

SAT : Satisfaisabilité de formules  
booléennes (propositionnelles)

Def Une formule booléenne propositionnelle  
est

- une constante : true (1) , false (0)
- une variable :  $x, y, \dots$
- la négation  $\neg \varphi$  d'une formule  $\varphi$
- la conjonction (ET)  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$   
de deux formules  $\varphi_1, \varphi_2$
- la disjonction (OU)  $\varphi_1 \vee \varphi_2$   
de deux formules  $\varphi_1, \varphi_2$

Ex  $(\neg(x \vee y) \wedge z) \vee \neg y$

formule avec variables  $x, y, z$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Ex}} \quad & (\neg(x \vee y) \wedge z) \vee (\neg y) \equiv \\
 & (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg y) \equiv \\
 & (\underbrace{(\neg x \vee \neg y)}_{\equiv \neg y}) \wedge \neg y \wedge (z \vee \neg y) \equiv \neg y
 \end{aligned}$$

Notations :

- 1) On écrit aussi  $\bar{x}$  au lieu de  $\neg x$
- 2)  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  signifie que  $\varphi_1, \varphi_2$  sont équivalentes, c.-à-d. elles ont la même valeur, qq soit la valuation des variables

Def Valuation des variables  $x_1, \dots, x_n$  :

$$\text{val} : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\text{val}(x_i) \in \{0, 1\} \quad \text{valeur de } x_i$$

## Formes normales

**CNF** : conjonctive normal form  
 $\hat{=}$  conjonction (ET) de clauses  
clause  $\hat{=}$  disjonction (OU) de littéraux  
littéral  $\hat{=}$  variable ou négation de variable

**DNF** : disjonction (OU) de conjonctions (ET)

Ex.

$$\text{CNF: } (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$$

$$\text{DNF: } (x \wedge \neg y \wedge z) \vee \neg x \vee (y \wedge \neg w)$$

Rappel :

Table de vérité  $\rightsquigarrow$  DNF

ex. variables  $x, y, z, t$

$x$	$y$	$z$	$t$	$\varphi(x, y, z, t)$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
	:			
1	1	1	1	1

$$\begin{aligned} \varphi \equiv & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t) \vee \\ & (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t) \vee \dots \\ & (x \wedge y \wedge z \wedge t) \end{aligned}$$

## Problème SAT

Entrée Formule booléenne  $\varphi$

Question Est-ce que  $\varphi$  est satisfaisable ?

Def  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  est satisfaisable s'il existe une valuation des variables  $x_1, \dots, x_n$  qui rend  $\varphi$  vraie ("satisfait  $\varphi$ ").

3 - CNF

$$(\neg x \vee z \vee \neg t) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge$$

$$(z \vee t \vee \neg w) \wedge (\neg t \vee w \vee y)$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_p \vee x_5) \wedge \dots$$

pas 3 - CNF

---

$$c_i = x$$

$$\varphi_i = (x \vee y \vee t) \wedge$$

$$(x \vee y \vee \bar{t}) \wedge$$

$$(x \vee \bar{y} \vee t) \wedge$$

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{t})$$

3 - CNF

$$\text{val} : \{x\} \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{sat. } c_i$$

$$\text{val}(x) = 1$$

$$\text{val}' : \{x, y, t\} \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{val}'(x) = 1$$

sat  $\varphi_i$

$$\varphi = \underbrace{x \wedge y} \quad | \varphi | = 2$$

$$\hat{\varphi} \quad (x \vee t_1 \vee t_2) \wedge (x \vee t_1 \vee \bar{t}_2) \wedge (x \vee \bar{t}_1 \vee t_2) \wedge (x \vee \bar{t}_1 \vee \bar{t}_2) \wedge$$

$$(y \vee z_1 \vee z_2) \wedge \dots$$

$$|\hat{\varphi}| = 2^k$$

$$O(n^2) \quad \boxed{f(n) \leq c \cdot n^2}$$

$$n^{O(n)}$$

$$n^{c \cdot n}$$

$$= 2^{c n \log n}$$

$$\Theta(n^2)$$

$$2^{O(n \log n)}$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$$

$$\equiv 1$$

tautologie