

Université Bordeaux 1. Master Sciences & Technologies,
Informatique. Examen UE INF 461, Modèles de calcul.

Responsable A. Muscholl

Session 1, 2009–2010. 15 décembre 2009, 14h-17h.

Documents autorisés : transparents du cours et notes de TD.

*Le barème est indicatif. Les exercices marqués par * ne sont pas nécessaires pour atteindre 20/20 (et n'ont pas de barème). A noter que le bareme total dépasse 20 points.*

Vous pouvez choisir entre les deux derniers exercices no. 7.

On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Exercice 1 Répondez par “Vrai” ou “Faux” aux questions suivantes. **Détachez et joignez cette première feuille à votre copie.** Notation : 0,5 par réponse juste et $-0,5$ par réponse fausse. Le résultat final sera le maximum entre 0 et la somme des points réalisés.

On rappelle que les notions “récurisif” et “décidable” sont équivalentes. De même pour “récurisivement-énumérable” et “semi-décidable”.

	Vrai	Faux
1 Il existe des langages à la fois semi-décidables <i>et</i> indécidables. exemple : problème de l'arrêt	■	□
2 Le complémentaire d'un langage semi-décidable est aussi semi-décidable. contre-exemple : problème de l'arrêt (Rq. : si c'était vrai, tout problème semi-décidable serait décidable)	□	■
3 A se réduit à B si et seulement si B se réduit à A . c'est comme pour $x \leq y$, cela n'implique pas $y \leq x$	□	■
4 S'il existe une réduction de A à B , alors on peut utiliser un algorithme donné pour A , afin de résoudre B . l'inverse est vrai : résoudre B apporte une solution pour A	□	■
5 On sait décider si deux MT M et M' acceptent le même langage. ça serait quand même trop demandé!	□	■
6 Toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = f(n_0)$ pour tout $n \geq n_0$ (pour un certain n_0) est une fonction calculable. bien-sûr : c'est comme une instruction if-elsif-elsif ...	■	□
7 On sait décider, étant donné un automate fini \mathcal{A} et une MT M , si \mathcal{A} et M acceptent le même langage. On ne sait même pas décider le vide du langage d'une MT...	□	■
8 Tout sous-ensemble d'un ensemble décidable est décidable. contre-exemple : problème de l'arrêt $H \subseteq \{0, 1\}^*$	□	■
9 Il existe des ensembles décidables qui ne possèdent <i>aucun</i> sous-ensemble décidable. contre-exemple : \emptyset est un sous-ensemble décidable...	□	■
10 Si A se réduit à B par une réduction polynomiale et $B \in \mathbf{NP}$, alors $A \in \mathbf{NP}$. voir cours (composition de deux polynômes est un polynôme aussi)	■	□
11 On peut décider SAT avec un algorithme exponentiel. voir cours (simulation de MT non-déterministes par MT déterministes)	■	□
12 Si A se réduit à un langage fini F , alors A est décidable. F est décidable, donc A l'est aussi	■	□
13 Il existe des problèmes indécidables dont le complémentaire appartient à \mathbf{NP} . le complémentaire d'un problèmes décidable est décidable, aussi	□	■
14 Il existe une réduction de SAT au problème de l'arrêt.	■	□

Exercice 2 (4 points) Décrivez de façon informelle (mais précise!) une MT déterministe pour chacun des langages $L_i \subseteq \{a, b\}^* \# \{a, b\}^*$ suivants. Votre MT peut utiliser plusieurs bandes :

– $u \# v \in L_1$ ssi u précède v en ordre lexicographique.

On pourra copier v sur une deuxième bande, faire avancer les deux têtes de façon synchrone tant que les symboles lus sont égaux, et accepter si c'est la paire (a, b) .

– $u \# v \in L_2$ ssi v est le successeur de u en ordre hiérarchique.

On pourra d'abord comparer les longueurs de u, v (même idée avec 2 bandes) : si v est plus long, accepter. Si u, v sont de même longueur, appliquer la MT du premier point.

Rappel : l'ordre hiérarchique sur $\{a, b\}^ : \epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots$. En ordre lexicographique : $a < aba < abba < b < babb, \dots$*

Exercice 3 (3 points) 1. Donnez un exemple d'un langage semi-décidable L_1 tel que le complémentaire de L_1 n'est pas semi-décidable.

Problème de l'arrêt (sur l'entrée vide) H .

2.* Donnez un exemple d'un langage L_2 qui n'est pas semi-décidable, tel que le complémentaire de L_2 n'est pas semi-décidable non plus.

On sait que le complémentaire \bar{H} de $H \subseteq \{0, 1\}^$ n'est pas semi-décidable. On définit*

$L_2 = 1 \bar{H} \cup \{0x \in \{0, 1\}^* \mid \text{si } x \text{ est le codage d'une MT } M, \text{ alors } M \text{ s'arrête sur l'entrée vide}\}$

L_2 n'est pas semi-décidable (sinon, $L_2 \cap 1\{0, 1\}^ = 1 \bar{H}$ le serait, donc \bar{H} aussi : faux.*

Le complémentaire \bar{L}_2 non plus, sinon $\bar{L}_2 \cap 0\{0, 1\}^ = 0 \bar{H}$ le serait aussi, donc \bar{H} aussi : faux.*

Justifiez bien vos réponses.

Exercice 4 (2+2+3 points) Soit M une MT déterministe à une bande, et w une entrée de M . On note par $\text{espace}_{M,w}$ la fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , qui associe à chaque entier $t \in \mathbb{N}$ le nombre de cases différentes visitées par M pendant les t premiers pas de calcul à partir de la configuration initiale $q_0 w$. En particulier, si M s'arrête après t_0 pas, alors $\text{espace}_{M,w}(t) = \text{espace}_{M,w}(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$.

Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s'appelle *bornée*, s'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Est-ce que $\text{espace}_{M,w}$ est bornée si M s'arrête sur w ? Qu'en est-il du cas où M ne s'arrête pas sur w ?

$\text{espace}_{M,w}$ est bornée si M s'arrête sur w . Si M ne s'arrête pas, $\text{espace}_{M,w}$ peut être borné OU non-borné.

2. Soit N la MT déterministe qui simule M , en rajoutant les transitions supplémentaires suivantes :

- avant de commencer la simulation, N place un marqueur $\#$ sur le premier blanc après l'entrée w ;
- après chaque pas de simulation de M , la machine N déplace le marqueur $\#$ d'une case à droite.

La machine N accepte ssi M accepte.

Qu'est-ce qu'on peut dire sur $\text{espace}_{N,w}$ par rapport à la longueur du calcul de M sur w ?

$\text{espace}_{N,w}$ est borné SI ET SEULEMENT SI M s'arrête sur w .

3. En utilisant les questions précédentes, montrez que le problème suivant est indécidable :

Entrée : MT déterministe M , mot w

Question : Est-ce que $\text{espace}_{M,w}$ est une fonction bornée ?

On réduit le problème de l'arrêt (de M sur w) au problème ci-dessus. La réduction est $M, w \mapsto N, w$, avec N la MT décrite au point précédent.

- 4.* En utilisant les questions 1. et 2., montrez que le problème suivant est indécidable :

Entrée : MT déterministe M , mot w

Question : Existe-t-il une configuration C de M atteignable à partir de la configuration initiale de M sur w , et un calcul $C \vdash C_1 \vdash \dots \vdash C_n \vdash C$ bouclant sur C ($n \geq 1$) ?

On réduit le problème de l'arrêt (de M sur w) au problème ci-dessus. Pour cela, on modifie la MT N de la question 2 : si le calcul termine, alors on change dans un nouvel état f et on la laisse boucler dans f . La MT N' ainsi construite va soit boucler sur une configuration avec état f (si M s'arrête), ou jamais boucler car elle utilise de plus en plus d'espace (si M ne s'arrête pas).

Indication : Pour les 2 dernières questions, vous pouvez réduire à partir du problème de l'arrêt.

Exercice 5 (4 points) Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant, en indiquant bien quelles sont les assertions vraies et quelles sont fausses, et en justifiant les réponses :

1. Soient $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ deux ensembles avec $A \subseteq B$. Alors A se réduit à B , en prenant l'identité $\text{id} : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ comme fonction de réduction.
2. Si A se réduit à B et B est décidable, alors A est décidable.
3. Le problème de l'arrêt $H \subseteq \{0, 1\}^*$ satisfait les hypothèses précédentes, donc il est décidable.

1 est faux, 2 et 3 sont vraies (voir cours). Point 1 est faux car $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ signifie $A = B$, ce qui n'est pas supposé.

Exercice 6 (3+4 points) Soit $L \in \Sigma^*$. On définit $\text{Pref}(L)$ par :

$$\text{Pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \text{il existe } v \in L \text{ t.q. } u \text{ est préfixe de } v\}$$

1. Montrez que $\text{Pref}(L)$ est semi-décidable, si L est décidable.
voir 2

2. Montrez que $\text{Pref}(L)$ est semi-décidable, si L est semi-décidable.

L étant semi-décidable, on peut l'énumérer. Dès lors, il suffit de regarder pour chaque élément v qui apparaît dans l'énumération, si l'entrée (pour le langage $\text{Pref}(L)$) est préfixe de v .

- 3.* Donnez un exemple de langage L décidable, tel que $\text{Pref}(L)$ n'est pas décidable.

Prenons le problème de l'arrêt H (sur l'entrée vide). On définit $L = \{\langle M \rangle \# 1^n \mid M \text{ s'arrête en } n \text{ pas}\}$. Le langage L est décidable, mais $\text{Pref}(L)$ ne l'est pas : sinon, $\text{Pref}(L) \cap \{0, 1\}^ \# = H \#$ le serait : faux.*

Exercice 7 (5 points) On considère pour cette question des machines RAM avec les instructions vues en cours (incrémentations/décrémentations, sauts (in)conditionnels, stop) et sans entrée/sortie.

- Montrez que la question suivante est décidable :

Entrée : RAM M avec registres initialement nuls, entier k .

Question : Est-il vrai que la valeur d'aucun registre ne dépasse k au cours du calcul de M ?

On simule la RAM, en s'assurant que les registres ne dépassent pas k (si cela arrive, on rejète). On s'arrête dès qu'on boucle. On peut utiliser pour cela un compteur, qui va être incrémenté avec chaque pas simulé, et dont la valeur ne doit pas dépasser la valeur $q \cdot (k + 1)^N$, avec q nombre d'états et N nombre de registres. Cette valeur borne le nombre de configurations avec des valeurs au plus k dans les registres.

- Montrez que la question suivante est indécidable :

Entrée : RAM M avec registres initialement nuls, entier k .

Question : Est-il vrai pour tout registre, que sa valeur dépasse k au cours du calcul de M ?

On réduit le problème de l'arrêt des RAM à ce problème : soit M une RAM (entrée pour le problème de l'arrêt). On construit une autre RAM M' , avec un registre de plus, qui simule M (sans modifier le registre additionnel). Si la simulation s'arrête, on incrémente tous les registres de M' par k . Si la simulation ne s'arrête pas, alors le registre additionnel reste zéro.

Exercice 7 (5 points) On considère les problèmes suivants :

- *Petit-cycle :*

Entrée : graphe orienté G , sommet s , entier k

Question : Existe-t-il un cycle qui contient s et qui passe par au plus k sommets différents ?

- *Grand-cycle :*

Entrée : graphe orienté G , sommet s , entier k

Question : Existe-t-il un cycle simple qui contient s et qui passe par au moins k sommets ? (un cycle simple est un cycle où tous les sommets sont différents)

1. Décrivez un algorithme polynomial qui résout *Petit-cycle*. Justifiez le temps de calcul.

Il suffit de vérifier s'il existe un sommet x avec un arc (x, s) et tel que $d(s, x) < k$ ($d(u, v)$ est la distance entre u et v). On peut utiliser l'algorithme (polynomial) de Dijkstra pour calculer les distances à partir de s .

2. Montrez que *Grand-cycle* est **NP**-complet.

*Avec k égal au nombre des sommets, il s'agit du problème du cycle Hamiltonien (HC), qui est **NP**-complet. Donc on peut réduire HC au problème *Grand-cycle*, ce qui montre qu'il est **NP**-difficile. *Grand-cycle* est dans **NP** : on peut vérifier en temps polynomial qu'une séquence de sommets est une solution.*