


Clique et couverture par sommets

Clique : sous-graphe dont les sommets sont reliés 2 à 2

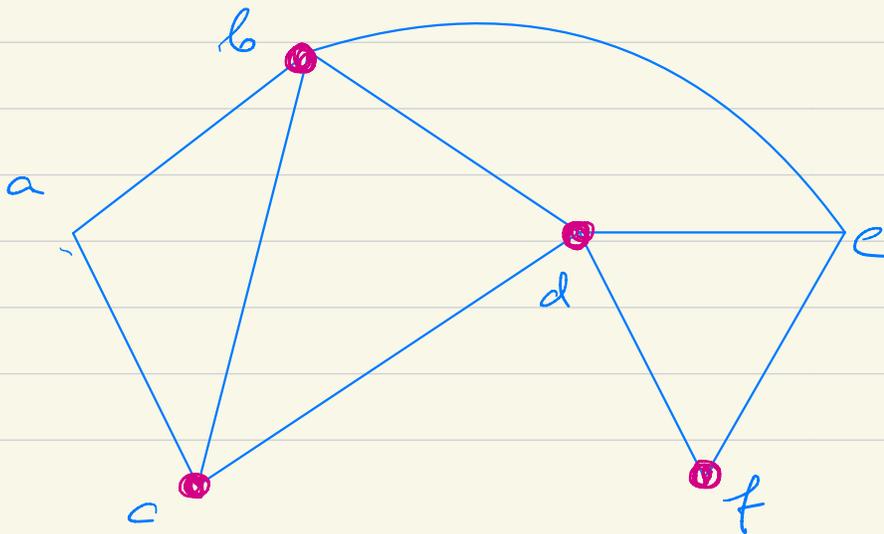
CLIQUE :

Entrée Graphe $G = (V, E)$, entier k

Q : Est-ce que G possède une clique de taille k ?

Conversion : sous-ensemble $C \subseteq V$

de sommets tq. chaque arête a au moins une extrémité dans C .



$$C = \{b, c, d, f\}$$

Vertex cover (VC) / couverture par sommets

Entrée $G = (V, E)$, entier k

Q : Est-ce qu'il ex. une couverture de G de taille $= k$?

VC \in NP

Rq. $1 \leq k \leq n$

- la preuve que G, k est instance positive de VC est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets (taille $O(n)$)
 - le vérificateur vérifié que $|C| = k$ et que chaque arête est couverte par C : $\forall (u, v) \in E : \begin{matrix} u \in C \vee \\ v \in C \end{matrix}$
- \rightarrow temp $O(m)$

3-SAT \leq_p CLIQUE



$$C \subseteq V \quad |C| = k$$
$$\forall u, v \in C, u \neq v : (u, v) \in E$$

CLIQUE \leq_p SAT

Idee : "coder" les éléments de C par des variables booléennes et on rajoute des clauses qui exprime qu'on a effectivement une clique C .

$|C| = k \rightsquigarrow k$ sommets

$$V = \{1, \dots, n\}$$

Variables de la formule :

$$x_{v,i} \quad v \in V, 1 \leq i \leq k$$

→ $n \cdot k$ variables

Intention :

$x_{v,i}$ vraie $\Leftrightarrow v$ est le i ème
sommet de la clique

① Clauses qui expriment "le i ème
sommet de C est bien-défini"

$$\bigwedge_{\substack{v, w \in V \\ v \neq w}} \bigwedge_{1 \leq i \leq K} (\overline{x_{v,i}} \vee \overline{x_{w,i}})$$

(le sommet v et le sommet w ne
sont pas tous les 2 le i ème sommet
de C)

② Clauses pour dire : "le i ème
sommet de C existe" :

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq K} \bigvee_{v \in V} x_{v,i}$$

$$(x_{1,1} \vee \dots \vee x_{n,1}) \wedge (x_{1,2} \vee \dots \vee x_{n,2}) \wedge \\ \dots (x_{1,K} \vee x_{2,K} \vee \dots \vee x_{n,K})$$

③ Clauses qui expriment que C est
soit une clique

pas en CNF

$$\bigwedge_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \bigvee_{\substack{u, v \in V \\ (u, v) \in E}} (x_{u,i} \wedge x_{v,j})$$

en CNF

$$\bigwedge_{\substack{u, v \in V \\ (u, v) \notin E}} \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq j \leq k \\ i \neq j}} (\overline{x_{u,i}} \vee \overline{x_{v,j}})$$

$$G, k \rightarrow \varphi_{G,k} = \text{"clauses 1"} \wedge \\ \text{"clauses 2"} \wedge \text{"clauses 3"}$$

Table de $\varphi_{G,k}$:

variables : $n \cdot k$

clauses : $n^2 \cdot k + k + m \cdot k^2$

G a une clique de taille $k \Leftrightarrow$

$\Psi_{G,k}$ est satisfaisable

(\Rightarrow) $|C| = k$ est clique de G

$$C \subseteq \{1, \dots, n\} \quad C = \{v_1 < \dots < v_k\}$$

On choisit $\text{val} = \{x_{v,i} : v \in V, 1 \leq i \leq k\}$

$$\text{tq. } \text{val}(x_{v,i}) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } v = v_i \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

val satisfait $\Psi_{G,k}$ par construction

(\Leftarrow) Si $\Psi_{G,k}$ est satisfaisable,

alors on prend valuation val qui

la satisfait

À cause des clauses 1 et 2 :

pour chaque $1 \leq i \leq k$ il ex. un unique sommet v tq. $\text{val}(x_{v,i}) = \text{vrai}$

On note ce sommet v_i .

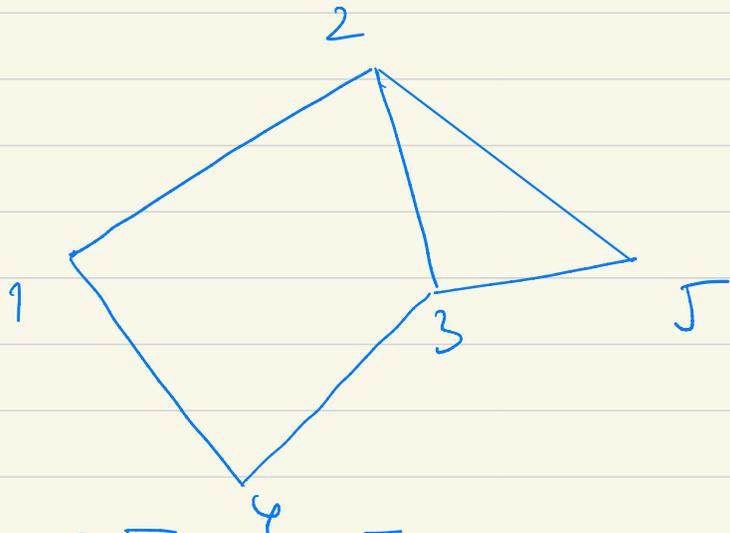
On pose $C = \{v_1, \dots, v_k\}$

$|C| = k$ ("clauses 2")

De plus C est une clique à cause des "clauses 3".

$k=3$

$G =$



Clauses 1

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & (\bar{x}_{1,1} \vee \bar{x}_{2,1}) \wedge (\bar{x}_{1,1} \vee \bar{x}_{3,1}) \wedge \dots \\
 & \vdots \\
 & (\bar{x}_{4,1} \vee \bar{x}_{5,1}) \wedge
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned}
 & (\bar{x}_{1,2} \vee \bar{x}_{2,2}) \wedge (\bar{x}_{1,2} \vee \bar{x}_{3,2}) \dots \\
 & \vdots \\
 & (\bar{x}_{4,2} \vee \bar{x}_{5,2}) \wedge
 \end{aligned} \right.$$

$k=3$

Clauses 2

$$(X_{1,1} \vee \dots \vee X_{5,1}) \wedge (X_{1,2} \vee \dots \vee X_{5,2}) \wedge \\ (X_{1,3} \vee \dots \vee X_{5,3})$$

Clauses 3

non-arête (1,3) :

$$(\bar{X}_{1,1} \vee \bar{X}_{3,2}) \wedge (\bar{X}_{1,2} \vee \bar{X}_{3,3}) \wedge \\ (\bar{X}_{1,3} \vee \bar{X}_{3,1}) \wedge$$

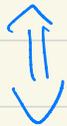
$$(\bar{X}_{1,2} \vee \bar{X}_{3,1}) \wedge (\bar{X}_{1,3} \vee \bar{X}_{3,2}) \wedge \\ (\bar{X}_{1,1} \vee \bar{X}_{3,3})$$

Même chose pour (1,1), (2,2) ... (5,5),
(1,5), (2,4), (4,5)

VC et CLIQUE

Req. On suppose
que $(v, v) \notin E$
 $\forall v \in V$

$G, C \subseteq V$ couverture



$V \setminus C$ ensemble indépendant

$I \subseteq V$ est ens. indépendant si

$\forall u, v \in I, u \neq v : (u, v) \notin E$

$I \subseteq V$ est ens. indép. dans $G = (V, E)$

\Leftrightarrow

I est clique dans le graphe dual

$$G^c = (V, E \setminus (V \times V))$$

C est couverture dans $G \Leftrightarrow$

$V \setminus C$ est clique dans G^c

VC: G, k

Q: $\exists?$ couverture de taille k

VC \leq_p CLIQUE

G, k $G^c, n-k$

CLIQUE \leq_p VC

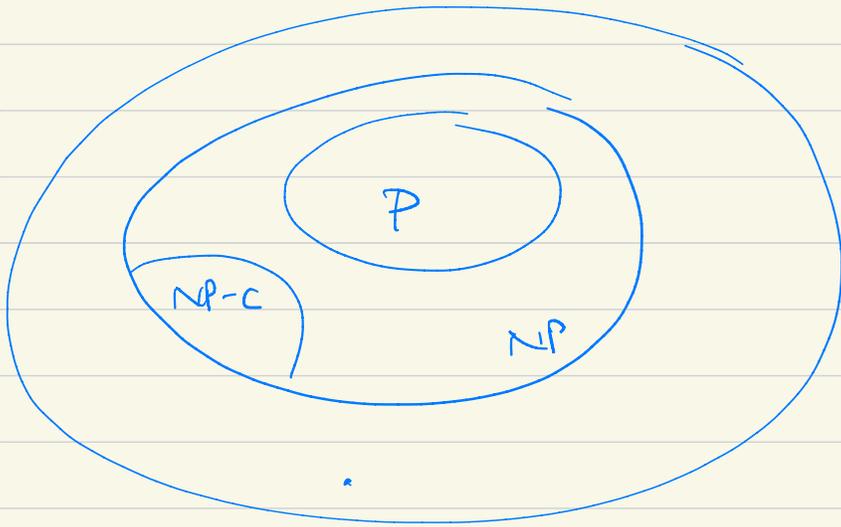
G, k $G^c, n-k$

SAT \leq_p CLIQUE \leq_p VC

\Rightarrow VC est NP-difficile^(*) } \Rightarrow
VC \in NP

VC est NP-complet

* parce que \leq_p est transitif



Un pb. peut être NP-difficile, mais pas appartenir à NP.

$\in NP$: complexité max. est NP

NP-difficile: aussi difficile que tout NP

NP-complet \iff

$\in NP$ & NP-difficile