

super ! 19

E1 :

1.

$$\Phi = AF(b \wedge \neg a) \rightarrow AF A(b \wedge \neg a \wedge \neg b)$$

$$\Phi = \neg(AF(b \wedge \neg a)) \vee AF \neg E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)))$$

$$\Phi = \neg(A(\text{true} \cup (b \wedge \neg a))) \vee A(\text{true} \cup \neg E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))))$$

On transforme les expressions de la forme $A(\Phi \cup \Psi)$ en $\neg E(\neg \Psi \cup (\neg \Phi \wedge \neg \Psi)) \wedge \neg EG \neg \Psi$. Pour simplifier l'écriture, on note xxx certaines des formules dont on prévoit qu'elles disparaîtront à l'étape suivante.

$$\Phi = \neg(\neg E(\neg xxx \cup (\neg \text{true} \wedge \neg xxx)) \wedge \neg EG \neg(b \wedge \neg a)) \vee (\neg E(\neg xxx \cup (\neg \text{true} \wedge \neg xxx)) \wedge \neg EG \neg E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))))$$

$$(\text{Voici la formule sans les xxx : } \Phi = \neg(\neg E(\neg(b \wedge \neg a) \cup (\neg \text{true} \wedge \neg(b \wedge \neg a))) \wedge \neg EG \neg(b \wedge \neg a)) \vee \neg E(\neg E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))) \cup (\neg \text{true} \wedge \neg E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)))))) \wedge \neg EG \neg E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))))$$

On simplifie les expressions de la forme " $\neg \text{true} \wedge X$ " en "false", les expressions de la forme " $X \cup \text{false}$ " en false

$$\Phi = EG \neg(b \wedge \neg a) \vee \neg EG E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)))$$

$$\Phi = \neg(\neg EG \neg(b \wedge \neg a) \wedge EG E((b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)) \cup (\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b))))$$

On remarque que $b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$ est équivalent à b , et que $\neg b \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$ est équivalent à $a \wedge \neg b$. Ainsi :

$$\Phi = \neg(\neg EG \neg(b \wedge \neg a) \wedge EG E(b \cup (a \wedge \neg b)))$$

>>> OK

L'écriture ci dessus de Φ est en forme normale existentielle.

2. On applique l'algorithme vu en cours, et on décompose :

$$\text{Sat}(\Phi) = \text{Sat}(\neg(\neg EG \neg(b \wedge \neg a) \wedge EG E(b \cup (a \wedge \neg b))))$$

$$\text{Sat}(\Phi) = S - \text{Sat}((\neg EG \neg(b \wedge \neg a) \wedge EG E(b \cup (a \wedge \neg b))))$$

$$\text{Sat}(\Phi) = S - (\text{Sat}(\neg EG \neg(b \wedge \neg a)) \cap \text{Sat}(EG E(b \cup (a \wedge \neg b))))$$

$$\text{Sat}(\Phi) = S - (S - \text{Sat}((EG \neg(b \wedge \neg a))) \cap \text{Sat}(EG E(b \cup (a \wedge \neg b))))$$

Pour calculer $\text{Sat}((EG \neg(b \wedge \neg a)))$, on doit d'abord calculer $\text{Sat}(\neg(b \wedge \neg a))$

$$\text{Sat}(\neg(b \wedge \neg a)) = S - \text{Sat}(b \wedge \neg a) = S - (\text{Sat}(b) \cap (S - \text{Sat}(a))) = S - (\{s_0, s_2, s_3\} \cap \{s_1, s_2, s_3, s_4\}) = \{s_0, s_1, s_4, s_5\}$$

On calcule $\text{Sat}((EG \neg(b \wedge \neg a)))$ avec l'ensemble ci dessus, et trouve $\{s_0, s_1\}$.

>>> OK, mais il fallait aussi expliciter les étapes de l'algorithme du cours

De même, on calcule $\text{Sat}(E(b \cup (a \wedge \neg b)))$, et pour cela, on calcule

$$\text{Sat}(b) \text{ et } \text{Sat}(a \wedge \neg b)$$

$$\text{Sat}(b) = \{s_0, s_2, s_3\}$$

$$\text{Sat}(a \wedge \neg b) = \{s_5\}$$

$$\text{Sat}(E(b \cup (a \wedge \neg b))) = \{s_0, s_2, s_5\}$$

$$\text{Sat}(EG E(b \cup (a \wedge \neg b))) = \{s_0, s_2, s_5\}$$

>>> idem

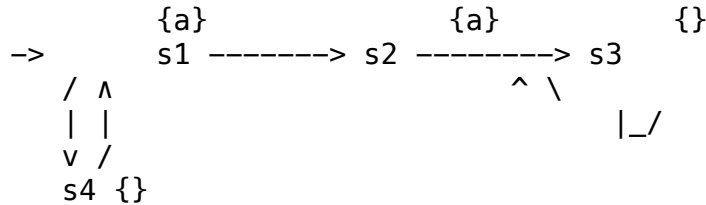
Ainsi, $(S - \text{Sat}((EG \neg(b \wedge \neg a)))) \cap \text{Sat}(EG E(b \cup (a \wedge \neg b))) = (S - \{s_0, s_1\}) \cap \{s_0, s_2, s_5\} = \{s_2, s_3, s_4, s_5\} \cap \{s_0, s_2, s_5\} = \{s_2, s_5\}$

Et donc, $\text{Sat}(\Phi) = S - \{s_2, s_5\} = \{s_0, s_1, s_3, s_4\}$

>>>> OK

E2 :

1. On considère le ST suivant :



Ce ST satisfait FXa (toutes les exécutions passent par un sommet suivi d'un a), mais pas $AFAXa$ (le chemin $s_1, s_2, s_3 \dots$ ne satisfait pas la formule AXa car s_1 a un successeur sans étiquette a), ces deux formules ne sont donc pas équivalentes.

>>>> OK

2. On va montrer que les formules $AF(a \wedge AF b)$ et $F(a \wedge F b)$ sont équivalentes.

(\Rightarrow) Soit S un ST qui satisfait la formule CTL $AF(a \wedge AF b)$. On considère une exécution de S $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots$.
 On doit vérifier qu'il existe un n tel que s_n satisfait $a \wedge F b$.
 S satisfait $AF(a \wedge AF b)$, donc pour tout chemin partant d'un état initial, on arrive à un état satisfaisant $a \wedge AF b$. Il existe donc n tel que s_n satisfait $a \wedge AF b$.
 On va maintenant montrer que si un état satisfait $a \wedge AF b$, alors il satisfait $a \wedge F b$.

>>> correction : si s_i satisfait $a \wedge AF b$, alors $s_i \rightarrow s_{i+1} \rightarrow \dots$ satisfait $a \wedge F b$

Soit s_n le sommet satisfaisant $a \wedge AF b$, et soit une exécution quelconque passant par ce sommet $s_n \rightarrow s_{n+1} \rightarrow \dots$.
 Comme s_n satisfait $a \wedge AF b$, s_n a l'étiquette a , et toute exécution partant de s_n passe par un sommet avec l'étiquette b .
 En particulier, l'exécution $s_n \rightarrow s_{n+1} \dots$ satisfait $AF b$, donc il existe j tel que s_{n+j} a l'étiquette b , et donc s_n satisfait $a \wedge F b$.
 Ainsi, le ST satisfait $F(a \wedge F b)$

>>>> OK

(\Leftarrow) Soit S un ST qui satisfait la formule LTL $F(a \wedge F b)$. Toute exécution de ce ST passe par un sommet qui satisfait $a \wedge F b$ dans cette exécution. Autrement dit, toute exécution passe par un sommet

marqué par a, puis par un sommet marqué par b (qui peut être le même).

On va montrer par l'absurde que S satisfait $AF(a \wedge AF b)$. Si S ne satisfait pas $AF(a \wedge AF b)$, alors il satisfait sa négation : $EG(\neg a \vee EG \neg b)$.

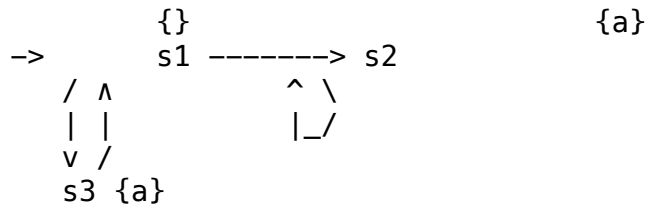
Cela signifie qu'il existe une execution partant du début telle que chaque état satisfait soit $\neg a$, soit $EG \neg b$. On peut donc dire qu'il y a soit un chemin sans a, soit un chemin où, à partir du premier a, il n'y a plus de b.

Cela contredit l'hypothèse que S satisfait $F(a \wedge F b)$. S satisfait donc $AF(a \wedge AF b)$.

>>>> OK

Conclusion : les formules $AF(a \wedge AF b)$ et $F(a \wedge F b)$ sont équivalentes.

3. On considère le ST suivant :



Ce ST satisfait $EG AX a$ (le chemin $s1, s2, s2, \dots$ satisfait globalement $AX a$), mais pas GXA (le chemin $s1, s3, s1, s2, s2, \dots$ ne satisfait pas la formule), ces deux formules ne sont donc pas équivalentes.

>>>> OK

E3:

1.

On veut montrer que $Sat(A(\Phi \cup \Psi))$ est le plus petit ensemble T appartenant à S tel que :

T est un sur-ensemble de $Sat(\Psi)$ et si un sommet s de $Sat(\Phi)$ a tous ses successeurs dans T, alors il appartient à T. (1)

On commence par démontrer que $Sat(A(\Phi \cup \Psi))$ satisfait (1). $Sat(A(\Phi \cup \Psi))$, par définition, est l'ensemble des états qui satisfont $A(\Phi \cup \Psi)$.

Ainsi, par définition, ce sont les sommets depuis lesquels tous les chemins infinis ne passent que par des sommets qui satisfont Φ jusqu'à ce qu'ils passent par un sommet qui satisfait Ψ .

Tout sommet qui satisfait Ψ satisfait $A\Phi \cup \Psi$, donc $Sat(A(\Phi \cup \Psi))$ est un surensemble de $Sat(\Psi)$. De plus, si un sommet satisfait $Sat(\Phi)$ et tous ses successeurs satisfont $A(\Phi \cup \Psi)$, alors, lui même, satisfait $A(\Phi \cup \Psi)$.

$Sat(A(\Phi \cup \Psi))$ satisfait donc (1).

>>>> OK

On va maintenant montrer par l'absurde que tout ensemble qui satisfait (1) est un surensemble de $\text{Sat}(A(\Phi \cup \Psi))$.
On nomme T ensemble quelconque satisfaisant (1). On suppose qu'il existe un sommet s de $\text{Sat}(A(\Phi \cup \Psi))$ qui n'appartient pas à T .
 s n'est pas dans T , donc s ne satisfait pas Ψ , or, il satisfait $A(\Phi \cup \Psi)$, donc il satisfait Φ , donc il appartient à $\text{Sat}(\Phi)$.
Si tous les successeurs de s étaient dans T , s serait lui même dans T , donc s a un successeur s_1 qui n'est pas dans T . Comme s_1 est un successeur de s et que s satisfait $A(\Phi \cup \Psi)$ mais pas Ψ , s_1 est dans $\text{Sat}(A(\Phi \cup \Psi))$.
On peut répéter ce raisonnement pour s_1 pour trouver un successeur s_2 , qui n'appartient pas à T mais qui appartient à $\text{Sat}(A(\Phi \cup \Psi))$. En répétant ce raisonnement à l'infini, on trouve une exécution partant de s qui ne passe jamais par un sommet de T , et donc, qui ne passe jamais par un sommet qui satisfait Ψ .
Ainsi, s ne satisfait pas $A(\Phi \cup \Psi)$. Absurde.
On en conclut que $\text{Sat}(A(\Phi \cup \Psi))$ est bien le plus petit ensemble qui satisfait (1).

>>>> OK

2.

On veut montrer que $\text{Sat}(AG \Phi)$ est le plus grand ensemble T de S qui satisfait :
 T est un sous ensemble de $\{s \text{ de } \text{Sat}(\Phi) \text{ dont tous les successeurs appartiennent à } T\}$. (2)

On commence par montrer que $\text{Sat}(AG \Phi)$ satisfait (2): soit s un sommet de $\text{Sat}(AG \Phi)$. Par définition, tous les successeurs de s appartiennent à $\text{Sat}(AG \Phi)$, et s appartient à $\text{Sat}(\Phi)$. Ainsi, $\text{Sat}(AG \Phi)$ bien est un sous ensemble de $\{s \text{ de } \text{Sat}(\Phi) \text{ dont tous les successeurs appartiennent à } \text{Sat}(AG \Phi)\}$.

>>>> OK

On va maintenant montrer par l'absurde que tout ensemble qui satisfait (2) est un sous ensemble de $\text{Sat}(AG \Phi)$.
On nomme T un ensemble quelconque qui satisfait (2). On suppose qu'il existe un sommet s de T qui n'appartient pas à $\text{Sat}(AG \Phi)$. s n'appartient pas à $\text{Sat}(AG \Phi)$, donc il existe un chemin partant de s , $s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n$ tel que s_n ne satisfait pas Φ . Or s appartient à T , donc s satisfait Φ et tous ses successeurs appartiennent à T . En particulier, s_1 satisfait Φ et tous ses successeurs appartiennent à T . On peut répéter ce raisonnement jusqu'à s_n pour conclure que s_n satisfait Φ . Absurde
On en conclut que $\text{Sat}(AG \Phi)$ est le plus grand ensemble T de S qui satisfait (2)

>>>> OK

3.

On veut montrer que $\text{Sat}(A(\Phi \wedge \Psi))$ est le plus grand ensemble T de S qui satisfait :

T est un sous-ensemble de $(\text{Sat}(\Psi) \cup \{s \text{ de } \text{Sat}(\Phi) \text{ tel que tout successeur de } s \text{ appartient à } T\})$ (3)

On commence par montrer que $\text{Sat}(A(\Phi \vee \Psi))$ satisfait (3)

Soit s appartenant à $\text{Sat}(A(\Phi \vee \Psi))$. s satisfait $A(\Phi \vee \Psi)$. Donc, soit s satisfait Ψ , soit s satisfait Φ et tous ses successeurs satisfont $A(\Phi \vee \Psi)$.

Donc $\text{Sat}(A(\Phi \vee \Psi))$ satisfait (3).

>>>> OK

On va maintenant montrer par l'absurde que tout ensemble T satisfaisant (3) est un sous-ensemble de $\text{Sat}(A(\Phi \vee \Psi))$.

On nomme T un ensemble quelconque qui satisfait (3). On suppose qu'il existe un sommet s de T qui n'appartient pas à $\text{Sat}(A(\Phi \vee \Psi))$. s ne satisfait pas $A(\Phi \vee \Psi)$, donc il existe un chemin partant de s : $s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n$ tel que s_n ne satisfait ni Φ , ni Ψ , et que aucun sommet précédent dans le chemin ne satisfait Ψ . s ne satisfait pas Ψ , donc il appartient à $\{s \text{ de } \text{Sat}(\Phi) \text{ tel que tout successeur de } s \text{ appartient à } T\}$. Ainsi, s satisfait Φ et tous ses successeurs sont dans T. s satisfait Φ , donc s n'est pas s_n .

s_1 est dans T. s_1 ne satisfait pas $A(\Phi \vee \Psi)$, car il existe un chemin de s_1 à s_n , qui ne contient pas de sommet de $\text{Sat}(\Psi)$ (et s_n ne satisfait pas Φ).

On peut donc répéter le raisonnement pour tous les sommets du chemin jusqu'à s_n , et déduire que s_n satisfait Φ . Absurde.

On en déduit que $\text{Sat}(A(\Phi \vee \Psi))$ est le plus grand ensemble satisfaisant (3)

>>>> OK

E4:

1. Soit deux ST S_1 et S_2 tels que S_1 est inclu dans S_2 . On va démontrer par récurrence que pour toute formule ECTL Φ , si un sommet de S_1 satisfait cette formule, ce même sommet dans S_2 la satisfait aussi. Pour cela, on décompose la formule ECTL Φ en un arbre : chaque sommet interne de l'arbre représente une des possibilités suivantes de la grammaire : $t_1 \wedge t_2$, $\text{EX } t_1$, $\text{EG } t_1$, ou $\text{E } t_1 \cup t_2$, où t_1 et t_2 sont les sommets fils. Les feuilles de l'arbre représentent les formules a ou $\neg a$, pour a une proposition atomique quelconque. Par simplicité d'écriture, on écrira par la suite "le sommet s du ST satisfait t " pour signifier "le sommet s du ST satisfait la formule ECTL représentée par t ".

Initialisation : Soit f une feuille de l'arbre. f représente une proposition atomique ou sa négation. Si un sommet quelconque s de S_1 satisfait f , alors :

-si f est de la forme a , $L_1(s)$ contient a . $L_2(s) = L_1(s)$, donc $L_2(s)$ contient a , et s satisfait f dans S_2 .

-si f est de la forme $\neg a$, $L_1(s)$ ne contient pas a . $L_2(s) = L_1(s)$, donc $L_2(s)$ ne contient pas a , et s satisfait f dans S_2 .

Hérédité : On suppose un sommet interne t de notre arbre décomposant la formule Φ . On suppose également que pour chaque successeur t' de t , si un sommet s de S_1 satisfait t' dans S_1 , alors s satisfait t'

dans S2. On va montrer que pour tout sommet s de S1, si un sommet quelconque s satisfait t dans S1, alors s satisfait t dans S2.

Sois s un sommet quelconque de S1 tel que s satisfait t. On fait une disjonction de cas entre les formules que peut représenter t :

-t = $\Phi_1 \wedge \Phi_2$: s satisfait t dans S1, donc s satisfait Φ_1 et Φ_2 dans S1. Par hypothèse de récurrence, s satisfait Φ_1 et Φ_2 dans S2, donc s satisfait t dans S2.

-t = $EX \Phi$: s satisfait t dans S1, donc s a un successeur s' dans S1 qui satisfait Φ . Par hypothèse de récurrence, s' satisfait Φ dans S2. Or les transitions de S1 sont un sous ensemble des transitions de S2, donc s' est aussi un successeur de s dans S2, donc s satisfait t dans S2.

-t = $EG\Phi$: s satisfait t dans S1, donc il existe un chemin infini de S1 partant de s tel que tous les sommets de ce chemin satisfont Φ dans S1. Par hypothèse de récurrence, tous les sommets de ce chemin satisfont Φ dans S2 aussi. De plus, comme les transitions de S1 sont un sous ensemble des transitions de S2, le chemin décrit précédemment est aussi un chemin dans S2. Donc s satisfait t dans S2.

-t = $E \Phi_1 U \Phi_2$: s satisfait t dans S1, donc il existe un chemin de S1 partant de s dont tous les sommets sauf le dernier satisfont Φ_1 et dont le dernier sommet satisfait Φ_2 . Par hypothèse de récurrence tous ces sommets satisfont ces mêmes propriétés dans S2, et comme les transitions de S1 sont un sous-ensemble des transitions de S2, ce chemin existe aussi dans S2. Ainsi, s satisfait t dans S2.

Conclusion : Pour tout sommet s de S1 et pour toute propriété ECTL Φ , si s satisfait Φ dans S1, alors s satisfait Φ dans S2.

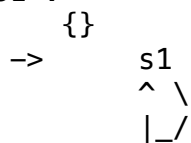
En particulier, si S1 satisfait Φ , alors tous les états initiaux de S1 satisfont Φ . S2 a les mêmes états initiaux, donc tous les états initiaux de S2 satisfont Φ également. Donc S2 satisfait Φ .

>>>> OK

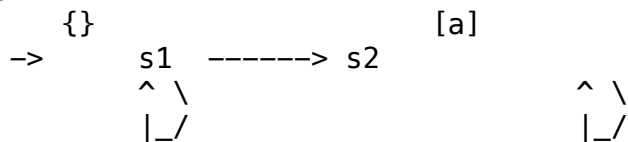
2.

Soit les ST suivants

S1 :



S2 :



S1 est inclu dans S2. La formule CTL $\neg EXa$ est satisfaite par S1 mais pas par S2. S'il existait une formule ECTL équivalente à $\neg EXa$, cela contredirait le résultat précédent. Il existe donc des formules CTL qui n'ont pas d'équivalents ECTL.

>>>> OK