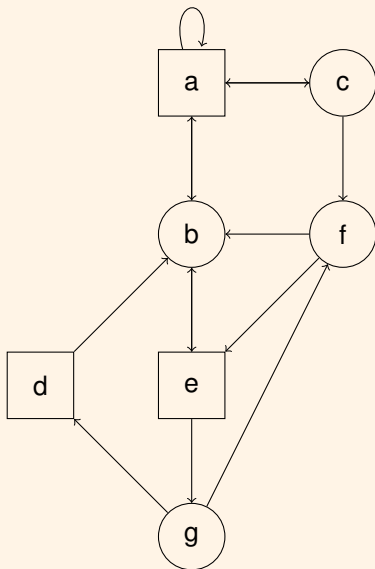
Exemples (où $F \subseteq V$ et $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(V)$) :

- jeux **d'accessibilité** : $\text{Win} = V^* F V^\omega$
- jeux **d'obligation** : $\text{Win} = F^\omega$ pour $F \in \mathcal{F}$
- jeux **de Büchi (répétition)** : $\text{Win} = (V^* F)^\omega$
- jeux **de Muller** : $\text{Win} = \{\pi \in V^\omega \mid \text{Inf}(\pi) \in \mathcal{F}\}$
- jeux **de parité**...

Stratégies

- Stratégie de J_0 : fonction $f : V^* V_0 \rightarrow V$
t.q. $f(\pi v) \in vE := \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$, où $\pi \in V^*$, $v \in V$.
- Partie $\pi = v_0, v_1, \dots$ conforme avec stratégie f de J_0 : $v_{i+1} = f(v_0 \cdots v_i)$
pour tout i t.q. $v_i \in V_0$.
- Stratégie **positionnelle** : $f : V_0 \rightarrow V$ t.q. $f(v) \in vE$ pour tout $v \in V_0$.

Example



$F = \{a, d\}$: J_0 gagne partout ;
 $F = \{e\}$: J_0 gagne partout sauf
dans a

Jeux d'accessibilité

Attracteurs

$$\begin{aligned}\text{Attr}_0^0(F) &= F \\ \text{Attr}_0^{n+1}(F) &= \text{Attr}_0^n(F) \cup \\ &\quad \{v \in V_0 \mid \exists w \in \text{Attr}_0^n(F), (v, w) \in E\} \\ &\quad \{v \in V_1 \mid \forall w \in \text{Attr}_0^n(F), (v, w) \in E\}\end{aligned}$$

$$\text{Attr}_0^0(F) \subseteq \text{Attr}_0^1(F) \subseteq \dots \subseteq \text{Attr}_0^{|V|}(F)$$

$\text{Attr}_0^i(F)$ est l'ensemble des nœuds à partir desquels J_0 peut forcer la partie d'arriver à F en moins de i coups. $\text{Attr}_0^{|V|}(F)$ est la **région gagnante** de J_0 , et $V \setminus \text{Attr}_0^{|V|}(F)$ est la région gagnante de J_1 .

Jeux d'accessibilité

Les jeux d'accessibilité sont **déterminés** : à partir de chaque sommet, un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Les stratégies gagnantes sont positionnelles (stratégies d'attracteur).

Jeux d'obligation

Définition

La condition de victoire d'un jeu d'obligation est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V)$ d'ensembles d'états. Le joueur J_0 gagne une partie π , si l'ensemble $\text{Occ}(\pi)$ d'états rencontrés dans π appartient à \mathcal{F} (i.e., combinaison booléenne de conditions d'accessibilité).

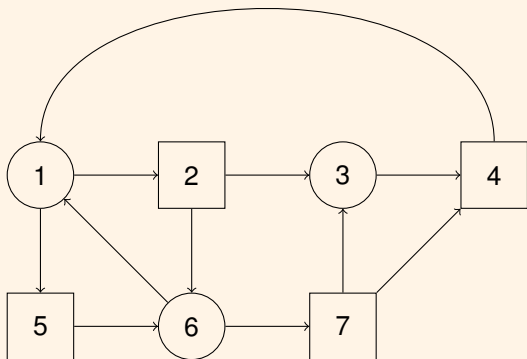
Réduction

On réduit un jeu d'obligation à un jeu plus simple (et plus grand) : jeu de **parité faible**.

- Dans un jeu de parité faible on colorie les sommets par des entiers : $\chi : V \rightarrow \mathbb{N}$. Le joueur J_0 gagne une partie π si $\max(\chi(\text{Occ}(\pi)))$ est pair.
- Réduction : arène $\mathcal{A}' = (V'_0, V'_1, E')$ avec $V'_0 = V_0 \times \mathcal{P}(V)$, $V'_1 = V_1 \times \mathcal{P}(V)$, $E' = \{(v, R) \rightarrow (w, R \cup \{v\}) \mid (v, w) \in E\}$. Coloriage : $\chi(v, R) = 2|R|$ si $R \in \mathcal{F}$; $\chi(v, R) = 2|R| - 1$ si $R \notin \mathcal{F}$.
- Les jeux de parité faible ont des stratégies gagnantes positionnelles. En conséquence, on peut obtenir des stratégies gagnantes à mémoire finie pour les jeux d'obligation.

Jeux de parité faible

Exemple : réduction



Pour la condition de victoire

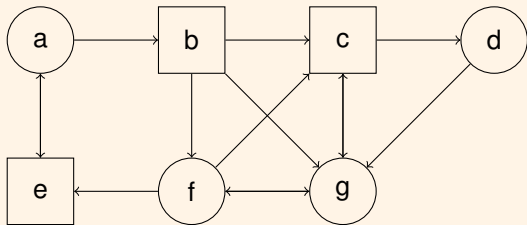
$\pi \in \text{Win}$ ssi $\{2, 7\} \subseteq \text{Occ}(\pi)$ le joueur J_0 a besoin de mémoire (1 bit) dans l'état 1 : il doit passer par 2 et 5 de façon alternée.

Partie π : 1, 2, 3, 4, ... dans jeu d'obligation.

Partie π' : $(1, \emptyset), (2, \{1\}), (3, \{1, 2\}), (4, \{1, 2, 3\}), \dots$ dans jeu de parité faible, avec $\chi(1, \emptyset) = -1, \chi(2, \{1\}) = 1, \chi(7, \{1, \dots, 6\}) = 12$.

Jeux de parité faible

Exemple



$\chi(a) = \chi(e) = 0, \chi(b) = \chi(f) = 1, \chi(c) = \chi(g) = 2, \chi(d) = 3.$

- $d \in \text{Win}_1$ et $\text{Attr}_1(d) = \{d, c, b\} \subseteq \text{Win}_1$
- $V' = V \setminus \{b, c, d\}$ est piège pour J_1 , donc définit sous-jeu pour J_0
 $\text{Attr}_0(g) \upharpoonright_{V'} = \{g, f\} \subseteq \text{Win}_0$
- $V'' = V' \setminus \{f, g\}$ piège pour J_0 , donc sous-jeu pour J_1
 $\text{Win}_1 \upharpoonright_{V''} = \emptyset, \text{Win}_0 \upharpoonright_{V''} = \{a, e\}$

Conclusion : $\text{Win}_0 = \{a, e, f, g\}, \text{Win}_1 = \{b, c, d\}$. Les stratégies sont positionnelles (stratégies d'attracteur).

Vers les jeux de parité

Jeux de parité

La condition de victoire est donnée par un coloriage des nœuds

$\chi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Une partie est gagnée par J_0 si $\max(\chi(\text{Inf}(\pi)))$ est pair.

Rem.

Chaque jeu $(\mathcal{A}, \text{Win})$ avec condition de victoire Win régulière se réduit à un jeu de Muller $(\mathcal{A}, \text{Win}')$.

Prop.

Pour chaque jeu de Muller $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ il existe un jeu de parité (\mathcal{A}', χ) et une fonction $s : V \rightarrow V'$ t.q. pour chaque sommet $v \in V$:

J_0 gagne $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ à partir de v ssi J_0 gagne (\mathcal{A}', χ) à partir de $s(v)$.

Réduction LAR (last appearance record) :

On définit \mathcal{A}' en rajoutant à \mathcal{A} une mémoire M (plus une fonction de mise-à-jour $f : V \times M \rightarrow M$), qui aide à déterminer l'ensemble $\text{Inf}(\pi)$.

Réduction LAR

LAR

Soit :

$$\begin{aligned}V' &= V'_0 \cup V'_1, \quad V'_0 = V_0 \times M, \quad V'_1 = V_1 \times M \\E' &= \{((u, m), (v, f(v, m))) \mid (u, v) \in E, m \in M\}\end{aligned}$$

M consiste de mots X sur l'alphabet $V \cup \{\#\}$ tels que chaque symbole apparaît au plus une fois dans X , et $\#$ exactement une fois.

Mise-à-jour $f : V \times M \rightarrow M$:

$$f(v, X) = \begin{cases} x\#yzv & \text{si } M = xv\#yz \\ xy\#zv & \text{si } M = x\#y\#zv \\ Mv & \text{si } v \text{ n'apparaît pas dans } M \end{cases}$$

Exemple : au chemin $\pi : 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ dans \mathcal{A} correspond le chemin $\pi' : (4, \#4) \rightarrow (1, \#41) \rightarrow (2, \#412) \rightarrow (3, \#4123) \rightarrow (2, 41\#32) \rightarrow (3, 41\#23) \rightarrow (1, 4\#231) \dots$ dans \mathcal{A}' .

On met $s(v) = \#v$ et $\chi(v, x\#y) = 2|y|$ si $y \in \mathcal{F}$ et $2|y| - 1$ sinon.

Algorithmes

Les jeux de parité ont des stratégies gagnantes positionnelles (pour les 2 joueurs), qu'on peut calculer en temps exponentiel (plus exactement, en $NP \cap co-NP$). L'algorithme dit "strategy improvement" (Jurdzinski/Vöge) est l'algorithme le plus efficace en pratique (rq. : on ne connaît pas d'exemple qui nécessite un temps de calcul exponentiel).

Cas particulier : jeux de Büchi

Les jeux de Büchi ont des stratégies gagnantes positionnelles qu'on peut calculer en temps polynomial (stratégies d'attracteur).

- On calcule $\text{Attr}_0^+(F)$: ensemble des états à partir desquels J_0 a une stratégie pour arriver à F en *au moins* 1 pas.
- On calcule ensuite V_i : ensemble des états à partir desquels J_0 a une stratégie pour passer au moins i fois par F (sans compter l'état initial).

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{Attr}_0^+(F), & V_{i+1} &= \text{Attr}_0^+(V_i \cap F) \\ \text{Win}_0 &= \bigcap_{i \geq 1} V_i \end{aligned}$$