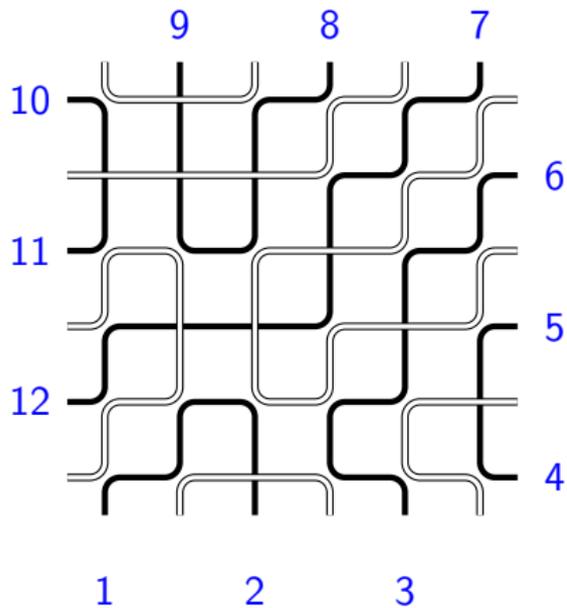
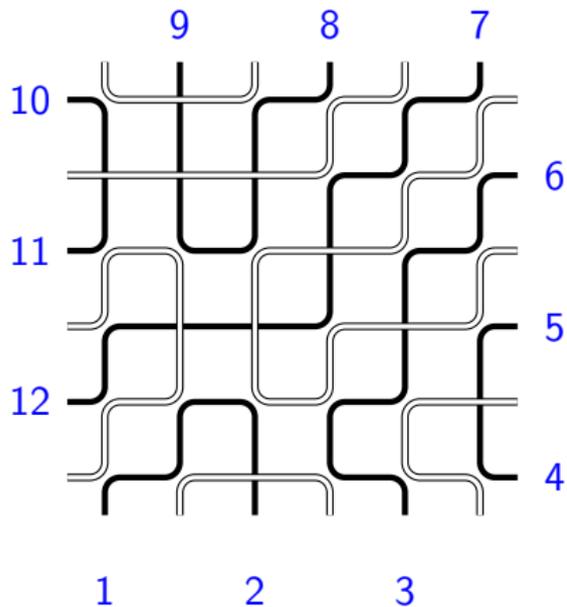


# Conventions



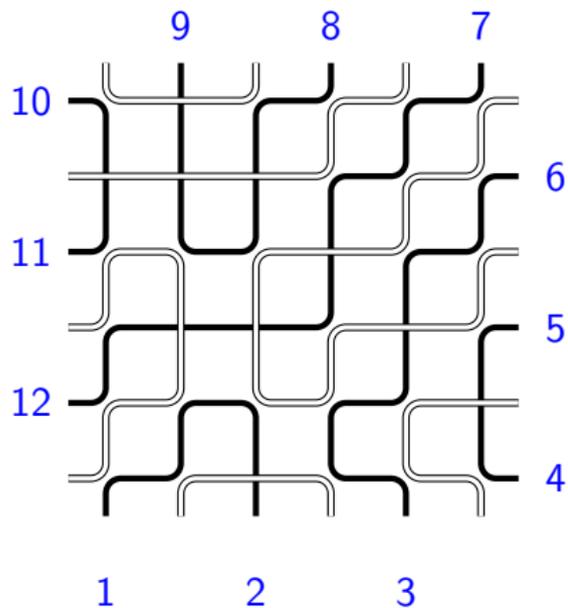
- Seuls les brins noirs sont numérotés.

# Conventions



- Seuls les brins noirs sont numérotés.
- Le brin numéro 1 est le premier de la ligne du bas.

# Conventions



- Seuls les brins noirs sont numérotés.
- Le brin numéro 1 est le premier de la ligne du bas.
- Un brin blanc a même numéro que son prédécesseur noir.



Luigi Cantini, Andrea Sportiello, Proof of the Razumov-Stroganov conjecture, pages 3 et 4 :

*A simple bijection relates FPL configurations to configurations in the statistical ensemble of the six-vertex model. The jargon of this model suggests to denote by the letters  $a$ ,  $b$  and  $c$  the six possible configurations in a neighbourhood of a vertex, according to the following rule :*



# Etiquettes



- Etiquette  $b^2c a^3$ , de la forme  $b^*c a^*$ .

# Etiquettes



- Etiquette  $b^2 c a^3$ , de la forme  $b^* c a^*$ .
- Il suffit de connaître la position de  $c$ , c'est-à-dire du 1 dans la dernière ligne de la matrice à signes alternants.

# Etiquettes



- Etiquette  $b^2 c a^3$ , de la forme  $b^* c a^*$ .
- Il suffit de connaître la position de  $c$ , c'est-à-dire du 1 dans la dernière ligne de la matrice à signes alternants.
- Le reste est *gelé*.

# Raffinement

Soit  $i$  un indice fixé arbitrairement :

$$|s\rangle = |s_{\bullet i}^a\rangle + |s_{\bullet i}^b\rangle + |s_{\bullet i}^c\rangle$$

(on *raffine* le dénombrement des FPL suivant le premier pas issu du brin *noir* numéro  $i$ ).

# Raffinement

Soit  $i$  un indice fixé arbitrairement :

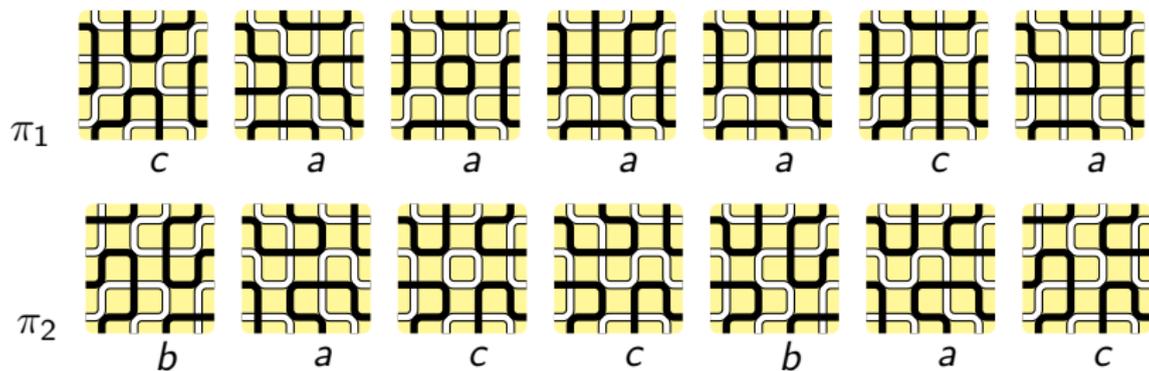
$$|s\rangle = |s_{\bullet i}^a\rangle + |s_{\bullet i}^b\rangle + |s_{\bullet i}^c\rangle$$

(on *raffine* le dénombrement des FPL suivant le premier pas issu du brin *noir* numéro  $i$ ). De même :

$$|s\rangle = |s_{\circ i}^a\rangle + |s_{\circ i}^b\rangle + |s_{\circ i}^c\rangle$$

en utilisant le brin *blanc* numéro  $i$ .

## Raffinement : exemple pour $n = 4$

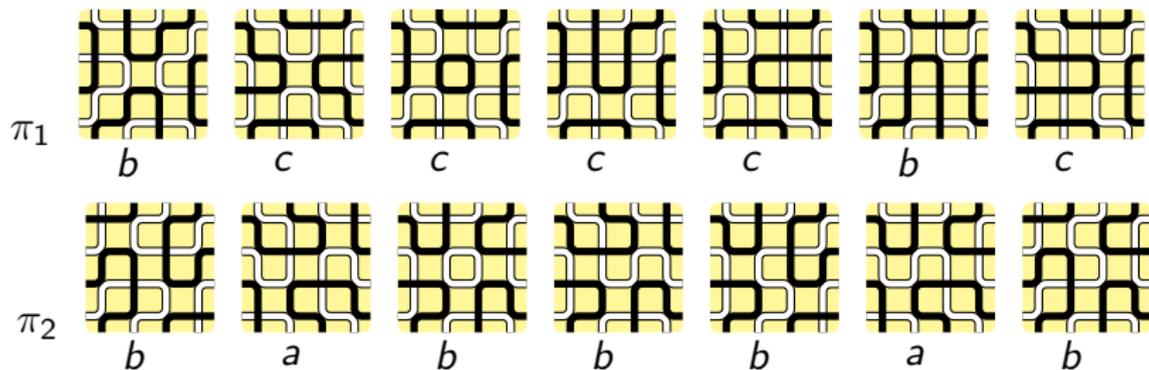


$$|s_{\bullet 2}^a\rangle = 5|\pi_1\rangle + 2|\pi_2\rangle + \dots$$

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = \quad \quad \quad 2|\pi_2\rangle + \dots$$

$$|s_{\bullet 2}^c\rangle = 2|\pi_1\rangle + 3|\pi_2\rangle + \dots$$

## Raffinement : exemple pour $n = 4$



$$\begin{aligned}
 |s_{01}^a\rangle &= 2|\pi_2\rangle + \dots \\
 |s_{01}^b\rangle &= 2|\pi_1\rangle + 5|\pi_2\rangle + \dots \\
 |s_{01}^c\rangle &= 5|\pi_1\rangle + \dots
 \end{aligned}$$

# Objectif

Soit  $i$  un indice fixé arbitrairement, on veut prouver :

$$S e_i |s\rangle = S |s\rangle$$

autrement dit :

$$S (e_i - 1) |s\rangle = 0$$

# Objectif

Soit  $i$  un indice fixé arbitrairement, on veut prouver :

$$S e_i |s\rangle = S |s\rangle$$

autrement dit :

$$S (e_i - 1) |s\rangle = 0$$

On choisira  $i = 1$ , mais des calculs similaires peuvent être conduits pour toute valeur de  $i$ .

# Objectif

Soit  $i$  un indice fixé arbitrairement, on veut prouver :

$$S e_i |s\rangle = S |s\rangle$$

autrement dit :

$$S (e_i - 1) |s\rangle = 0$$

On choisira  $i = 1$ , mais des calculs similaires peuvent être conduits pour toute valeur de  $i$ .

Dans la suite on posera  $Z = S (e_1 - 1) |s\rangle$  et notre but est de prouver :

# Objectif

Soit  $i$  un indice fixé arbitrairement, on veut prouver :

$$S e_i |s\rangle = S |s\rangle$$

autrement dit :

$$S (e_i - 1) |s\rangle = 0$$

On choisira  $i = 1$ , mais des calculs similaires peuvent être conduits pour toute valeur de  $i$ .

Dans la suite on posera  $Z = S (e_1 - 1) |s\rangle$  et notre but est de prouver :

$$\boxed{Z=0}$$

## Bénis soient les coins

Le *premier* brin noir ne peut pas tourner à gauche (collision avec un brin blanc) :

$$|s_{\bullet 1}^a\rangle = 0$$

## Bénis soient les coins

Le *premier* brin noir ne peut pas tourner à gauche (collision avec un brin blanc) :

$$|s_{\bullet 1}^a\rangle = 0$$

$$|s\rangle = |s_{\bullet 1}^b\rangle + |s_{\bullet 1}^c\rangle$$

## Bénis soient les coins

Le *premier* brin noir ne peut pas tourner à gauche (collision avec un brin blanc) :

$$|s_{\bullet 1}^a\rangle = 0$$

$$|s\rangle = |s_{\bullet 1}^b\rangle + |s_{\bullet 1}^c\rangle$$

d'où le *développement* :

$$Z = S(e_1 - 1) |s_{\bullet 1}^c + s_{\bullet 1}^b\rangle$$

## Une arête doit être noire ou blanche

Selon la couleur de l'arête horizontale qui relie les brins noir et blanc de numéro (commun)  $i$ , on a deux cas qui s'excluent mutuellement :

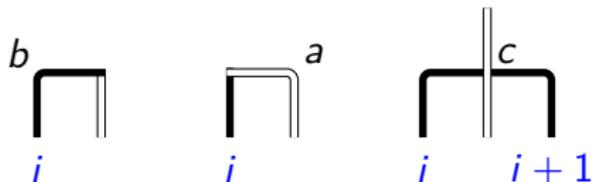


donc :

$$|s_{\bullet i}^b\rangle = |s_{oi}^b\rangle + |s_{oi}^c\rangle$$

## Une arête doit être noire ou blanche

Selon la couleur de l'arête horizontale qui relie les brins noir et blanc de numéro (commun)  $i$ , on a deux cas qui s'excluent mutuellement :



donc :

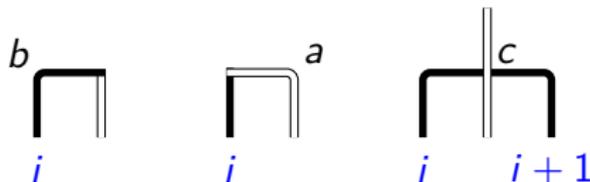
$$|s_{\bullet i}^b\rangle = |s_{oi}^b\rangle + |s_{oi}^c\rangle$$

d'autre part :

$$e_i |s_{oi}^c\rangle = |s_{oi}^c\rangle$$

## Une arête doit être noire ou blanche

Selon la couleur de l'arête horizontale qui relie les brins noir et blanc de numéro (commun)  $i$ , on a deux cas qui s'excluent mutuellement :



donc :

$$|s_{\bullet i}^b\rangle = |s_{oi}^b\rangle + |s_{oi}^c\rangle$$

d'autre part :

$$e_i |s_{oi}^c\rangle = |s_{oi}^c\rangle$$

d'où le développement :

$$Z = S(e_1 - 1) |s_{\bullet 1}^c + s_{o1}^b\rangle$$

## Développement (suite)

De même :

$$|s_{o1}^b\rangle = |s_{\bullet 2}^b\rangle + |s_{\bullet 2}^c\rangle$$

## Développement (suite)

De même :

$$|s_{o1}^b\rangle = |s_{\bullet 2}^b\rangle + |s_{\bullet 2}^c\rangle$$

d'où le développement :

$$Z = S(e_1 - 1) |s_{\bullet 1}^c + s_{\bullet 2}^c + s_{\bullet 2}^b\rangle$$

## Développement (suite)

De même :

$$|s_{o1}^b\rangle = |s_{\bullet 2}^b\rangle + |s_{\bullet 2}^c\rangle$$

d'où le développement :

$$Z = S(e_1 - 1) |s_{\bullet 1}^c + s_{\bullet 2}^c + s_{\bullet 2}^b\rangle$$

Pour avancer il faut synchroniser les indices !

## Première percée

- Nouvelles relations de *giration* obtenues par extension de l'algorithme de Wieland :

$$e_i |s_{\bullet i}^x\rangle = R e_{i-1} |s_{\bullet i}^x\rangle \quad (1)$$

dans chacun des cas  $x = a, b, c$ .

## Première percée

- Nouvelles relations de *giration* obtenues par extension de l'algorithme de Wieland :

$$e_i |s_{\bullet i}^x\rangle = R e_{i-1} |s_{\bullet i}^x\rangle \quad (1)$$

dans chacun des cas  $x = a, b, c$ .

- Or  $SR = S$  d'où le développement :

$$Z = S(e_1 - 1) |s_{\bullet 1}^c\rangle + S(e_2 - 1) |s_{\bullet 2}^c + s_{\bullet 2}^b\rangle$$

## Développement (suite et fin)

On continue :

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = |s_{o2}^b\rangle + |s_{o2}^c\rangle$$

## Développement (suite et fin)

On continue :

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = |s_{o2}^b\rangle + |s_{o2}^c\rangle$$

$$(e_2 - 1)|s_{o2}^c\rangle = 0$$

## Développement (suite et fin)

On continue :

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = |s_{o2}^b\rangle + |s_{o2}^c\rangle$$

$$(e_2 - 1)|s_{o2}^c\rangle = 0$$

$$|s_{o2}^b\rangle = |s_{\bullet 3}^b\rangle + |s_{\bullet 3}^c\rangle$$

## Développement (suite et fin)

On continue :

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = |s_{\circ 2}^b\rangle + |s_{\circ 2}^c\rangle$$

$$(e_2 - 1)|s_{\circ 2}^c\rangle = 0$$

$$|s_{\circ 2}^b\rangle = |s_{\bullet 3}^b\rangle + |s_{\bullet 3}^c\rangle$$

Giration etc. jusqu'à arriver dans le coin droit :

$$|s_{\bullet k}^b\rangle = 0 \text{ ou } |s_{\circ k}^b\rangle = 0$$

selon la parité. Développement final :

## Développement (suite et fin)

On continue :

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = |s_{\circ 2}^b\rangle + |s_{\circ 2}^c\rangle$$

$$(e_2 - 1)|s_{\circ 2}^c\rangle = 0$$

$$|s_{\circ 2}^b\rangle = |s_{\bullet 3}^b\rangle + |s_{\bullet 3}^c\rangle$$

Giration etc. jusqu'à arriver dans le coin droit :

$$|s_{\bullet k}^b\rangle = 0 \text{ ou } |s_{\circ k}^b\rangle = 0$$

selon la parité. Développement final :

$$Z = S(e_1 - 1)|s_{\bullet 1}^c\rangle + S(e_2 - 1)|s_{\bullet 2}^c\rangle + S(e_3 - 1)|s_{\bullet 3}^c\rangle + \dots$$

## Développement (suite et fin)

On continue :

$$|s_{\bullet 2}^b\rangle = |s_{\circ 2}^b\rangle + |s_{\circ 2}^c\rangle$$

$$(e_2 - 1)|s_{\circ 2}^c\rangle = 0$$

$$|s_{\circ 2}^b\rangle = |s_{\bullet 3}^b\rangle + |s_{\bullet 3}^c\rangle$$

Giration etc. jusqu'à arriver dans le coin droit :

$$|s_{\bullet k}^b\rangle = 0 \text{ ou } |s_{\circ k}^b\rangle = 0$$

selon la parité. Développement final :

$$Z = S(e_1 - 1)|s_{\bullet 1}^c\rangle + S(e_2 - 1)|s_{\bullet 2}^c\rangle + S(e_3 - 1)|s_{\bullet 3}^c\rangle + \dots$$

Ce n'est pas simplement la traditionnelle classification des ASM selon la position du 1 dans la dernière ligne !

## Seconde percée

Chaque terme de la somme est nul :

$$S(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle = 0 \quad (2)$$

## Seconde percée

Chaque terme de la somme est nul :

$$S(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle = 0 \quad (2)$$

La preuve de la formule de Razumov et Stroganov est donc ramenée à la preuve des formules (1) et (2).

# Illustration (1) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2								Classe 3			
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^a\rangle$	5	2	3	0	1	3	1	2	0	2	1	0	0	1
$ s_{\bullet 2}^b\rangle$	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_1$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_1$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_1$	$\pi_6$
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

## Illustration (1) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2								Classe 3			
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^a\rangle$	5	2	3	0	1	3	1	2	0	2	1	0	0	1
$ s_{\bullet 2}^b\rangle$	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_1$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_1$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_1$	$\pi_6$
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$e_1 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_1\rangle + 5|\pi_3\rangle + 4|\pi_6\rangle + 3|\pi_8\rangle + 2|\pi_{11}\rangle$$

# Illustration (1) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2								Classe 3			
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^a\rangle$	5	2	3	0	1	3	1	2	0	2	1	0	0	1
$ s_{\bullet 2}^b\rangle$	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_1$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_1$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_1$	$\pi_6$
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$e_1 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_1\rangle + 5|\pi_3\rangle + 4|\pi_6\rangle + 3|\pi_8\rangle + 2|\pi_{11}\rangle$$

$$e_2 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_2\rangle + 5|\pi_4\rangle + 4|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + 2|\pi_{12}\rangle$$

# Illustration (1) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2								Classe 3			
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^a\rangle$	5	2	3	0	1	3	1	2	0	2	1	0	0	1
$ s_{\bullet 2}^b\rangle$	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_1$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_1$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_1$	$\pi_6$
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$e_1 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_1\rangle + 5|\pi_3\rangle + \text{color: red} 4|\pi_6\rangle + 3|\pi_8\rangle + 2|\pi_{11}\rangle$$

$$e_2 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_2\rangle + 5|\pi_4\rangle + \text{color: red} 4|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + 2|\pi_{12}\rangle$$

# Illustration (1) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2								Classe 3			
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^a\rangle$	5	2	3	0	1	3	1	2	0	2	1	0	0	1
$ s_{\bullet 2}^b\rangle$	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_1$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_1$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_1$	$\pi_6$
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$e_1 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_1\rangle + 5|\pi_3\rangle + 4|\pi_6\rangle + 3|\pi_8\rangle + 2|\pi_{11}\rangle$$

$$e_2 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_2\rangle + 5|\pi_4\rangle + 4|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + 2|\pi_{12}\rangle$$

## Illustration (1) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^a\rangle$	5	2	3	0	1	3	1	2	0	2	1	0	0	1
$ s_{\bullet 2}^b\rangle$	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_1$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_6$	$\pi_1$	$\pi_{11}$	$\pi_8$	$\pi_1$	$\pi_6$
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$e_1 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_1\rangle + 5|\pi_3\rangle + 4|\pi_6\rangle + 3|\pi_8\rangle + 2|\pi_{11}\rangle$$

$$e_2 |s_{\bullet 2}^a\rangle = 7|\pi_2\rangle + 5|\pi_4\rangle + 4|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + 2|\pi_{12}\rangle$$

Et ainsi de suite ; idem pour  $|s_{\bullet 2}^b\rangle$  et  $|s_{\bullet 2}^c\rangle$ . Remarque : en additionnant les trois lignes on obtient la formule de giration originale pour  $|s\rangle$ .

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2								Classe 3			
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$S|s_{\bullet 2}^c\rangle = \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle$$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$S|s_{\bullet 2}^c\rangle = \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle$$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$S|s_{\bullet 2}^c\rangle = \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle$$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$\begin{aligned}
 S|s_{\bullet 2}^c\rangle &= \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle \\
 &= 20 |\Pi_1\rangle + 8 |\Pi_2\rangle + 2 |\Pi_3\rangle
 \end{aligned}$$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$\begin{aligned}
 S|s_{\bullet 2}^c\rangle &= \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle \\
 &= 20 |\Pi_1\rangle + 8 |\Pi_2\rangle + 2 |\Pi_3\rangle
 \end{aligned}$$

$$e_2|s_{\bullet 2}^c\rangle = 5|\pi_2\rangle + 3|\pi_4\rangle + 2|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + |\pi_{12}\rangle$$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$\begin{aligned}
 S|s_{\bullet 2}^c\rangle &= \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle \\
 &= 20 |\Pi_1\rangle + 8 |\Pi_2\rangle + 2 |\Pi_3\rangle
 \end{aligned}$$

$$e_2|s_{\bullet 2}^c\rangle = 5|\pi_2\rangle + 3|\pi_4\rangle + 2|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + |\pi_{12}\rangle$$

$$S e_2|s_{\bullet 2}^c\rangle = 20|\Pi_1\rangle + 8|\Pi_2\rangle + 2|\Pi_3\rangle$$

## Illustration (2) pour $n = 4$

	Classe 1		Classe 2							Classe 3				
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$
$ s_{\bullet 2}^c\rangle$	2	3	0	1	2	0	1	1	2	1	0	0	1	0
$e_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_2$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_7$	$\pi_7$	$\pi_{12}$	$\pi_9$	$\pi_2$

$$\begin{aligned}
 S|s_{\bullet 2}^c\rangle &= \frac{8 \times 5}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 8}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle \\
 &= 20 |\Pi_1\rangle + 8 |\Pi_2\rangle + 2 |\Pi_3\rangle
 \end{aligned}$$

$$e_2|s_{\bullet 2}^c\rangle = 5|\pi_2\rangle + 3|\pi_4\rangle + 2|\pi_7\rangle + 3|\pi_9\rangle + |\pi_{12}\rangle$$

$$S e_2|s_{\bullet 2}^c\rangle = 20|\Pi_1\rangle + 8|\Pi_2\rangle + 2|\Pi_3\rangle$$

# Les 42 FPL de taille 4

