

Complexité et Calculabilité : Partiel 20/11/20

Dans un graphe non-orienté $G = (V, E)$, on dit d'un sommet qu'il se domine lui même, ainsi et l'ensemble de ses voisins.

Un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un ensemble dominant non-ambigu si

1. chaque sommet du graphe est dominé par un des sommets de D ;
2. aucun sommet du graphe n'est dominé par *plus qu'un* sommet de D .

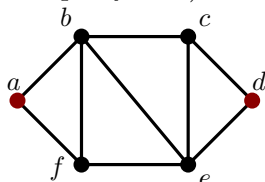
Le problème ENSEMBLE DOMINANT NON-AMBIGU (abrégé EDNA) est :

EDNA

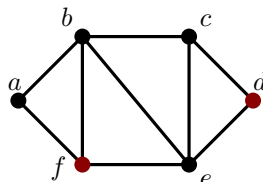
Entrée : Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k .

Sortie : Existe-t-il un ensemble dominant non-ambigu de taille au plus k ?

Les deux exemples ci-dessous montrent à gauche un ensemble dominant non-ambigu $D = \{a, d\}$. A droite $D' = \{f, d\}$ est un ensemble dominant ambigu (à cause du sommet e , qui est dominé par f et d).



$D = \{a, d\}$



$D' = \{d, f\}$

1. Supposez que le graphe G est un cycle de taille n , donc $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, \dots, n\}$ et $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$. Pour quelles valeurs de n est-ce que G possède un ensemble dominant non-ambigu ? Justifiez votre réponse.
2. Décrivez un vérificateur polynomial du problème EDNA, en précisant d'abord quel est le certificat d'une instance positive et quelle est l'entrée du vérificateur.
Quelle est la taille du certificat et quel est le temps de calcul du vérificateur (en fonction de la taille du graphe) ?
3. Que déduisez-vous sur la complexité du problème EDNA ?
4. Décrivez un algorithme qui calcule une solution pour le problème EDNA (s'il en existe). Quelle est sa complexité (en fonction de la taille du graphe) ?
5. Quelle est la différence entre le vérificateur (question 2.) et l'algorithme (question 4.) pour le problème EDNA ?
6. Proposez une réduction polynomiale de EDNA vers SAT. Vous utiliserez des variables $x_{v,i}$ pour signifier que le sommet v est le i ème sommet de l'ensemble dominant non-ambigu D . La formule ne doit pas être forcément en CNF, et vous devez expliquer les contraintes (sous-formules) dont elle est composée.
7. Justifiez bien qu'il s'agit d'une réduction, en montrant comment associer à chaque solution du problème EDNA une solution pour SAT, et inversement.
8. Combien de littéraux comporte votre formule ? Justifiez que la réduction est polynomiale.
9. Que déduisez-vous de la réduction vers SAT pour la complexité du problème EDNA ? Justifiez votre réponse avec les notions que vous avez appris en cours ou TD.