

Collège Sciences et technologies – Masters
Année universitaire 2016/2017, session d'automne décembre 2016

Mention : Informatique, Code UE : 4TIN704EX

Intitulé de l'épreuve : *Calculabilité et complexité*

Date : 8/12/16 Heure : 9h-12h Durée : 3h

Documents autorisés : poly et notes TD

Le barème est indicatif. A noter qu'il dépasse 20 points.

On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications. Vous devez rendre la première page du sujet avec votre copie.

Pour les exercices 1 et 2 seulement les justifications écrites dans l'encadré sur le sujet seront considérées. Pour l'exercice 3 (QCM) seulement les réponses écrites sur le sujet seront considérées.

Exercice 1 (2 points + 2 points) : ensembles dénombrables

Un *polynôme* est une fonction $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ avec une inconnue x et des coefficients a_n, \dots, a_0 **entiers**. Un entier x s'appelle *racine* du polynôme p si $p(x) = 0$.

1. (1 p.) Justifiez que l'ensemble \mathcal{P} des polynômes est dénombrable.

2. (1 p) Justifiez que l'ensemble \mathcal{R} des polynômes qui ont au moins une racine entière, est dénombrable.

3. (2 p. additionnels)

Décrivez un **algorithme** qui énumère l'ensemble \mathcal{R} .

Indication : Vous pouvez utiliser un sous-algorithme qui énumère $\mathcal{P} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 2 (3 points) : décidabilité

Une **2-réduction** de A vers B est un programme P qui travaille sur des entrées de A et qui s'arrête toujours ; sur entrée x le programme P calcule deux entrées y_1 et y_2 de B , avec la propriété suivante :

- x est entrée positive de A si et seulement si
- y_1 est entrée positive de B et y_2 est entrée négative de B

Justifiez : si B est décidable et s'il existe une 2-réduction de A vers B , alors A est décidable.

Exercice 3 (2 points) : QCM

Répondez par "Vrai" ou "Faux" aux questions suivantes. Les réponses fausses sont comptées négativement.

- | | Vrai | Faux |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1 L'ensemble des suites infinies d'entiers est dénombrable. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2 Tout ensemble d'entiers qui est dénombrable peut être énuméré en ordre croissant. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3 Tout programme en C peut s'écrire en langage WHILE. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4 Tout programme en C peut s'écrire en langage LOOP. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5 Il existe un algorithme qui prend en entrée un programme en Java et répond "oui" si le programme renvoie des données personnelles non-chiffrées, et "non" sinon. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6 Il existe un semi-algorithme qui prend en entrée un programme en Java et répond "oui" si le programme renvoie des données personnelles non-chiffrées. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7 Toute formule booléenne satisfaisable possède un certificat polynomial de satisfiabilité. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8 NP est la classes des problèmes qui ne peuvent pas être résolus en temps polynomial. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 4 (5 points) : NP

Dans cet exercice nous considérons la variante suivante du problème 3-colorabilité, appelé **3-COL-restreint** :

Entrée : Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k .

Question : existe-t-il un sous-ensemble de sommets $U \subseteq V$ de taille k tel que $G \setminus U$ est 3-colorable ?

Remarque : $G \setminus U$ est le graphe obtenu à partir de G en enlevant tous les sommets de U , ainsi que les arêtes incidentes.

1. Montrez que **3-COL-restreint** est dans NP.
Quels sont les certificats ? comment marche la vérification ?
2. Montrez que **3-COL-restreint** est NP-difficile.
3. Décrivez une réduction polynomiale de **3-COL-restreint** vers **SAT**.
Quelle est la signification des variables booléennes ? qu'expriment vos clauses ?

Indication : en plus des variables utilisées dans la réduction pour 3-colorabilité, vous allez utiliser $n \cdot k$ variables additionnelles, une pour chaque paire sommet / entier dans $\{1, \dots, k\}$.

Exercice 5 (5 points) : NP

On considère la variante suivante de SAT :

SAT-restreint

Entrée : formule booléenne φ en forme normale conjonctive (conjonction de clauses), et paramètre k .

Question : est-ce que φ a une valuation qui la satisfait **et** qui met *au plus* k variables à *vrai* ?

1. Montrez que le problème **SAT-restreint** est dans NP.
2. Donnez une réduction de SAT à **SAT-restreint**.
3. Déduisez que **SAT-restreint** est NP-complet.

Exercice 6 (3 points + 2 points) : problème de l'arrêt

1. (3 p.) Soit P un programme WHILE avec variables x_0, x_1 , qui prend en entrée un entier. On sait que P satisfait l'invariant suivant :

Sur entrée n , les valeurs de x_0 et x_1 durant l'exécution de P sont toujours inférieures à n^2 .

Décrivez un algorithme qui répond à la question suivante :

Entrée : entier n .

Question : est-ce que P s'arrête sur n ?

2. (**2 p. additionnels**) Montrez que la question suivante est indécidable :

Entrée : Programme WHILE P .

Question : est-ce qu'il existe une entrée n de P tel que la valeur de x_0 dépasse n^2 au cours de l'exécution de P sur n ?

Indication : vous pouvez réduire à partir de la question d'arrêt de programme sur entrée 0 (HALT_0).