

TD3 Bisimulation

Q1

I Partition initiale: $\pi_0 = \{ B_1, B_2, B_3 \}$
 ϕ $\{ a \}$
 $B_1 = \{ s_1, s_6 \}$ $\{ s_2, s_7, s_{10}, s_{12}, s_{13} \} = B_2$

$\{ s_3, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{11} \} = B_3$
 $\{ a, b \}$

Quels blocs sont divisés par B_3 ?

(B_3 est "splitter" de qui?)

B_1 : non ($s_1 \rightarrow B_3, s_6 \rightarrow B_3$)

B_2 : non (aucun états va ds B_3)

B_3 : oui

Refine (B_3, B_3) =

$\{ \{ s_3, s_4, s_8, s_9, s_{11} \}, \{ s_5 \} \}$

$$\textcircled{2} \quad \pi_1 = \{ B_1', B_2', B_3', B_4' \}$$

$$B_1' = B_1, \quad B_2' = B_2,$$

$$B_3' = \{ s_3, s_4, s_8, s_9, s_{11} \},$$

$$B_4' = \{ s_5 \}$$

B_4' divise B_1' seulement

$$\textcircled{3} \quad \pi_2 = \{ B_1'', B_2'', B_3'', B_4'', B_5'' \}$$

$$B_1'' = \{ s_1 \}, \quad B_2'' = \{ s_6 \}$$

$$B_3'' = B_2', \quad B_4'' = B_3', \quad B_5'' = B_4'$$

B_2'' divise B_3'' en

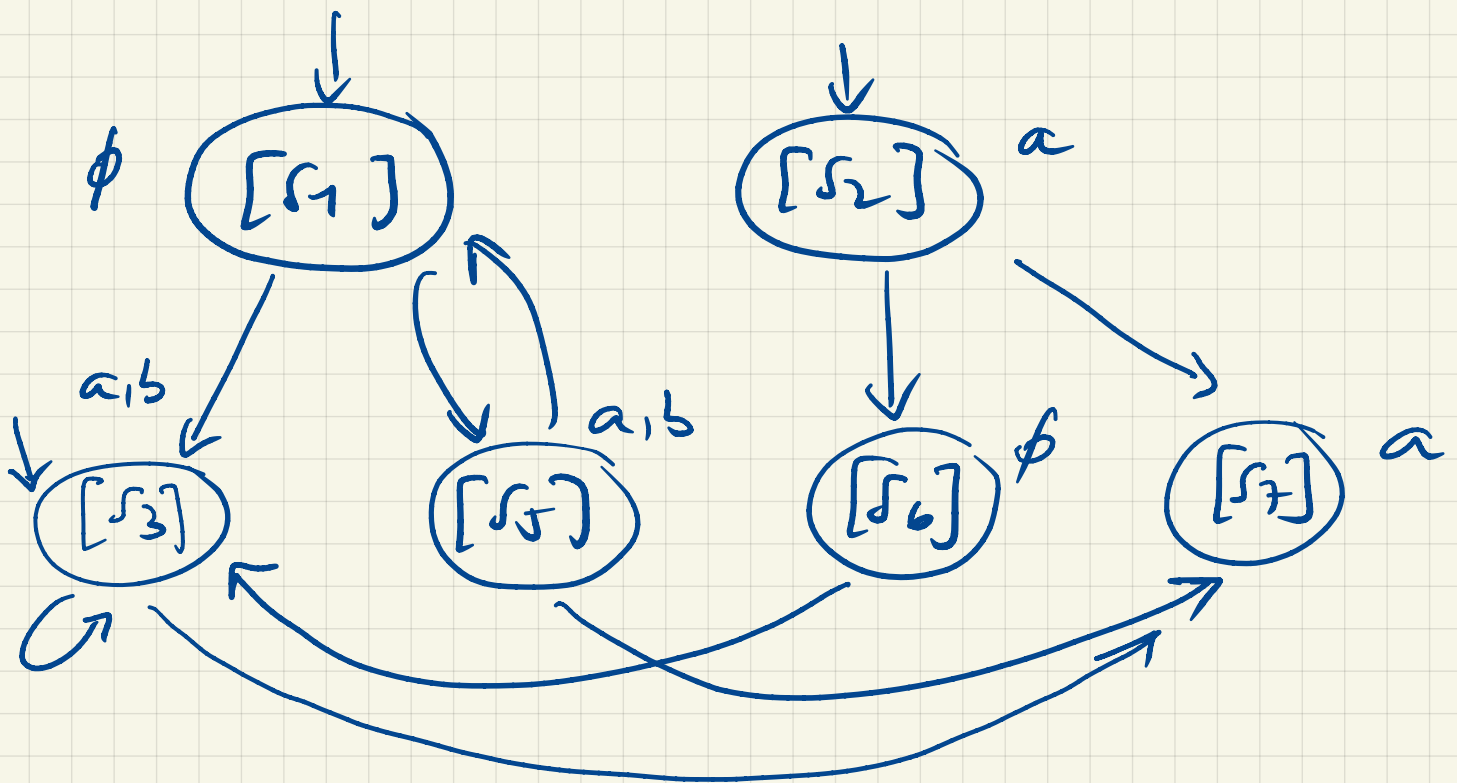
$$\{ s_2 \}, \quad \{ s_7, s_{10}, s_{12}, s_{13} \}$$

Résultat final :

$$\pi: \{ s_1 \}, \{ s_6 \}, \{ s_5 \}, \{ s_2 \},$$

$$\{ s_3, s_4, s_8, s_9, s_{11} \}, \quad \{ s_7, s_{10}, s_{12}, s_{13} \}$$

ST quotient :



$$[s_3] = \{ s_3, s_4, s_8, s_9, s_{11} \}$$

$$[s_7] = \{ s_7, s_{10}, s_{12}, s_{13} \}$$

II

$$\phi_{s_1} = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge EX EX (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\phi_{s_2} = a \wedge EX (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$\phi_{s_3} = AG a \wedge EX EX \#$$

$$\phi_{s_7} = a \wedge EX \#$$

CTL* : combinaison de CTL et LTL

formules
d'états

$$\phi ::= \text{tt} \mid a \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \neg \phi \mid \exists \psi$$

formules
de chemin

$$\psi ::= \phi \mid \psi_1 \wedge \psi_2 \mid \neg \psi \mid X \psi \mid \psi_1 \cup \psi_2$$

Comme pour le model-checking de CTL, on calcule pour chaque sous-formule d'état

ϕ l'ensemble des états qui satisfont ϕ :

$$\text{sat}(\phi)$$

$$= \{ s \in S : s \models \phi \}$$

Algorithme de MC (CTL^{*}) :

- bottom-up sur la formule
- pour chaque sous-formule d'état ψ de ϕ
 - si $\psi = tt, a$ ou combinaison booléenne \rightarrow OK
 - sinon : on suppose avoir déjà calculé $Sat(\psi')$ pour toute sous-formule d'état de ψ
 - \rightarrow on marque par $a_{\psi'}$ les états de $Sat(\psi')$

$$\phi = E \psi$$

On réécrit ψ en formule LTL avec les nouvelles prop. atomiques $a_{\psi'}$

(pour ψ' : sous-formules directes
de ψ)

→ on détermine $\text{Sat}_{\text{LTL}}(\neg\psi)$
avec algo de model-checking
LTL

$$\text{Sat}(\psi) := S \setminus \text{Sat}_{\text{LTL}}(\neg\psi)$$

Complexité de MC (CTL*) :

comme pour LTL

$$O((n+m) \cdot 2^{|\Phi|})$$

$$n = |S|, \quad m = 1 \rightarrow 1$$

Q3

$$a R b \equiv \neg(\bar{a} \cup \bar{b})$$

$$\equiv Gb \vee (b \cup (a \wedge b))$$

On note $S \leq_{\forall CTL} S'$ si

\forall formule $\forall CTL \ \phi$:

$$S \models \phi \Rightarrow S' \models \phi$$

On montre :

$$S_2 \leq_{\forall CTL} S_1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$S_1 \leq S_2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$S_2 \leq_{\forall CTL^*} S_1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$S_2 \leq_{\forall CTL} S_1$$

(1) On montre que

$R = \{ (s_1, s_2) : s_2 \leq_{\forall CTL} s_1 \}$
est relation de simulation.

• $(s_1, s_2) \in R \Rightarrow L(s_1) = L(s_2)$

• On déf. une formule ϕ_s
de $\forall CTL$ tq.

$$\text{Sat}(\phi_s) = \{ s' : (s', s) \in R \}$$

si $(s', s) \notin R$ alors il ex.

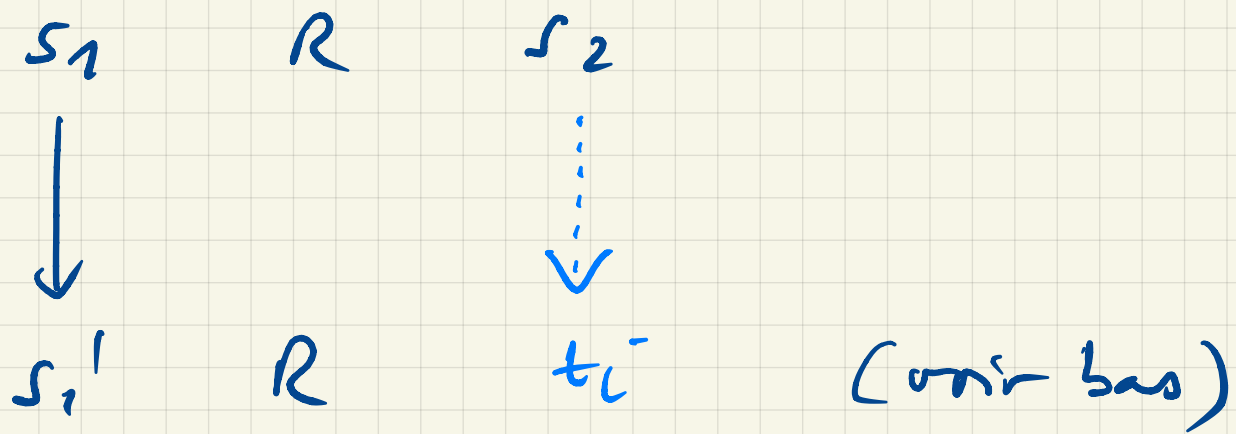
$\phi_{s, s'}$ de $\forall CTL$ tq.

$s \models \phi_{s, s'}$ et $s' \not\models \phi_{s, s'}$

$\phi_s := \bigwedge_{(s', s) \notin R} \phi_{s, s'}$ est $\forall CTL!$

TODO: $\text{Sat}(\phi_s) = \{ s' : (s', s) \in R \}$

R est simulation :



$$\text{Post}(s_2) = \{ t_1, \dots, t_m \}$$

$$\phi_i := \phi_{t_i}$$

(en particulier $t_i \models \phi_i$)

$$s_2 \models A \times \left(\bigvee_{i=1}^m \phi_i \right) \quad (\forall \text{CTL})$$

$$(s_1, s_2) \in R \Rightarrow$$

$$s_1 \models A \times \left(\bigvee_i \phi_i \right) \Rightarrow$$

$$\exists i : s_1' \models \phi_i \Rightarrow$$

$$\exists i : (s_1', t_i) \in R$$