


Existential second order logic ($\exists SO$)

$x, y, \dots$: variables 1er ordre
($\rightarrow$ sommets)

$X, Y, \dots$: variables 2nd ordre
($\rightarrow$ ensembles, relations, ...)

Formule de $\exists SO$:

$$\exists X_1 \dots \exists X_k. \Psi(X_1, \dots, X_k)$$

Ψ : formule de 1er ordre avec
prédicats atomiques

$$x \in X_i, \quad x = y, \quad E(x, y) \\ X_i(x_1, \dots, x_k)$$

Ex 1) G bipartite

$\exists X \exists Y. (\text{Partition}(X, Y) \wedge$
/ pas d'arc dans X ou
dans Y)
arbité 1
(ensembles)

3) G 3-colorable

$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \quad (\text{Partition}(x_1, x_2, x_3) \wedge \text{pas d'arc dans un des } X_i)$

4) G contient clique de taille $|U|$

$U \subseteq V \quad \rightarrow \quad \text{prédicat } U(x)$

$\exists X \exists R \quad (R \text{ est bijection entre}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $\text{un arc} \quad \text{un arc} \quad X \text{ et } U, \text{ et}$
 $X \text{ est clique})$

5) G contient cycle hamiltonien

$\exists L \exists S \quad (L \text{ ordre total sur } V,$
 $\swarrow$
 $\text{bijectif} \quad S \text{ la relation succ. de } L,$
 $S \text{ est cycle de } G)$

1) G bipartite

$$\exists X \exists Y \left[\begin{aligned} &\forall x. (x \in X \vee x \in Y) \wedge \\ &\forall x. (x \in X \not\leftrightarrow x \in Y) \wedge \\ &\forall x, y. (E(x, y) \rightarrow (x \in X \not\leftrightarrow y \in X)) \end{aligned} \right]$$

4) R est bijection entre X et U

$$X \xrightarrow{R} U$$

a) $\forall x (x \in X \rightarrow \exists! y. (y \in U \wedge R(x, y)))$

"chaque $x \in X$ a une unique image dans U par R "

b) $\forall y (y \in U \rightarrow \exists! x. (x \in X \wedge R(x, y)))$

"chaque $y \in U$ a une unique pre-image dans X par R "

X est clique :

$$\forall x, y (x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \rightarrow E(x, y))$$

5) L est ordre total sur V

a) réflexivité

$$\varphi_1 = \forall x. L(x, x)$$

b) anti-symétrie

$$\varphi_2 = \forall x, y \left(\neg L(x, y) \vee \neg L(y, x) \right)$$

c) transitivité

$$\varphi_3 = \forall x, y, z \left(L(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow L(x, z) \right)$$

d) total

$$\varphi_4 = \forall x, y. \left(L(x, y) \vee L(y, x) \right)$$

S est le succ. associé à L :

$$\varphi_5 = \forall x, y. \left[S(x, y) \leftrightarrow \left(L(x, y) \wedge x \neq y \right) \right. \\ \left. \wedge \left(\forall z. \left(L(x, z) \wedge L(z, y) \right) \rightarrow z = x \vee z = y \right) \right]$$

S correspond à un cycle dans G :

$$\varphi_6 = \forall x, y. \quad S(x, y) \rightarrow E(x, y) \quad \wedge$$

$$\forall x, y. \quad (\max(x) \wedge \min(y) \rightarrow E(x, y))$$

$\max(x)$: élém. max. dans L

$\parallel$

$$\neg \exists y. \quad S(x, y)$$

$$\varphi_{CIA} = \exists L \exists S (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_6)$$

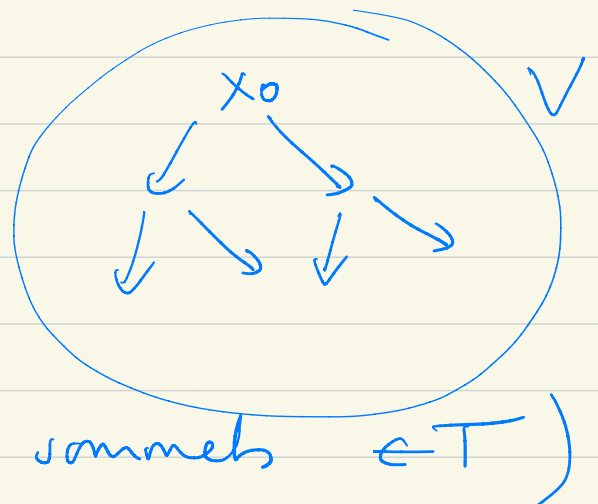
② G est fortement connexe

↑ formule $\exists S O$ pour exprimer que
tout sommet $\in \text{Reach}(x)$, pour un
 x fixé

All- $\text{reach}(x_0)$

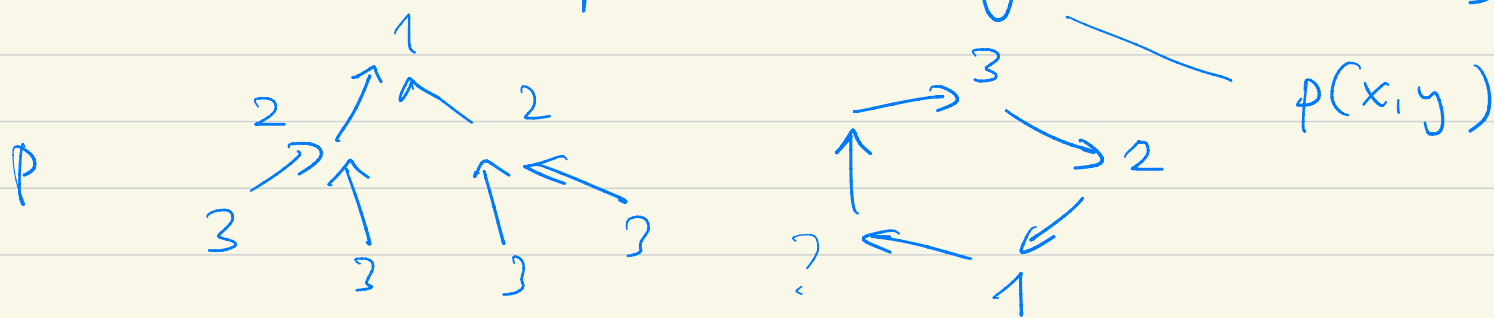
$\{$

$\exists T$ (T arbre avec
racine x_0 et tous les sommets $\in T$)



$T \leadsto$ relation binaire P (parent)

- tout sommet a un unique parent, sauf x (qui n'en a pas)
- si x est parent de y alors $E(x, y)$



Introduit des niveaux $1 \leq \dots \leq n$

|| Si x est parent de y , alors le niveau de $x <$ niveau de y

On peut parler des entiers $[1..n]$ à l'aide de l'ordre total L

$L: v_1 < v_2 < \dots < v_n$

entier $i \in [1..n] \Leftrightarrow$ sommet V_i

ordre parent niveau dans arbre

$\exists L \exists P \exists N.$

(L est ordre total $\wedge$

$$\forall y. \left(\begin{array}{l} y \neq x_0 \rightarrow \exists! x. P(x, y) \wedge \\ y = x_0 \rightarrow \nexists x. P(x, y) \end{array} \right)$$

$$\wedge \forall y. \exists! x. N(x, y)$$

$\hookrightarrow x$ est le niveau de y

$\wedge$ La relation parent décroît le niveau et correspond à un arc)

$$\forall x, y. \left[P(x, y) \rightarrow \left(\left(\exists x', y'. N(x', x) \wedge N(y', y) \wedge L(x', y') \wedge x' \neq y' \right) \wedge E(x, y) \right) \right]$$

Formule phrase :

$\forall x. \text{All-reach}(x)$

$(\forall x) \exists L \exists P \exists N. \varphi.$

FO[mem] $(ab)^* a (ab)^*$

aaa

↳ contraintes de facteurs / préfixe / suffixe

- facteurs de taille 2 : pas bb
- (- $\rightarrow$ — 3 : pas aaa)
- facteur aa : au plus 4 fois
- préfixe de taille 2 : ab ou aa
- suffixe de taille 2 : ab ou ba
- pas facteur aa $\Leftrightarrow$ suffixe ba
- taille 1 $\Rightarrow$ a

$\forall x, y (\text{succ}(x, y) \rightarrow \neg (b(x) \wedge b(y)))$