$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & r \arrow[d] \\
q \arrow[r] & b \arrow[r] & \cdots & b \arrow[r] & b \arrow[r] & s
\end{tikzcd}$$

N_2^p :

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \\
q \arrow[r] & b &
\end{tikzcd}$$

N_2^a :

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \\
q \arrow[r] & b \arrow[r] & b &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \\
& b \arrow[r] & b \arrow[r] & b &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \\
& b \arrow[r] & b \arrow[r] & b &
\end{tikzcd}$$

r radius

$N_r(x)$ = neighborhood of x of radius r

= graph induced by all y s.t. $d(x,y) \leq r$

undirected dist.

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & \dot{a} \arrow[r] \arrow[d] & \dot{a} \arrow[r] \arrow[d] & \dot{a} \arrow[r] \arrow[d] & \dot{a} \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & r \arrow[d] \\
q \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & s
\end{tikzcd}$$

shallow grid

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & \dot{a} \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \arrow[lllll, bend right] \\
b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[lllll, bend left]
\end{tikzcd}$$

$\varphi = (\exists$ unique vertex $p \wedge \ldots q \wedge$
$\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots s) \wedge$
all neighborhoods of radius ≤ 2
are of the allowed types

$G \models \varphi \iff G$ contains a
"shallow" grid

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & r \arrow[d] \\
q \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & s
\end{tikzcd}$$

N_1^p:

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & a \\
q &
\end{tikzcd}$$

N_1^q

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[d] & \\
q \arrow[r] & b
\end{tikzcd}$$

N_1^a:

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \\
& b &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & a \\
& b &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & r \\
& b &
\end{tikzcd}$$

N_1^b

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[d] & \\
q \arrow[r] & b \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \arrow[d] & \\
b \arrow[r] & b \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \arrow[d] & \\
b \arrow[r] & b \arrow[r] & s
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[dr] & a \arrow[r] \arrow[dl] & r \arrow[d] \\
q \arrow[r] & b \arrow[r] & b \arrow[r] & s
\end{tikzcd}$$

also sat. N_1

$\longrightarrow$ radius 1 not sufficient

Unique vertex with label p:

$$\exists x . \left(p(x) \wedge \forall y . (p(y) \to y = x)\right)$$

shorthand $\exists! x . \ p(x)$

FO : $\exists^{\leq k} x . \ \varphi(x)$

there are at most k vertices
x with property $\varphi(x)$

FO
- exactly / at most k vertices
- neighborhoods

FO cannot express:

- a graph is connected
- $\exists$ path between 2 vertices

$\boxed{\text{Mots}}$

$\boxed{\text{FO}}$ (first-order logic)

$FO(<)$: $x = y$, $x < y$

$FO(succ)$: $x = y$, $succ(x, y)$

$FO(<, (P_a)_{a \in \Sigma})$: $x = y$, $x < y$,
$P_a(x)$ (ou $a(x)$)

$FO(succ, (P_a)_{a \in \Sigma})$

$succ(\cdot,\cdot)$, $min(\cdot)$, $max(\cdot)$
peuvent être exprimés en $FO(<)$

$\boxed{\text{MSO}}$ (monadic second order logic)

variables $x, y, \ldots$ premier ordre
($\rightarrow$ positions)

$X, Y, \ldots$ second ordre
monadique ($\rightarrow$ ensembles de positions)

$x = y$, $x \in X$
$x < y$, $succ(x, y)$, $a(x)$

Graphes

formules atomiques : $x \neq y$ (FO)

$E(x, y)$

$x \in X$ (MSO)

mot :

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

En FO on peut dire :

φ_1 — chaque sommet a un unique préd. / succ., sauf deux sommets distingués (début / fin)

φ_2 — le sommet de début a un unique succ., pas de préd.

φ_3 — le sommet de fin a ...

Ce qu'on peut pas dire en FO est que le graphe est connexe.

φ_d: unique "start" vertex

$$\varphi_d = \exists! x . \left(\forall y . \neg E(y,x) \wedge \exists! y . E(x,y) \right)$$

φ_e: unique "end" vertex

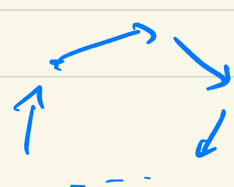
$$\varphi_e = \exists! x . \left(\forall y . \neg E(x,y) \wedge \exists! y . E(y,x) \right)$$

φ_m: every vertex has 0 or 1 pred., and 0 or 1 succ.

$$\varphi_m = \forall x . \left(\exists^{\leq 1} y . E(y,x) \wedge \exists^{\leq 1} y . E(x,y) \right)$$

$$\varphi = \varphi_d \wedge \varphi_e \wedge \varphi_m$$

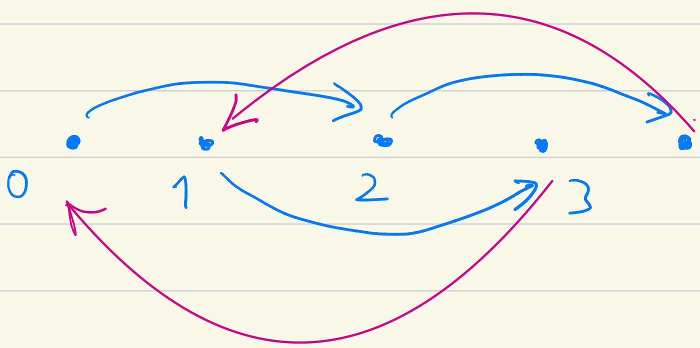
$G \models \varphi \iff G$ disjoint union of

$\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet$ & of cycles 

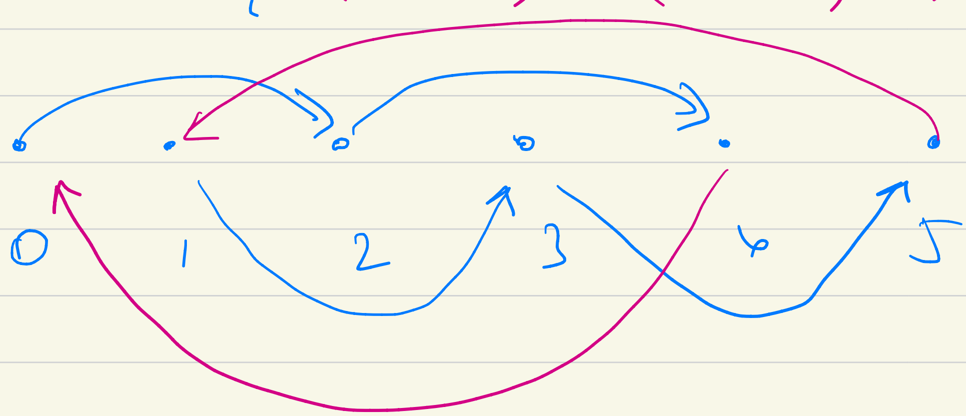
Pourquoi FO ne peut pas exprimer l'accessibilité.

$\Sigma = \{c\}$

$V = \{0, \dots, n\}$



$$E = \{ (i, i+2) : 0 \leq i \leq n-2 \} \cup \{ (n, 1), (n-1, 0) \}$$



$w \longrightarrow G_w$

G_w est connexe $\Leftrightarrow$ $|w|$ impair

On verra que FO ne peut pas exprimer "$|w|$ est pair".

La conséquence sera :

FO ne peut pas exprimer la connexité ou l'accessibilité.

Preuve par l'absurde :

Supposons que FO(E) peut exprimer la connexité d'un graphe. $\to \varphi$

Alors on montre que FO(succ) peut exprimer "longueur impaire".

On prend φ et on remplace chaque sous-formule $\underline{E(x,y)}$ par :

FO

$y = x+2$: $\exists z\,(succ(x,z) \wedge succ(z,y))$

$\vee$

$max(x) \wedge \exists z\,(min(z) \wedge succ(z,y))$

$\vee$ $min(y) \wedge \exists z\,(max(z) \wedge succ(x,z))$

φ over graphs $\longrightarrow$ φ' over words

On note la formule de FO(succ)
obtenue par φ'.

$w \models \varphi' \iff G_w$ est connexe

$\iff |w|$ impaire

$\neg\varphi'$ exprime "longueur paire"

$\longrightarrow$ contradiction à l'hypothèse
que "longueur paire" n'est pas FO.

Ce qu'on a vu avec $w \longmapsto G_w$
est une interprétation logique (FO)

Existential second order logic ($\exists SO$)

$x, y, \ldots$: variables 1er ordre
($\to$ sommets)

$X, Y, \ldots$: variables 2nd ordre
($\to$ ensembles, relations, ...)

Formule de $\exists SO$:

$$\exists X_1 \ldots \exists X_k . \varphi(X_1, \ldots, X_k)$$

φ : formule de 1er ordre avec prédicats atomiques

$x \in X_i$, $x = y$, $E(x,y)$
$X_i(x_1, \ldots, x_k)$

Ex 1) G biparti

MSO $\exists X \exists Y$. (Partition (X, Y) $\wedge$ pas d'arc dans X ou dans Y)

arité 1
(ensembles)

3) G 3-colorable

MSO $\exists X_1 \exists X_2 \exists X_3$ (Partition(X_1, X_2, X_3) $\wedge$ pas d'arc dans un des X_i)

4) G contient clique de taille $|U|$

∃SO $U \subseteq V$ $\longrightarrow$ prédicat $U(x)$

$\underbrace{\exists X \; \exists R}$ (R est bijection entre X et U, et X est clique)

unaire binaire

5) G contient cycle hamiltonien

$\exists L \; \exists S$ (L ordre total sur V, S la relation succ. de L, S est cycle de G)

binaires

1) L is total order :

→ reflexive , transitive , anti-tr.

$x \leq x$ $\quad$ $x \leq y, y \leq z \to x \leq z$ $\quad$ $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

$$\forall x . L(x,x) \wedge$$

$$\forall x,y,z . (L(x,y) \wedge L(y,z) \to L(x,z)) \wedge$$

$$\forall x,y . (L(x,y) \wedge L(y,x) \to x = y)$$

$$\wedge$$

$$\forall x,y \ (L(x,y) \vee L(y,x))$$

2) S is successor rel. of L

$$\forall x,y . (S(x,y) \Longleftrightarrow [L(x,y) \wedge \forall z . (L(x,z) \wedge L(z,y) \to z = x \vee z = y]))$$

3) S corresponds to cycle:

$$\forall x, y.\ \left(S(x,y) \rightarrow E(x,y) \right) \wedge$$

$$\exists x, y.\ \Big[\left(\forall z.\ L(z,x) \right) \wedge$$ "x max in L"

$$\left(\forall z.\ L(y,z) \right) \wedge$$ "y min in L"

$$E(x,y) \Big]$$

L is a numbering of the vertices

R binary relation (on vertices)

R is bijective:

$\varphi_{bij} = \varphi_{pre} \wedge \varphi_{succ}$

φ_{pre} = exactly one pre-image

$= \forall y \, \exists! x . \; R(x, y)$

$\varphi_{succ} = \forall x \, \exists! y \; R(x, y)$

R is bij between X and U

$\varphi_1 = \forall y \in U \; \exists! \, x \in X . \; R(x, y) \wedge$
$\forall x \in X \; \exists! \, y \in U . \; R(x, y)$

X is clique:

$\varphi_2 = \forall x \, \forall y \; ((x \neq y \wedge x \in X \wedge y \in X) \rightarrow E(x, y))$

$\mathrm{Reach}(x, y)$

$\hat{=}$ $\exists$ path from x to y

$$\overset{z_0}{\overset{\shortparallel}{x}} \to z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_k \to \overset{z_{k+1}}{\overset{\shortparallel}{y}}$$

Here: S = set of edges of the path where $z_i \neq z_j$ $\forall\, i \neq j$

$$\exists S \,.\, \Big[\ \exists! z.\ S(x, z) \wedge$$

binary rel.

$$\forall z.\ (\neg S(z, x)) \wedge$$

$$\exists! z.\ S(z, y) \wedge$$

$$\forall z.\ \neg S(y, z)) \wedge$$

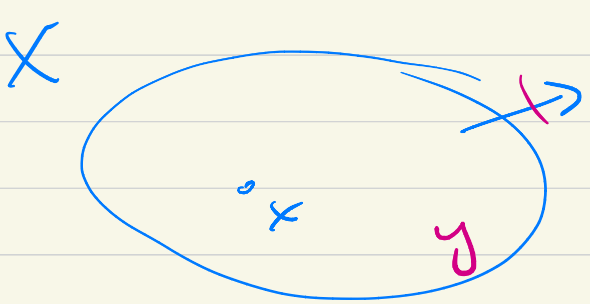
$$\forall z\ (\exists z'.\ S(z', z) \wedge z \neq y \Rightarrow \exists z''.\ S(z, z''))$$

$$\wedge\ \forall z, z'.\ S(z, z') \Rightarrow E(z, z')\ \Big]$$

Another formula for $Reach(x, y)$, which is MSO:

$$\varphi_R = \forall X \left[\left(x \in X \ \wedge \left(\forall y \in X \ \forall z . \left(E(y,z) \rightarrow z \in X \right) \right) \right) \rightarrow y \in X \right]$$

Every set X that contains x and is closed by taking successors, contains also y.



$G, s, t \models \varphi_R(x,y) \iff \exists$ path $s \xrightarrow{*} t$

$\uparrow$

G sat. φ_R where

$x = s, \; y = t$

$(\Rightarrow)$ $\quad G, s, t \models \varphi_R(x,y)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \forall X \ldots$

Take $X = post^*(s)$

$= \{ v : \; s \xrightarrow{*} v \}$

$s \in X$, closed under taking succ.

$\xrightarrow{\varphi_R} \quad t \in X$

$(\Leftarrow)$ $\quad s \xrightarrow{*} t$

Every X containing s and closed under taking succ. contain also t $\rightarrow G \models \varphi_R$