

Modèles de Calcul : TD1

Ensembles dénombrables et programmes WHILE.

1 Ensembles dénombrables

Rappels : Une énumération d'un ensemble infini D est une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow D$. On a donc $D = \{f(0), f(1), \dots\}$ et $f(i) \neq f(j)$ pour tous $i \neq j$. Un ensemble D s'appelle *dénombrable* s'il peut être énuméré. Il s'appelle *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable. On s'intéresse surtout aux énumérations calculables : la bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow D$ doit être calculable. Un tel ensemble D s'appelle *dénombrable de manière effective*.

Exercice 1 Montrez que si D est un ensemble dénombrable, alors tout sous-ensemble $D' \subseteq D$ est au plus dénombrable.

Exercice 2 Montrez que les ensembles suivants sont dénombrables (de manière effective) :

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$,
2. \mathbb{Z} : les entiers,
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: paires d'entiers positifs,
4. \mathbb{Q} : les rationnels,
5. l'ensemble des matrices avec entrées entières,
6. l'ensemble Σ^* des mots sur un alphabet (fini) Σ ,
7. l'ensemble des programmes C,
8. l'ensemble des arbres orientés,
9. l'ensemble des graphes orientés.

Exercice 3 Montrez que les ensembles suivants ne sont pas dénombrables :

1. l'ensemble des nombres réels,
2. l'ensemble des suites infinies d'entiers,
3. l'ensemble des parties de \mathbb{N} ;
4. l'ensemble des fonctions de \mathbb{N} dans $\{0, 1\}$.

Exercice 4 Dans cet exercice on va définir une fonction "générique" qui est non-calculable.

- Enumérons tous les programmes qui calculent une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, en fixant une fonction de codage qui code P par l'entier $w_P \in \mathbb{N}$.
- Par $P(x)$ on note le résultat de P sur l'entrée x (si défini).
- On définit la fonction $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$F(n) = \begin{cases} P(n) + 1 & \text{si } n = w_P \text{ et } P(n) \text{ est défini} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifiez que la fonction F n'est pas calculable.

Exercice 5 Supposons que l'ensemble D est représenté par une liste L , qui peut contenir des répétitions :

$$D = \{L[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1. Montrez que D est au plus dénombrable.
2. Supposez qu'il existe un algorithme qui sur l'entrée $n \in \mathbb{N}$ retourne $L[n]$. Déduisez dans ce cas que D est dénombrable de manière effective.

Exercice 6 Proposez une énumération calculable de l'ensemble \mathbb{N}^2 de paires d'entiers naturels de votre choix. Etant donné une paire $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, quelle est la paire suivante dans votre énumération ?

Exercice 7 On propose la solution suivante pour l'exercice précédent :

$$f(k) = (n, m) \quad \text{si } k = 2^n \cdot (2m + 1)$$

Cette solution est-elle correcte ? Dans le cas contraire pouvez-vous la corriger ?

Exercice 8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on veut maintenant énumérer l'ensemble \mathbb{N}^k de k -uplets d'entiers naturels.

1. Proposez une solution pour $k = 3$.
2. Proposez une solution pour tout k . (Elle pourra être définie par induction)

Exercice 9 Montrez que les ensembles suivants sont dénombrables de manière effective :

1. l'ensemble des suites finies d'entiers
2. l'ensemble des polynômes avec coefficients rationnels

2 Programmes LOOP et WHILE

Exercice 10 Ecrivez un programme LOOP qui calcule la différence tronquée $x \dot{-} y$, définie par $x \dot{-} y = x - y$ si $x \geq y$, et 0 sinon.

Exercice 11 Ecrivez un programme LOOP qui calcule $\min(x, y)$.

Exercice 12 — Soient P, Q deux programmes LOOP. Ecrivez un programme LOOP qui réalise l'instruction if-then-else :

IF $(x = 0)$ THEN P ELSE Q FI

— Même question pour l'instruction suivante (vous pouvez utiliser les exercices précédents) :

IF $(x > 0)$ THEN P ELSE Q FI

Exercice 13 Ecrivez un programme LOOP qui calcule le quotient de la division entière de x par y .