

## TD4 Licence INF208 Théorie des langages, 2006/07

### Exo 1

Soit  $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$  la grammaire suivante :  $V = \{S, T, U\}$ ,  $\Sigma = \{a, \#\}$ ,

$$R : \begin{cases} S \rightarrow TT \mid U \\ T \rightarrow aT \mid Ta \mid \# \\ U \rightarrow aUaa \mid \# \end{cases}$$

Déterminez le langage  $\mathcal{L}(G)$  généré par  $G$ .

### Exo 2

Construisez des grammaires hors-contexte (CFG) pour les langages suivants (et justifiez la validité de la grammaire) :

1.  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$
2.  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
3.  $\{v\#w \mid v^{\text{rev}}$  est facteur de  $w\}$
4. L'ensemble  $D_2$  des mots bien-parenthésés sur  $(, ), [, ]$  (exemples :  $()[(\ )], () \in D_2, ]([\ ]), ()[\notin D_2)$ .

### Exo 3

Montrez que la grammaire hors-contexte des expressions arithmétiques n'est pas ambiguë :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + T \mid T \\ T &\rightarrow T * F \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid a \mid b \mid c \end{aligned}$$

### Exo 4

Transformez la CFG suivante en forme normale de Chomsky :  $G = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, R, S \rangle$ , avec règles

$$R : \begin{cases} S \rightarrow bA \mid aB \\ A \rightarrow bAA \mid aS \mid a \mid \epsilon \\ B \rightarrow aBB \mid bS \mid b \mid \epsilon \end{cases}$$

### Exo 5

Soit  $G = \langle \{S\}, \{a, b\}, R, S \rangle$  avec règles  $S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon$ . Montrez que  $\mathcal{L}(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |v|_a \geq |v|_b \text{ pour chaque préfixe } v \text{ de } w\}$ .

### Exo 6

1. Construisez à partir d'une grammaire CFG  $G$  un automate à pile qui reconnaît le langage  $\mathcal{L}(G)$  avec pile vide.
2. Appliquez la construction précédente à la CFG  $G = \langle \{S, A\}, \{a, b\}, R, S \rangle$  avec règles  $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS \mid bS \mid a$ .

**Exo 7**

Construisez des automates à pile qui reconnaissent les langages de l'exercice 2.

**Exo 8**

1. Etant donnée une grammaire CFG  $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ , construisez une CFG qui décrit le langage miroir  $\mathcal{L}(G)^{\text{rev}} = \{a_n \dots a_0 \mid a_0 \dots a_n \in \mathcal{L}(G)\}$ .
2. Etant donné un automate à pile  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, Z \rangle$  et un automate fini déterministe  $\mathcal{B} = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ , construisez un automate à pile qui reconnaît  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B})$ .
3. Etant donné un automate à pile  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, Z \rangle$  et un homomorphisme  $h : \Gamma \rightarrow \Sigma$ , construisez un automate à pile qui reconnaît l'image inverse  $h^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{A})) = \{u \in \Gamma^* \mid h(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})\}$ .

**Exo 9**

Montrez que pour les automates à pile, les deux conditions d'acceptance : 1) par état final et 2) par pile vide, sont équivalentes.

**Exo 10**

1. Montrez que le langage  $L = \{u\#u \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$ , n'est pas hors-contexte.
2. Montrez que son complémentaire  $L^{\text{co}}$  est un langage hors-contexte.

**Exo 11**

Soit  $L$  un langage reconnaissable d'arbres. Montrez que l'ensemble des frontières des arbres de  $L$  est un langage hors-contexte.

**Exo 12**

Montrez que les langages suivants ne sont pas des langages hors-contexte :

1.  $\{a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 0\}$
2.  $\{a^n \# a^{2n} \# a^{3n} \mid n \geq 0\}$
3.  $\{v\#w \mid v, w \in \{a, b\}^*, v \text{ est facteur de } w\}$
4.  $\{(a^n b)^n \mid n \geq 0\}$
5.  $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**Exo 13**

Trouvez trois langages hors-contexte  $K, L, M$  tels que  $K \cap L \cap M = \{(a^n b)^n \mid n \geq 0\}$ .

**Exo 14**

Trouvez un langage qui n'est pas hors-contexte, mais qui satisfait le lemme d'itération des langages hors-contexte.