

---

---

---

---

---



# Retour sur NP vs. P

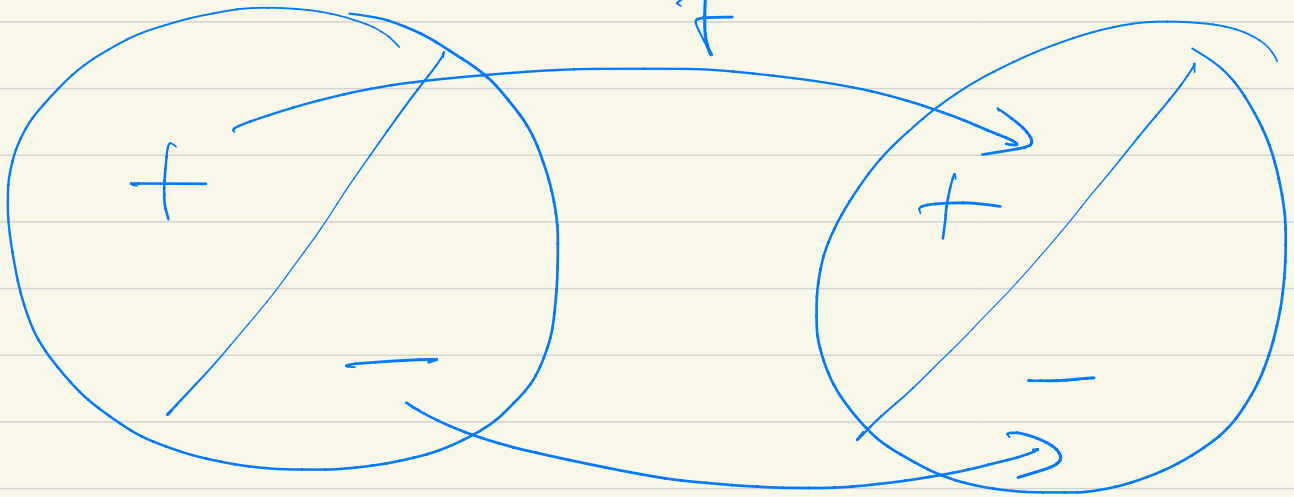
- P : classe des problèmes qu'on peut résoudre en temps polynomial
- NP : classe des problèmes où on peut vérifier des solutions en temps poly
- Réductions polynomiales :  
A, B problèmes  
 $A \leq_p B$

Instances  
de

A

B

f



f calculable en temps poly

$A \leq_P B$  et  $B \in P$

$\Rightarrow A \in P$

$$NP \subseteq ExpTime$$

Tous les pbs. de NP peuvent être résolus en temps exponentiel.

Pourquoi ?

$$\textcircled{1} \quad A \in NP \quad \rightsquigarrow \quad A \leq_p SAT$$

Instance  $x$  de  $A$

$\downarrow f$

$f(x)$  instance de SAT

$|f(x)| = \text{polynomial en taille de } x$

On peut vérifier que  $f(x)$  est

une formule satisfaisable en

temps  $2^{|f(x)|}$

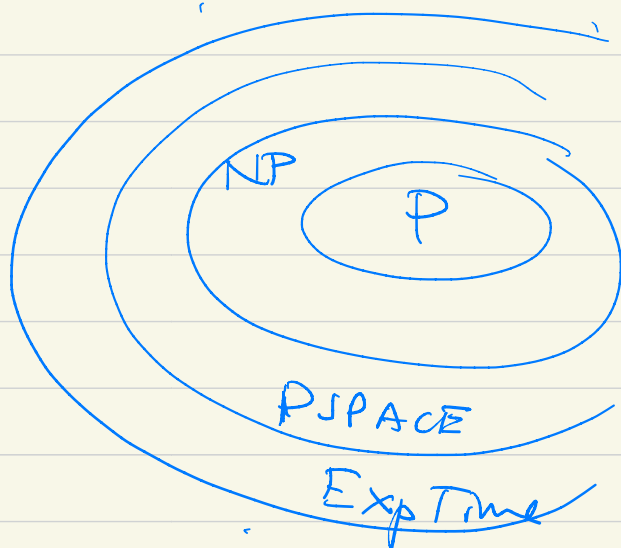
$\rightarrow$   $\left[ \begin{array}{l} \text{oui} \rightarrow \text{X} \\ \text{non} \rightarrow \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{OUI} \\ \text{NON} \end{array}$

②  $A \in \text{ExpTime}$

(classes des pb. qu'on peut résoudre en temps exp.)

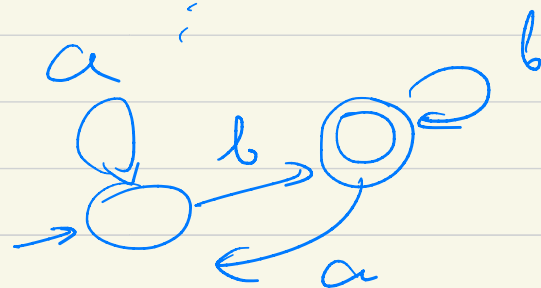
PSPACE :

classes des pb. qu'on peut résoudre avec mémoire polynomiale



Ex Intersection d'automates finis

Entrée  $A_1, \dots, A_n$   
automates finis



Q  $L(A_1) \cap \dots \cap L(A_n) \neq \emptyset$ ?

Construction produit

$A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow$  automate exponentiel

Clique  $\in$  NP

$G, k$

Q: Est-ce que  $G$  contient une clique de taille  $k$ ?

$$k \leq |V|$$

$$G = (V, E)$$

- Certificat (ou solution) : ensemble de sommets  
 $C \subseteq V$

- Vérificateur :

sur  $G, k, C$

il vérifie :

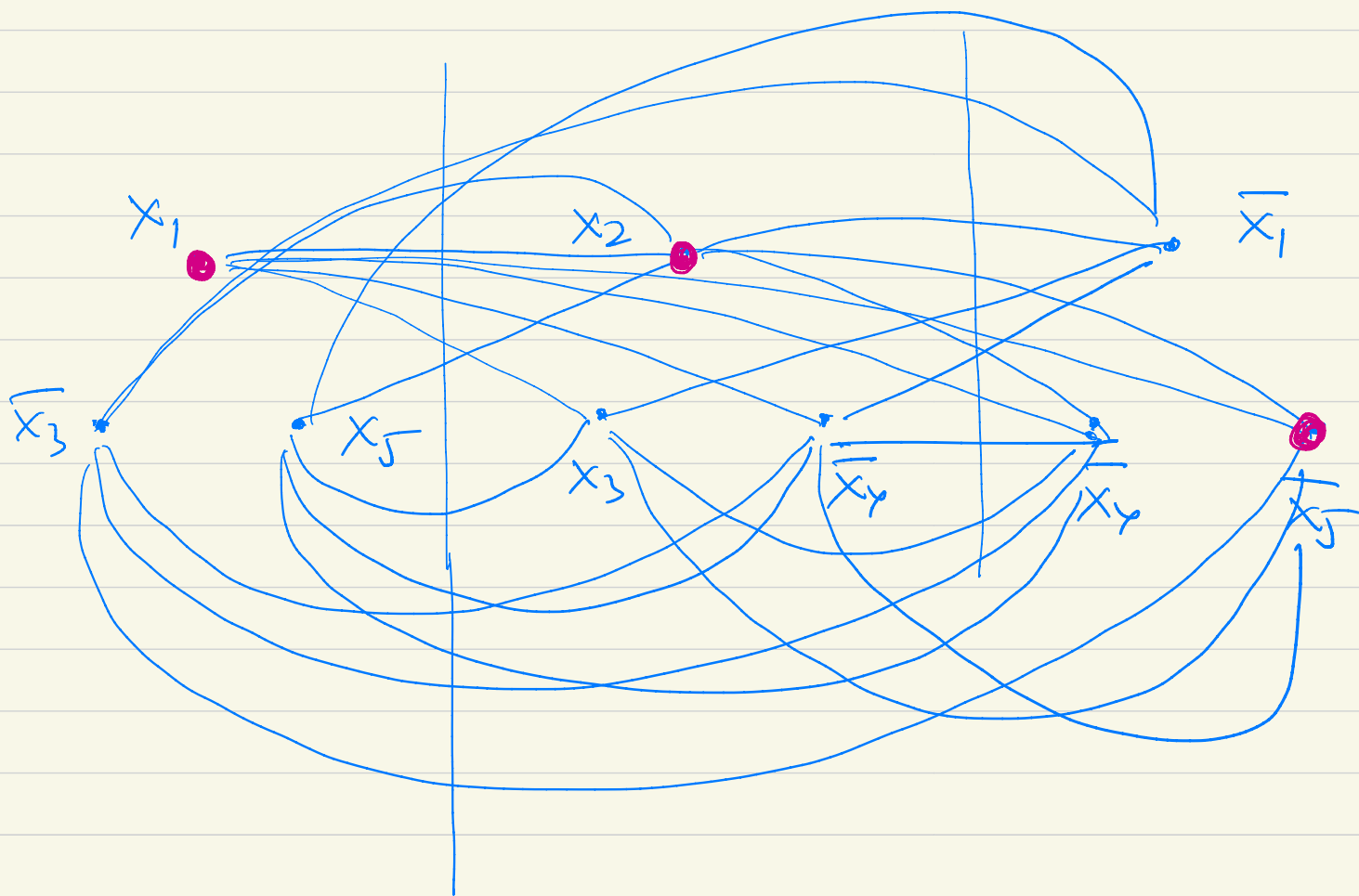
1)  $|C| \leq k$   $\mathcal{O}(|C|)$

2)  $C$  est une clique

$|C| \leq n = |V|$

$\mathcal{O}(|C|^2)$   
 $\mathcal{O}(n^2)$

$$\varphi = (\underline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \wedge (\underline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee \underline{x_5})$$



la' : juste les arêtes issues des  
3 premières formules

$$K = 3$$

$\varphi$  est satisfaisable  $\Leftrightarrow G_\varphi$  a  
une clique de taille 3

$\varphi$  satisfaisable  $\Leftrightarrow$

$G_\varphi$  a une clique de taille  $K$   
(# clauses)

( $\Rightarrow$ ) On prend une valuation qui satisfait  $\varphi$  et on construit une clique de taille  $K$  dans  $G_\varphi$ :

- un littéral par clause qui est vrai sous la valuation
- tous ces littéraux sont dans des groupes différents, et il n'y a pas  $x$  et  $\bar{x}$  parmi eux.

$\rightarrow$  ça donne une clique dans  $G_\varphi$  de taille # clauses



( $\Leftarrow$ ) Si  $G\varphi$  a une clause de taille  $\leq k \Rightarrow$  les sommets sont dans des groupes différents  $\rightarrow 1$  par clause

À partir de la clause on obtient une valuation en mettant  $x_i$  à 1 si  $x_i$  apparaît dans la clause, et  $x_i$  à 0 si  $\bar{x}_i$  apparaît dans la clause

Ceci est bien une valuation, car il ne peut pas y avoir  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  dans la clause !

Cette valuation satisfait la formule.