

3. Grundprinzipien der Sonnengeometrie

Petros Axaopoulos, TEI - Athens Greece

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels wird der Leser in der Lage sein:

- die geometrische Struktur zwischen Sonne und Erde zu verstehen
- verschiedene Berechnungen zwischen Sonnenwinkeln durchzuführen
- zwischen der Sonnen- und der Ortszeit zu unterscheiden
- die Position der Sonne im Verhältnis zur Erde zu bestimmen
- den täglichen und jährlichen scheinbaren Weg der Sonnenbewegung zu erklären
- den Sonneneinfallswinkel relativ zu einer ebenen, zur Erde beliebig geneigten Fläche zu berechnen

Dieses Kapitel beschreibt die geometrische Struktur zwischen Sonne und Erde und wie man sie nutzen kann, um die Position der Sonne relativ zur Erde zu bestimmen. Für Sonnenenergieanwendungen ist es wichtig, die scheinbare Bewegung der Sonne und die Sonne-Erde-Winkel zu verstehen. Diesen Mechanismus zu verstehen, wird für die folgenden Kapitel, die auch elementare Kenntnisse der Astronomie beinhalten, von großer Bedeutung sein. Daher liegt der Schwerpunkt auf den Kenntnissen und Begriffen, die die Sonne-Erde-Winkel und deren Zusammenhänge betreffen, da sie in der Sonnengeometrie von großer Bedeutung sind.

3.1 Die Erdrotation

Die Erde dreht sich um ihre eigene Achse, bekannt als die Polachse $P P'$ (Abb. 3.1). Die Punkte, wo diese Achse die Erde schneidet, sind der Nordpol (N_p) und der Südpol (S_p). Den Großkreis $E I W I'$ senkrecht zu dieser Achse nennt man Äquator, und die Ebene, die den Äquator enthält, ist die Äquatorebene, die die Erde in Nord- und Südhalbkugel teilt. Der Großkreis $E S W N$ senkrecht zur Achse $Z Z'$ wird Horizont genannt.

Die Position der Sonne am Himmel ändert sich im Verlaufe des Tages und der Jahreszeiten aufgrund der täglichen Rotation der Erde um ihre eigene Achse. In ähnlicher Weise ändert sich auch ihre elliptische Umlaufbahn um die Sonne, einmal pro Jahr, wobei die Sonne sich in einem Brennpunkt der Ellipse befindet. (Abb. 3.2).

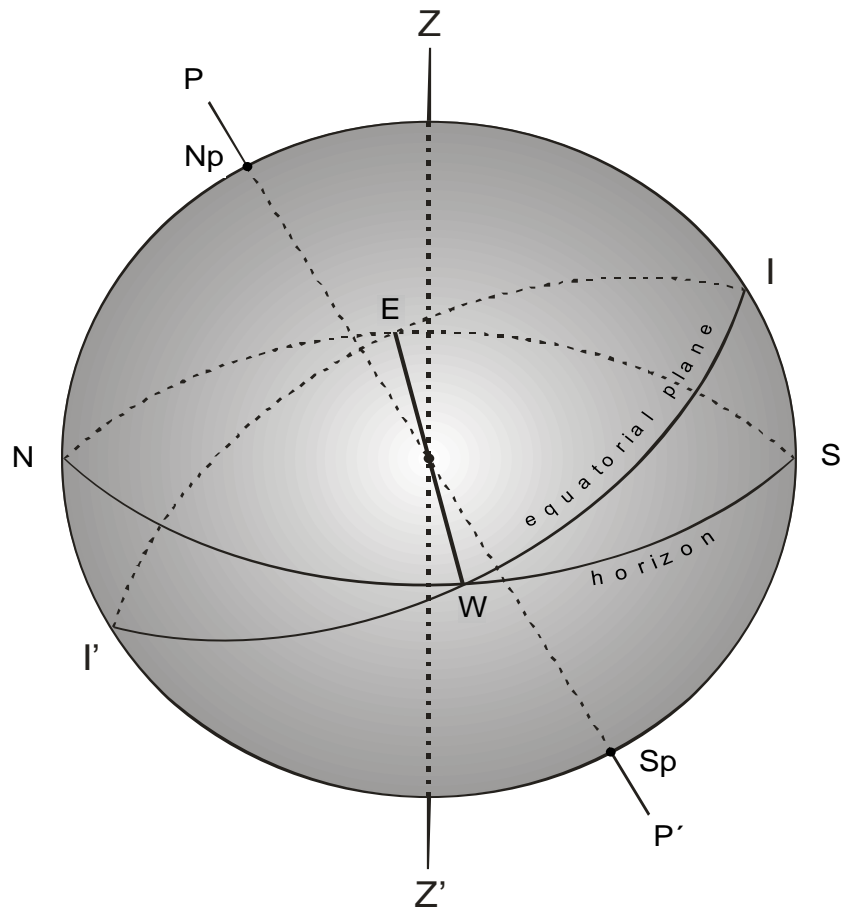


Abb. 3.1 Horizont und Äquatorebene

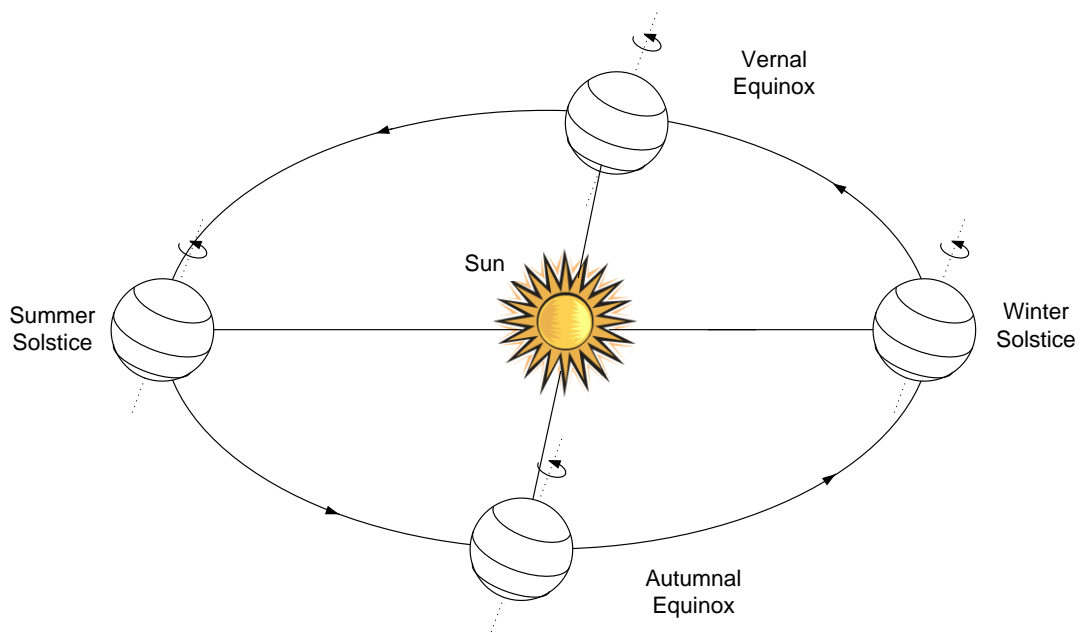


Abb. 3.2 Rotation der Erde um ihre eigene Achse und ihr elliptischer Orbit um die Sonne

Die Ebene, die den elliptischen Erdborbit enthält, nennt man Ekliptikebene. Die Jahreszeiten entstehen aufgrund der Tatsache, dass die Erdachse, die senkrecht zur Äquatorebene steht, zur Ekliptikebene geneigt ist (Abb. 3.3).

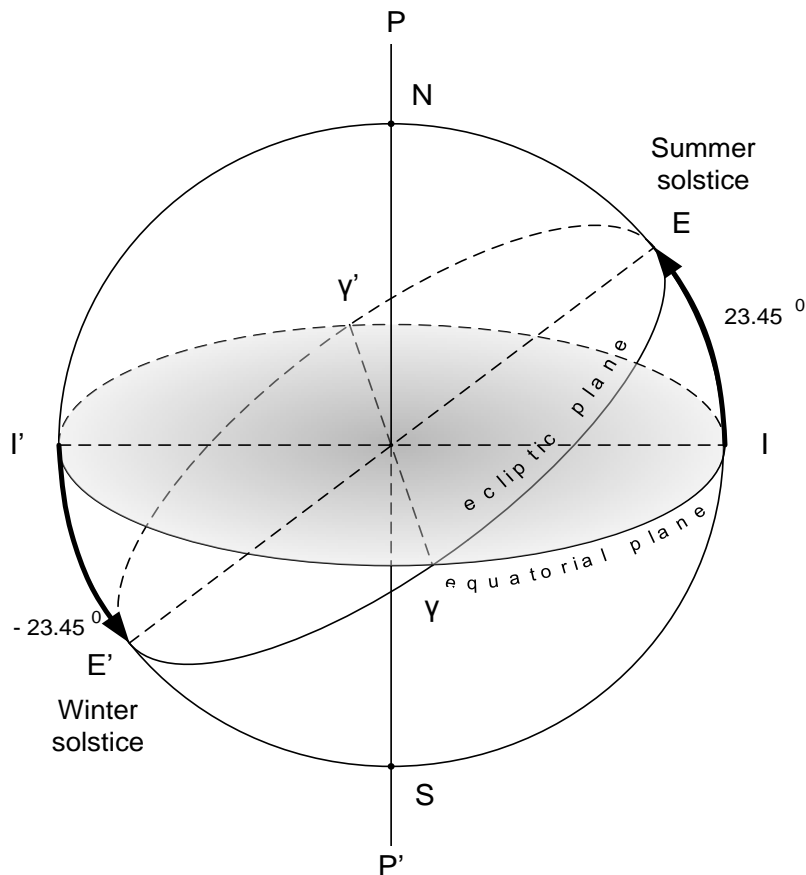


Abb. 3.3 Äquator- und Ekliptikebene

Die Ekliptik wird auch definiert als die scheinbare Bahn der Sonne vor der Himmelskugel, wie sie von der Erde aus sichtbar ist. Die Punkte yy' wo die Ekliptikebene die Äquatorebene der Himmelskugel schneidet, nennt man Tagundnachtgleichen (oder Äquinoktien). Diese Punkte bestimmen die Daten, an denen Tag und Nacht jeweils 12 Stunden lang sind. Die nördlichste Deklination der Sonne nennt man die Sommersonnenwende; das ist der längste Tag des Jahres. Die Wintersonnenwende hingegen markiert den kürzesten Tag des Jahres mit dem wenigsten Tageslicht.

Die eintreffende Sonnenstrahlung schwankt in verschiedenen geografischen Breiten und mit den Jahreszeiten, da die Erdrotationsachse nicht senkrecht zur Ekliptikebene steht, sondern in einem konstanten Winkel von $23,45^\circ$ geneigt ist (Abb. 3.3). Daher trifft um die Sommersonnenwende herum die Sonnenstrahlung die nördliche Erdhalbkugel direkter, was den Sommer auf der Nordhalbkugel zu dieser Zeit des Jahres erklärt. Gleichzeitig trifft die Sonnenstrahlung auf der Südhalbkugel schräger auf, daher ist in dieser Zeit dort Winter. Abb. 3.2 zeigt, dass die Erde zur Sommersonnenwende derart in ihrer Umlaufbahn steht, dass der Nordpol in einem Winkel von 23.45° zur Sonne geneigt ist, während das zur Wintersonnenwende für

den Südpol der Fall ist. Während der Frühlings- und Herbst-Tagundnachtgleiche ist keiner der Pole zur Sonne geneigt.

3.2 Geografische Länge und Breite

Das geografische Koordinatensystem ist ein Koordinatensystem, das es erlaubt, jeden Ort auf der Erde über zwei Winkel zu beschreiben, die **Länge (L)** und die **Breite (ϕ)**. Die Bezugsebene ist die Äquatorialebene, die senkrecht zur Rotationsachse steht und die Erdoberfläche entlang des Äquators schneidet. Kreise, die die Erdoberfläche parallel zum Äquator schneiden, bestimmen die Breite. Die Breite wird definiert als der Winkel zwischen der Äquatorebene und einer Linie vom Erdmittelpunkt zu einem Ort (T) auf der Erdoberfläche. Die Breite ist per definitionem positiv auf der nördlichen und negativ auf der südlichen Halbkugel.

Zur Bestimmung der Länge benötigt man eine Ebene, die senkrecht zum Äquator ist und durch die Rotationsachse geht. Diese Ebene erzeugt einen Schnittkreis oder zwei Halbkreise, die die beiden Pole miteinander verbinden und Meridiane genannt werden.

Die Nulllänge wird definiert als der Meridian, der durch Greenwich, UK, geht. Die Länge eines jeden Ortes wird bestimmt durch den Winkel zwischen dem Nullmeridian und dem Meridian, der durch den jeweiligen Ort geht, wobei Längen westlich von Greenwich negativ und Längen östlich von Greenwich positiv sind. Manchmal wird dem Längengrad ein „West“ oder „East“ nachgestellt. Diese Definitionen werden in Abb. 3.4 illustriert.

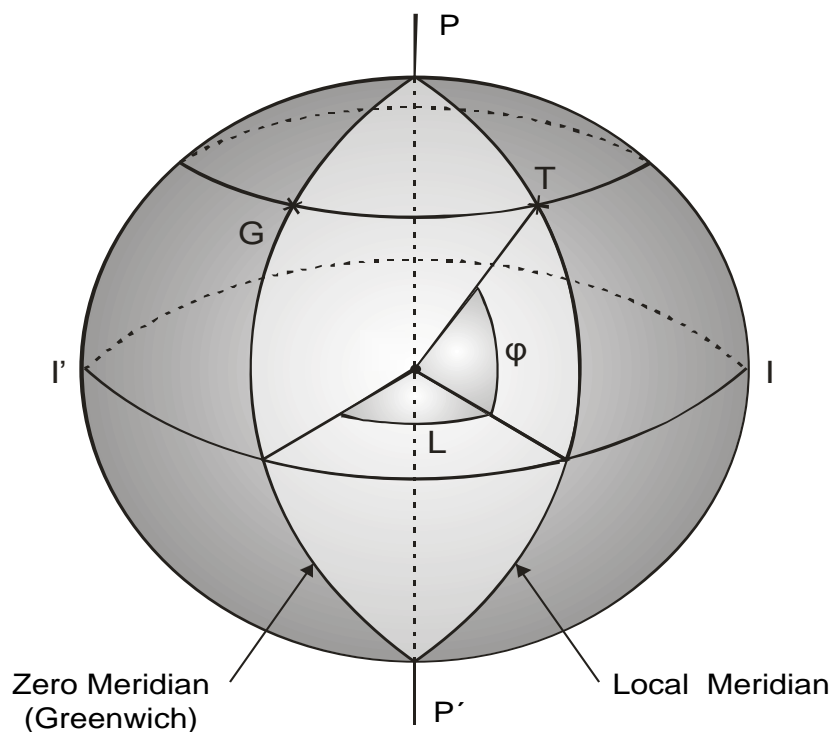


Abb. 3.4 Breite ϕ und Länge L für einen Ort T.

3.3 Grundlegende Sonnengeometriewinkel

Um die elementaren Sonnengeometriewinkel bestimmen zu können, setzt man als Grundannahme voraus, dass die Sterne, die Sonne inbegriffen, auf der Oberfläche der Himmelskugel befestigt sind. Diese imaginäre Kugel hat einen beliebigen Radius, und ihr Mittelpunkt hängt vom jeweiligen Koordinatensystem ab. Der Radius befindet sich in hinreichend großer Entfernung von der Erde, so dass die Orte der Sonne und anderer Sterne als einzelne Punkte gesehen werden können. Der Mittelpunkt dieser Kugel fällt im **horizontalen System** mit dem Standpunkt des Beobachters zusammen, während er im **Äquatorialsystem** der Erdmittelpunkt ist. Je nach System kann die Position eines Punktes, der sich an der Oberfläche der Himmelskugel bewegt, bestimmt werden, wenn zwei Winkel bekannt sind. Dieses einfache Modell hilft beim Verständnis der täglichen und jährlichen scheinbaren Bahnen, wie in Abb. 3.5 illustriert.

Im **horizontalen System** ist die Bezugsebene der Horizont des Beobachters. Diese Ebene schneidet die Himmelskugel am Horizont. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf dieser Ebene und der Himmelskugel nennt man den Zenit (Z). In diesem Koordinatensystem wird die Position der Sonne an der Himmelskugel durch zwei Winkel bestimmt: Sonnenhöhe (h) und Himmelsrichtung (auch Azimut, α).

Die Sonnenhöhe ist der Winkel zwischen der Verbindungslinie von Sonnen- und Beobachtermittelpunkt und ihrer Projektion auf die Horizontebene in einem Bereich von -90° bis $+90^\circ$. Die Sonnenhöhe ist positiv, wenn die Sonne über dem Horizont steht und negativ, wenn sie sich darunter befindet. Der Abstand zum Zenit ist das Komplement des Höhenwinkels und wird Zenitwinkel genannt (θ_z) und ergibt sich durch

$$\theta_z = 90^\circ - h \quad (3.1)$$

Das Azimut (α) der Sonne ist der Winkelabstand zwischen dem genauen Süden und der horizontalen Projektion der Sonnenstrahlen. Ein positives Sonnenazimut bezeichnet eine Position östlich von Süden, während ein negatives Azimut eine Position westlich von Süden angibt. Es wird in der nördlichen Hemisphäre vom genauen Süden aus gemessen und auf der nördlichen Erdhalbkugel vom genauen Norden. Sonnenhöhe und Azimut können mit einfachen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie berechnet werden. [1].

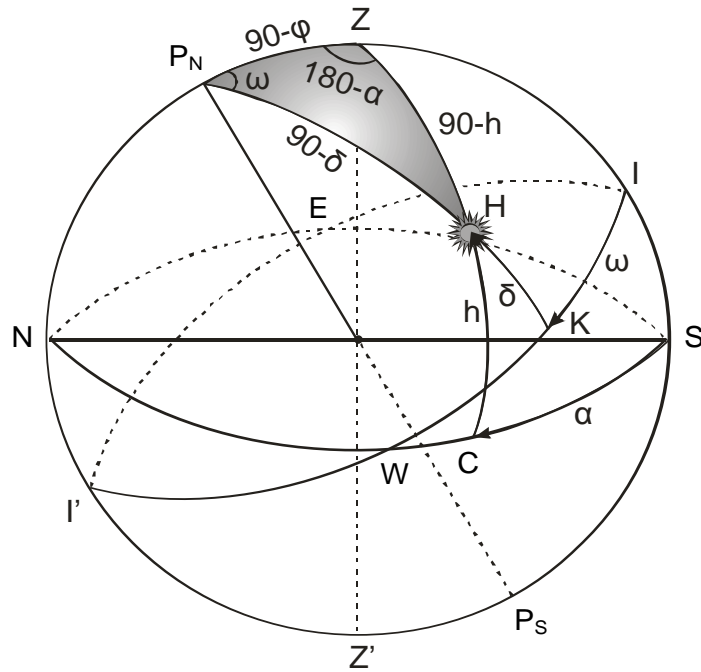


Abb. 3.5 Die Himmelskugel

Im **Äquatorialsystem** ist die Bezugsebene der Äquator. Die zwei Winkel zur Bestimmung der Position der Sonne an der Himmelskugel sind die Deklination (δ) und der Stundenwinkel (ω).

Die **Deklination** der Sonne ist der Winkel zwischen den Sonnenstrahlen und der Äquatorebene der Erde. Er schwankt und kann bis zu $\pm 23^\circ 27'$ ($\pm 23.45^\circ$) betragen. Diese Schwankung verursacht die Jahreszeiten mit ihrer ungleichen Dauer von Tageslicht und Dunkelheit. Die Deklination der Sonne erreicht ihren Maximalwert ($+23.45^\circ$) am 21. Juni. Diesen Tag nennt man Sommersonnenwende in der nördlichen Hemisphäre und Wintersonnenwende auf der südlichen Halbkugel der Erde. Während der Sommersonnenwende haben alle Orte nördlich des Äquators Taglängen von größer als 12 Stunden. Der Minimalwert (-23.45°) wird am 20. Dezember erreicht. Dieser Tag markiert die Wintersonnenwende in der nördlichen, und die Sommersonnenwende in der südlichen Hemisphäre. Während der Wintersonnenwende haben alle Orte nördlich des Äquators Taglängen von weniger als 12 Stunden, während alle Orte südlich des Äquators Taglängen von mehr als 12 Stunden haben. Die Deklination ist Null zur Frühjahrs-Tagundnachtgleiche (21. März) und zur Herbst-Tagundnachtgleiche (22. September). Während dieser Tage betragen die Taglängen überall unabhängig von der geografischen Breite genau 12 Stunden.

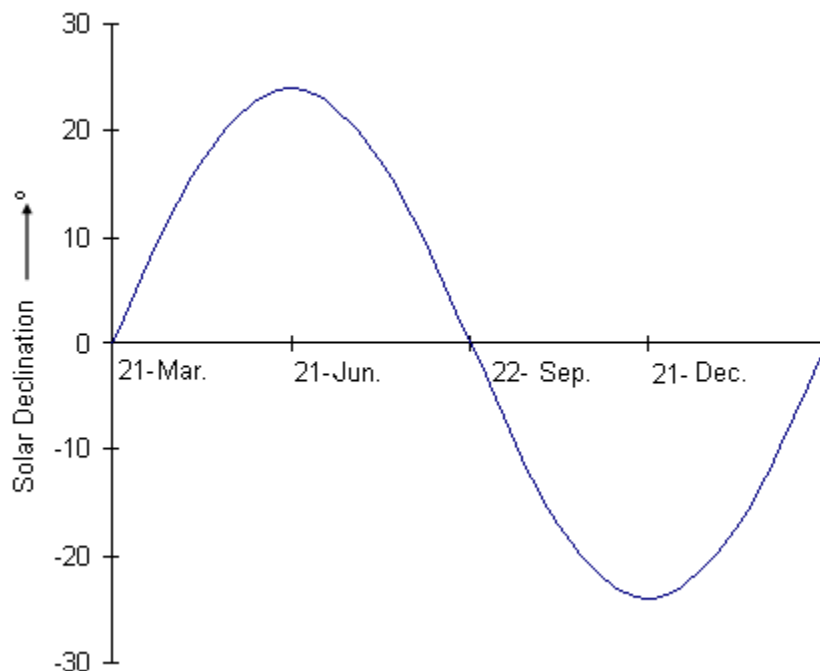


Abb. 3.6 Deklinationswinkel der Sonne während eines Jahres

Die Deklination für einen Tag kann als konstant vorausgesetzt werden, da die Schwankungen ~ 0.5 Grad oder weniger betragen. In Abb. 3.6 wird dieser Winkel für charakteristische Tage des Jahres dargestellt.

Die Deklination in Grad kann für einen gegebenen Tag mit der folgenden Gleichung näherungsweise bestimmt werden [2] :

$$\delta = 23.45 \sin \left[360 \left(\frac{284 + n}{365} \right) \right] \quad (3.2)$$

wobei n der Tag innerhalb des Jahres ist.

Die Deklination der Sonne hängt vom Tag innerhalb des Jahres ab. Wenn allerdings monatliche Mittelwerte benötigt werden, so sollte man den Tag nehmen, der am nächsten an den Monatsmittelwerten liegt (Tabelle 3.1).

Tabelle 3.1 Empfohlener Durchschnittstag eines jeden Monats und entsprechender Tag im Jahr, mit monatlichem Mittelwert.

Monat	Datum	Tag im Jahr	Deklination der Sonne
Jan.	17	17	-20.9
Feb.	16	47	-13.0
Mär.	16	75	-2.4

Apr.	15	105	9.4
Mai	15	135	18.8
Juni	11	162	23.1
Juli	17	198	21.2
Aug.	16	228	13.5
Sep.	15	258	2.2
Okt.	15	288	-9.6
Nov.	14	318	-18.9
Dez.	10	344	-23.0

Der **Stundenwinkel der Sonne** (ω) ist der Winkelabstand zwischen dem Stundenkreis der Sonne und dem Meridian des Ortes. Einem Beobachter auf der Erde erscheint es, als ob sich die Sonne in 24 Stunden einmal um die Erde bewegen würde (360° oder 15° pro Stunde). Der Stundenwinkel wird definiert als Null zum lokalen Sonnenhöchststand, die Zeit, wenn die Sonnenhöhe am größten ist. Der Sonnenhöhenwinkel nimmt pro Stunde vor dem lokalen Sonnenhöchststand um 15° ab, und erhöht sich um 15° mit jeder Stunde nach dem lokalen Sonnenhöchststand. In anderen Worten: der Stundenwinkel ist negativ vor dem lokalen Sonnenhöchststand und positiv danach. Um den Stundenwinkel zu berechnen, ist es wichtig, die Sonnenzeit zu nehmen und nicht die Standardzeit.

Beispiel 3.1

Gesucht ist die Deklination der Sonne am 15. Februar in Athen, Griechenland ($\phi = 37^\circ 58'$).

Lösung

Am 15. Februar ist $n = 46$, eingesetzt in Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin\left(360 \frac{284 + 46}{365}\right) = -13.29^\circ$$

Beispiel 3.2

Berechnen Sie den Stundenwinkel der Sonne um 09:00 Uhr und 13:00 Uhr Sonnenzeit.

Lösung

Nach der Definition des Stundenwinkels ist sein Wert um 9:00 Uhr:

$$\omega = 15 \cdot (9 - 12) = -45^\circ$$

Und um 13:00 Uhr Sonnenzeit haben wir:

$$\omega = 15 \cdot (13 - 12) = 15^\circ$$

3.3.1 Bestimmung von Sonnenwinkeln

Das astronomische Kugeldreieck $P_N Z H$ bezüglich der Erdkoordinaten ist in Abb. 3.5 schraffiert dargestellt.

Für den Kosinus des Zenitwinkels dieses Kugeldreiecks folgt aus dem Kosinussatz der Ausdruck:

$$\cos(90 - h) = \cos(90 - \delta) \cos(90 - \phi) + \sin(90 - \delta) \sin(90 - \phi) \cos \omega \quad (3.3)$$

oder

$$\sinh = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega \quad (3.4)$$

Per Definition von θ_z (Gleichung (3.1)) kann Obiges geschrieben werden als

$$\cos \theta_z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega \quad (3.5)$$

Zum Sonnenhöchststand ist der Sonnenwinkel (ω) auf der Nordhalbkugel gleich Null, und Gleichung (3.4) ergibt

$$\sinh_{\max} = \cos(\phi - \delta) \quad (3.6)$$

oder

$$h_{\max} = 90 - |\phi - \delta| \quad (3.7)$$

Um die Stundenwinkel (ω_s) für eine horizontale Oberfläche für Sonnenauf- und Sonnenuntergang zu berechnen, setzt man die Sonnenhöhe h aus Gleichung (3.4) gleich Null.

$$\cos \phi \cos \delta \cos \omega_s = -\sin \phi \sin \delta \quad (3.8)$$

$$\cos \omega_s = -\tan \phi \tan \delta \quad (3.9)$$

Auflösen der Gleichung (3.9) nach ω_s , wenn $-1 \leq -\tan \phi \tan \delta \leq +1$ ergibt

$$\omega_s = \pm \arccos(-\tan \phi \tan \delta) \quad (3.10)$$

Ein positives Vorzeichen entspricht dem Sonnenuntergang, ein negatives dem Sonnenaufgang.

Im Falle von $(-\tan \phi \tan \delta) < -1$ geht die Sonne an diesem Tag nie unter (Polarsummer), und wenn $(-\tan \phi \tan \delta) > 1$ dann geht die Sonne an jenem Tag nicht auf (Polarwinter). Auch in dem Fall, dass $(-\tan \phi \tan \delta) = \pm 1$, ist die Sonne nur für einen Augenblick am Horizont.

Die Taglänge in Stunden ergibt sich aus:

$$\text{Day length} = \frac{2\omega_s}{15} \quad (3.11)$$

Wendet man den Sinussatz auf das Kugeldreieck $P_N Z H$ an, hat man

$$\frac{\sin(90 - h)}{\sin \omega} = \frac{\sin(90 - \delta)}{\sin(180 - \alpha)} \quad (3.12)$$

oder

$$\frac{\cosh}{\sin \omega} = \frac{\cos \delta}{\sin \alpha} \quad (3.13)$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cosh} \quad (3.14)$$

Die Azimute für Sonnenauf- und untergang erhält man aus Gleichung (3.14), indem man die Sonnenhöhe h gleich Null setzt und die Werte von ω_s durch ω ersetzt:

$$\cos \alpha = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi} \quad (3.15)$$

In diesem Fall gibt es jeweils zwei Lösungen für Morgen und Nachmittag. Die richtigen Lösungen erhält man folgendermaßen: wenn die Deklination positiv ist, geht die Sonne nördlich der Ost-West-Linie auf und unter; ist die Deklination Null, geht sie genau im Osten auf und genau im Westen unter; bei einer Deklination von Null hingegen geht die Sonne südlich der Ost-West-Linie auf und unter.

Abb. 3.7 zeigt die scheinbare Sonnenbahn für Athen (Griechenland) und den relativen Ort von Auf- und Untergang zur Wintersonnenwende (Abb. 3.7^a), zu den Tagundnachtgleichen (Abb. 3.7^b) und zur Sommersonnenwende (Abb. 3.7^c). Auch die Mittagshöhe wird in allen Abbildungen angegeben. Es sollte beachtet werden, dass während der Äquinoktien die Sonne genau im Osten auf- und im Westen untergeht, wie in Abb 3.7^b gezeigt, und Tag- und Nachtlängen gleich sind. Zwischen der Frühjahrs- und Herbst-Tagundnachtgleichen geht die Sonne nördlich der Ost-West-Linie auf und unter, die Tage sind länger, und die Mittagshöhe erreicht zur Sommersonnenwende ihr Maximum (Abb. 3.7^c). Zwischen Herbst- und Frühjahrs-Tagundnachtgleiche geht die Sonne südlich der Ost-West-Linie auf und unter, die Tage sind kürzer, und zur Wintersonnenwende erreicht die Mittagshöhe ihr Jahresminimum (Abb. 3.7^a).

Für die grafische Darstellung der scheinbaren Bewegung der Sonne am Himmelsgewölbe an jedem Tag im Jahr und jedem beliebigen Ort kann man eine Software nutzen [3].

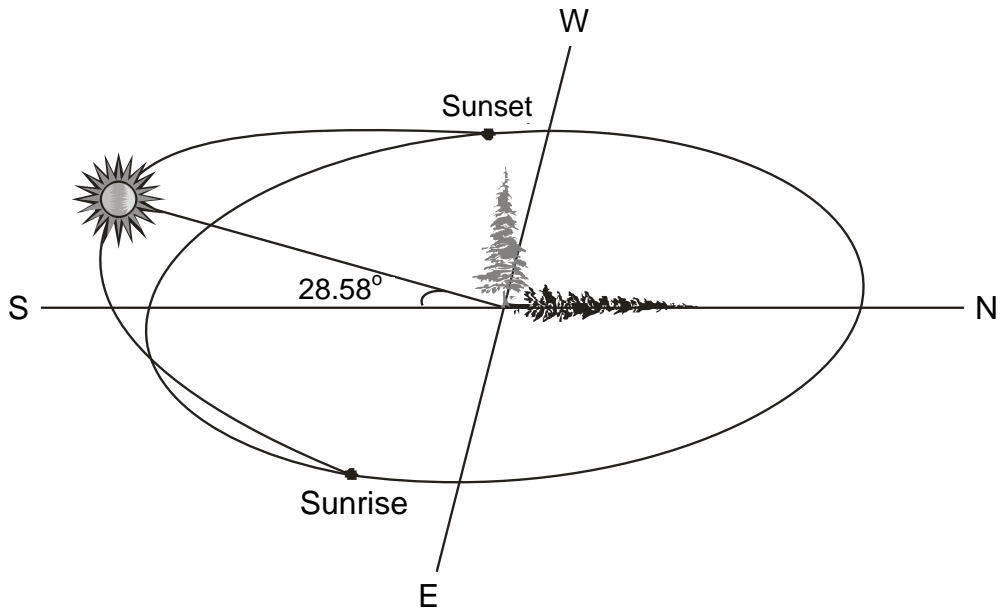


Abb. 3.7^a scheinbare Sonnenbahn zur Wintersonnenwende für Athen (Griechenland)

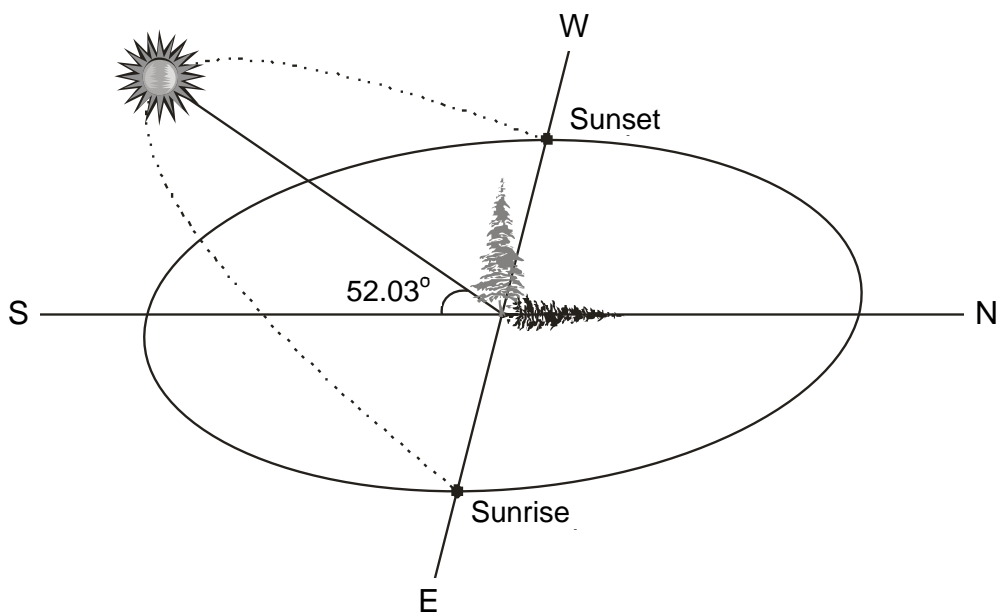


Abb. 3.7^b scheinbare Sonnenbahn zu den Äquinoktien für Athen (Griechenland)

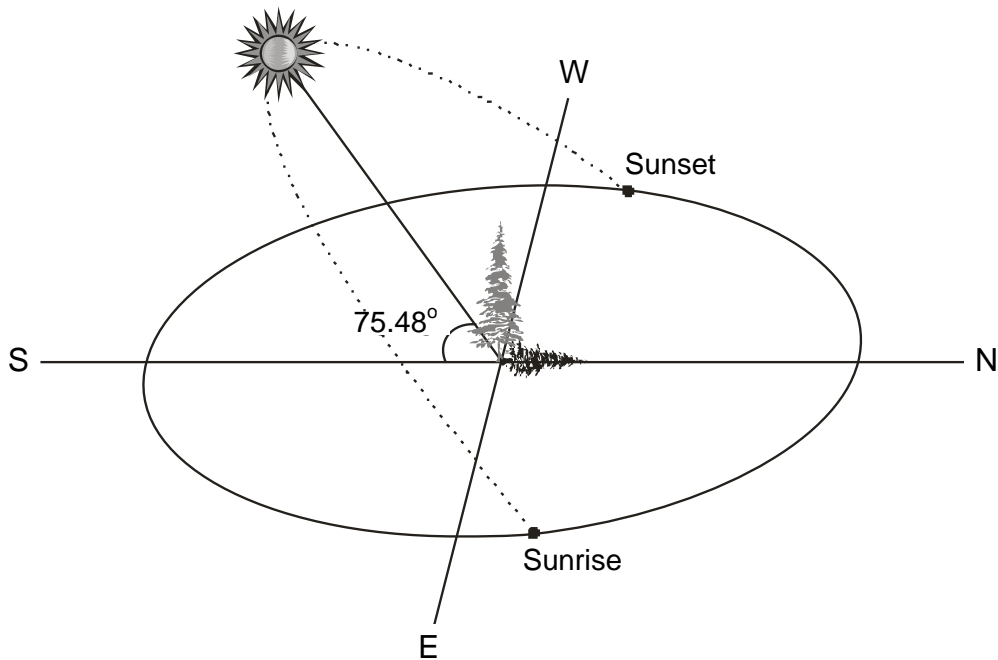


Abb. 3.7^c scheinbare Sonnenbahn zur Sommersonnenwende für Athen (Griechenland)

Beispiel 3.3

Berechnen Sie den Azimutwinkel der Sonne für Athen, Griechenland ($\phi = 37^\circ 58'$) am 25. Februar um 14:00 Uhr Sonnenzeit.

Lösung

Am 25. Februar ist $n = 56$ und aus Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin\left(360 \frac{284 + 56}{365}\right) = -9.78^\circ$$

Der Stundenwinkel ω ist:

$$\omega = 15 \cdot (14 - 12) = 30^\circ$$

Aus Gleichung 3.4 ist die Sonnenhöhe (h):

$$\sin h = \sin(-9.78) \sin 37.97 + \cos(-9.78) \cos 37.97 \cos 30 = 0.57$$

oder

$$h = 34.63^\circ$$

Das Azimut der Sonne kann mit Gleichung 3.14 berechnet werden:

$$\sin a = \frac{\cos(-9.78)\sin 30}{\cos 34.63} = 0.60$$

oder $\alpha = 36.79^{\circ}$

Beispiel 3.4

Berechnen Sie den Zenitwinkel der Sonne in Athen, Griechenland ($\phi = 37^{\circ} 58'$) zum Sonnenhöchststand am 20. Juli.

Lösung

Am 20. Juli ist $n = 201$, und aus Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin\left(360 \frac{284 + 201}{365}\right) = 20.64^{\circ}$$

Die Sonnenhöhe zum Sonnenhöchststand ist durch Gleichung 3.7 gegeben:

$$h_{\max} = 90 - (37.97 - 20.64) = 72.67^{\circ}$$

Daher ist der Zenitwinkel der Sonne zum Sonnenhöchststand durch Gleichung 3.1 gegeben:

$$\vartheta_z = 90 - 72.67 = 17.33^{\circ}$$

3.4 Der Einfallswinkel der Sonne

Der Einfallswinkel der Sonne ist sehr nützlich, da er eine relativ einfache Berechnung des Strahlungseinfalls auf eine Oberfläche erlaubt. Die Winkelbeziehungen zwischen der direkt einfallenden Sonnenstrahlung auf einer Ebene – wie z.B. auf einer Mauer oder einer glänzenden Oberfläche, die beliebig zur Erde ausgerichtet sein können – können in Form von mehreren Winkeln beschrieben werden. Diese Winkel sind in Abb. 3.8 illustriert. Ausrichtung und Neigung der Oberfläche werden anhand jeweils zweier Winkel bestimmt: dem Oberflächenazimut (γ) und der Steigung (β).

Das *Oberflächenazimut* ist der Winkel zwischen dem Süden und der Projektion der Oberfläche senkrecht in der horizontalen Ebene. Dieser Winkel ist positiv, wenn die Normale westlich von Süden ist, und negativ, wenn östlich von Süden.

Die *Steigung* ist der Winkel in welchem die Oberfläche im Verhältnis zur Horizontalen geneigt ist. Er ist positiv für nach Süden gerichtete Oberflächen.

Gleichermaßen kann die Position der Sonne relativ zur Oberfläche als *Sonneneinfallswinkel* (θ) beschrieben werden.

Der *Sonneneinfallswinkel* ist der Winkel zwischen der Normalen auf der Oberfläche und den Sonnenstrahlen.

Die Beziehungen zwischen den definierten Winkeln können mit Hilfe einfacher Gleichungen der sphärischen Trigonometrie errechnet werden, indem man den Kosinussatz auf das Kreisdreieck HKC anwendet. Der Einfallswinkel der

Direktstrahlung auf eine Oberfläche kann durch eine allgemeine Gleichung zum Anstieg der Oberfläche, zum Sonnenzenit, zum Sonnenazimut und zum Oberflächenazimut in Beziehung gesetzt werden. In Abb. 3.8 ist KO die Normale zur horizontalen Oberfläche, CO die Normale zur geneigten Oberfläche, und OZ ist die horizontale Projektion der Normalen zur geneigten Oberfläche. Wendet man den Kosinussatz auf das Kreisdreieck HKC an, so erhalten wir

$$\cos \theta = \cos \beta \cos \theta_z + \sin \beta \sin \theta_z \cos(\alpha - \gamma) \quad (3.16)$$

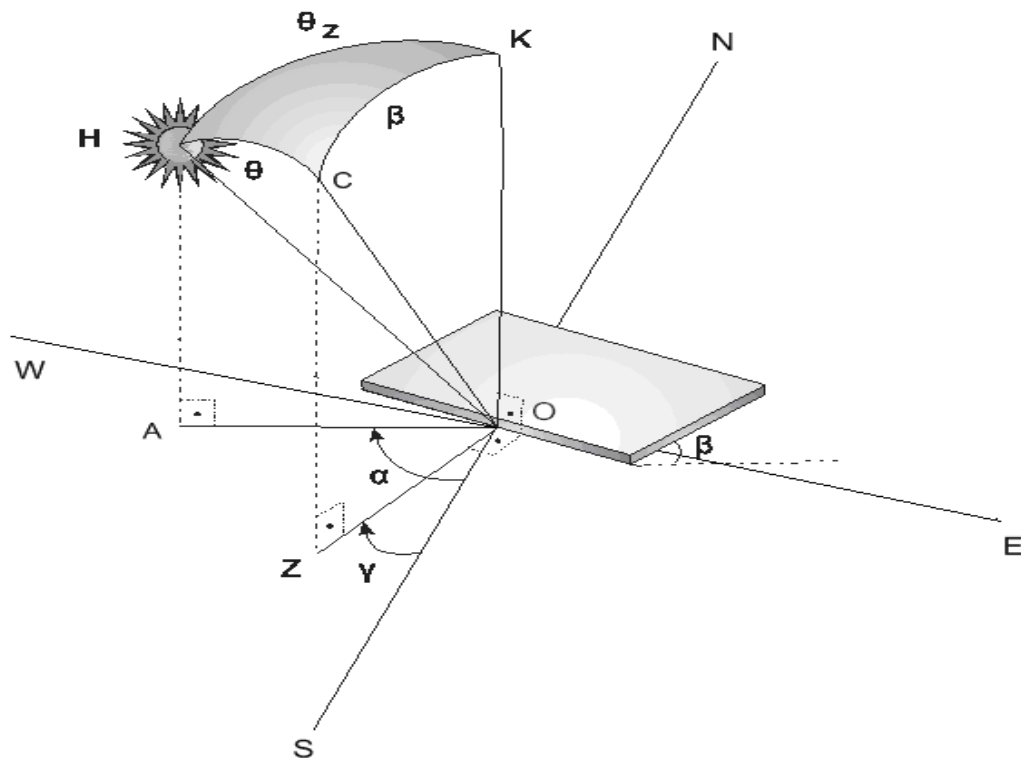


Abb. 3.8 Verschiedene Sonne-Erde-Winkel für eine geneigte Oberfläche

Im Falle einer geneigten Oberfläche kann es vorkommen, dass der Stundenwinkel zum Sonnenauf- oder untergang ω_{st} kleiner ist, als der Wert, den die Gleichung (3.10) ergibt, wenn der entsprechende Einfallswinkel größer als 90° ist. Für diese Situation kann man den Stundenwinkel ω_{st} finden, indem man Gleichung (3.16) modifiziert und dabei die Gleichungen (3.5) und (3.14) berücksichtigt.

Was Breite, Steigung, Deklination und Stundenwinkel betrifft, ist der Einfallswinkel daher gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \delta (\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta \cos \gamma) \\ &+ \cos \delta \cos \omega (\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta \cos \gamma) + \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \sin \omega \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wenn die Oberfläche dem Äquator zugewandt ist ($\gamma = 0$), ergibt Gleichung (3.17):

$$\cos \theta = \sin \delta (\sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta) + \cos \delta \cos \omega (\cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta) \quad (3.18)$$

oder

$$\cos \theta = \sin(\phi - \beta) \sin \delta + \cos(\phi - \beta) \cos \delta \cos \omega \quad (3.19)$$

Wenn man die obige Gleichung (3.19) mit der Gleichung (3.5) für den Zenitwinkel vergleicht, stellt man fest, dass eine nach Süden gewandte Oberfläche eine effektive Breite von $(\phi - \beta)$ hat.

Und schließlich erhält man die Sonnenauf- und Untergangs-Stundenwinkel ω_{st} für eine geneigte Oberfläche, indem man $\theta = 90^\circ$ in Gleichung (3.19) einsetzt und nach ω auflöst.

$$\omega_{st} = \pm \arccos(-\tan(\phi - \beta) \tan \delta) \quad (3.20)$$

Allerdings kann ω_{st} nicht größer sein als ω_s . Die vollständige Gleichung für ω_{st} ist gegeben durch:

$$\omega_{st}' = \min\{\omega_s, \arccos(-\tan(\phi - \beta) \tan \delta)\} \quad (3.21)$$

Die Winkel für Sonnenaufgang (ω'_{sr}) und Sonnenuntergang (ω'_{ss}) für eine geneigte Oberfläche, die nicht genau nach Süden zeigt, werden nicht genau symmetrisch um den Sonnenhöchststand liegen und können mit Gleichung (3.17) errechnet werden, indem man den Einfallswinkel $\theta = 90^\circ$ setzt. Diese Lösung ergibt zwei Lösungen für ω , die von der Ausrichtung der Oberfläche abhängen [4].

Für $\gamma < 0$

$$\omega'_{sr} = -\min\left\{\omega_s, \cos^{-1}\left[\frac{a \cdot b - \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)}}{a^2 + 1}\right]\right\} \quad (3.22)$$

$$\omega'_{ss} = \min\left\{\omega_s, \cos^{-1}\left[\frac{a \cdot b + \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)}}{a^2 + 1}\right]\right\} \quad (3.23)$$

Für $\gamma > 0$

$$\omega'_{sr} = -\min\left\{\omega_s, \cos^{-1}\left[\frac{a \cdot b + \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)}}{a^2 + 1}\right]\right\} \quad (3.24)$$

$$\omega'_{ss} = \min\left\{\omega_s, \cos^{-1}\left[\frac{a \cdot b - \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)}}{a^2 + 1}\right]\right\} \quad (3.25)$$

wobei:

$$a = \frac{\cos \phi}{\sin \gamma \tan \beta} + \frac{\sin \phi}{\tan \gamma} \quad (3.26)$$

$$b = \tan \delta \left(\frac{\cos \phi}{\tan \gamma} - \frac{\sin \phi}{\sin \gamma \tan \beta} \right) \quad (3.27)$$

Das "min" in den Gleichungen (3.22)-(3.25) steht für den kleineren der beiden Werte in den Klammern. Außerdem wird für obige Gleichungen vorausgesetzt, dass das Oberflächenazimut genau von Süden gemessen wird – positiv westwärts und negativ ostwärts ist.

Alle bis hierher definierten Winkel sind nützlich bei Berechnungen von Sonnenstrahlung. Der Einfallswinkel direkter Sonnenstrahlung bestimmt die Intensität des Direktstrahlungsanteils auf der Oberfläche und die Fähigkeit der Oberfläche, Sonnenstrahlung zu reflektieren, zu übertragen oder zu absorbieren. Das Wissen um diese Komponente ist notwendig, um die Globalstrahlung auf geneigten Oberflächen zu bestimmen.

Beispiel 3.5

Berechnen Sie den Einfallswinkel für einen Flachkollektor, der nach 14° West von Süd zeigt und eine Steigung von 40° hat, in Athen (Griechenland, $\phi = 37^\circ 58'$), am 20. Mai um 13:00 Uhr Sonnenzeit.

Lösung

Am 20. Mai ist $n = 140$ und aus Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin \left(360 \frac{284 + 140}{365} \right) = 19.93^\circ$$

ist der Stundenwinkel ω :

$$\omega = 15 \cdot (13 - 12) = 15^\circ$$

Aus Gleichung 3.17 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin 19.93 (\sin 37.97 \cos 40 - \cos 37.97 \sin 40 \cos 14) \\ &+ \cos 19.93 \cos 15 (\cos 37.97 \cos 40 + \sin 37.97 \sin 40 \cos 14) \\ &+ \cos 19.93 \sin 40 \sin 14 \sin 15 = 0.943 \end{aligned}$$

Der Einfallswinkel für den Sonnenkollektor ist also $\theta = 19.42^\circ$

Beispiel 3.6

Ein nach Süden gewandter Flachkollektor befindet sich in Athen, Griechenland ($\phi = 37^\circ 58'$) und hat eine Neigung von 45°. Berechnen Sie die Sonnenuntergangszeit für diesen Kollektor am 14. September.

Lösung

Am 14. September ist $n = 257$ und aus Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin\left(360 \frac{284 + 257}{365}\right) = 2.62^\circ$$

Aus Gleichung 3.10, haben wir:

$$\omega_s = \arccos(-\tan 37.97 \tan 2.62) = 92.05^\circ$$

und aus Gleichung 3.21:

$$\arccos(-\tan(37.97 - 45) \tan 2.62) = 89.68^\circ$$

Gemäß Gleichung 3.21 ist der Sonnenuntergangswinkel auf dem Kollektor kleiner als die beiden berechneten Werte. Der Sonnenuntergangswinkel auf dem Kollektor ist also $89,68^\circ$, und die Sonnenzeit des Sonnenuntergangs ist 17,98 h.

Beispiel 3.7

Ein Flachkollektor befindet sich in Athen, Griechenland ($\phi = 37^\circ 58'$), hat eine Neigung von 60° und zeigt nach 20° Ost von Süden. Berechnen Sie für den 14. Oktober die Taglänge, während derer die Sonne auf diesen Kollektor scheint.

Lösung

Am 14. Oktober ist $n = 287$ und aus Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin\left(360 \frac{284 + 287}{365}\right) = -9.23^\circ$$

Da der Kollektor nichtgenau nach Süden zeigt, haben wir aus den Gleichungen 3.26 und 3.27:

$$a = \frac{\cos 37.97}{\sin(-20) \tan 60} + \frac{\sin 37.97}{\tan(-20)} = -3.02$$

$$b = \tan(-9.23) \cdot \left(\frac{\cos 37.97}{\tan(-20)} - \frac{\sin 37.97}{\sin(-20) \tan 60} \right) = 0.18$$

Benutzen wir Gleichung 3.10, haben wir:

$$\omega_s = \pm \arccos(-\tan 37.97 \tan -9.23) = 82.71^\circ$$

Da $\gamma < 0$, erhalten wir die Stundenwinkel für Sonnenaufgang (ω'_{sr}) und Sonnenuntergang (ω'_{ss}) für diesen Kollektor jeweils aus den Gleichungen 3.22 und 3.23.

$$\omega'_{sr} = -\min \left\{ \omega_s, \cos^{-1} \left[\frac{-3.02 \cdot 0.18 - \sqrt{(3.02^2 - 0.18^2 + 1)}}{3.02^2 + 1} \right] \right\} = -\min \{82.71^\circ, 111.56^\circ\}$$

$$\omega'_{ss} = \min \left\{ \omega_s, \cos^{-1} \left[\frac{-3.02 \cdot 0.18 + \sqrt{(3.02^2 - 0.18^2 + 1)}}{3.02^2 + 1} \right] \right\} = \min \{ 82.71^\circ, 74.92^\circ \}$$

Somit sind Stundenwinkel von Sonnenauf- und untergang für den geneigten Kollektor $-82,71^\circ$ und $74,92^\circ$. Und schließlich beträgt die Taglänge für den Kollektor 10,51 Stunden, während es für die horizontale Oberfläche 11,03 Stunden sind.

3.5 Die Sonnenzeit

Die Sonnenzeit stimmt aus zwei Gründen nicht mit der lokalen Uhrzeit überein. Der erste liegt in den Schwankungen der Rotations- und Orbitalwinkelgeschwindigkeit. Das wird mit Hilfe der Zeitgleichung (ET, siehe 3.28) korrigiert und kann näherungsweise aus Abb. 3.9 bestimmt oder in Gleichungsform (in Minuten) ausgedrückt [5] werden als:

$$ET = 229.2(0.000075 + 0.001868 \cos B - 0.032077 \sin B - 0.014615 \cos 2B - 0.04089 \sin 2B) \quad (3.28)$$

wobei $B = (n - 1) \frac{360}{365}$ Und n der Tag des Jahres ist

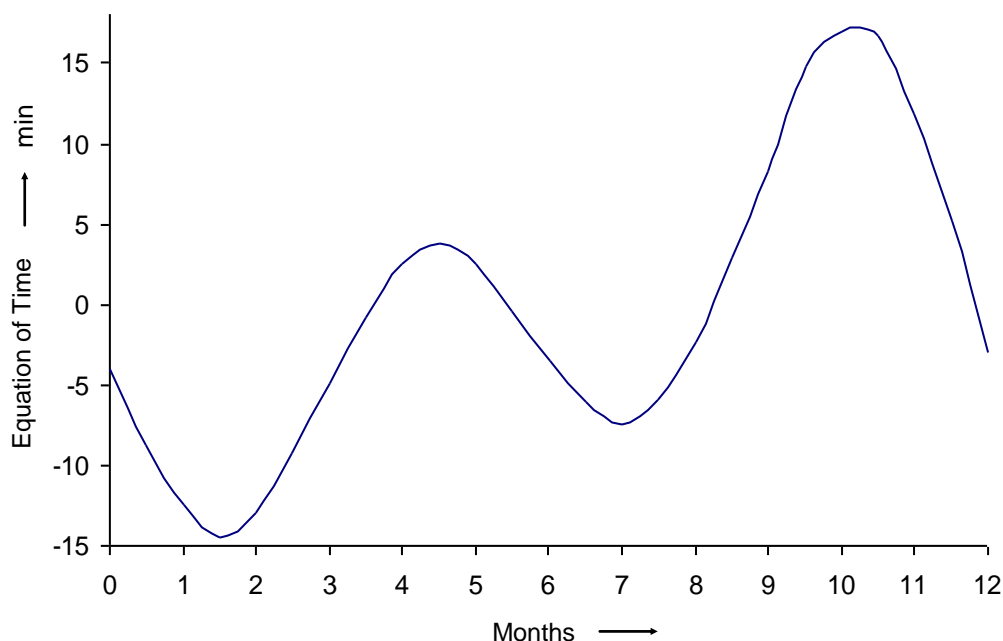


Abb. 3.9 Die Zeitgleichung (ET) als Funktion der Zeit im Jahr

Der zweite Grund ist der Unterschied der geografischen Länge zwischen dem Ort (L_{loc}) und dem Meridian, auf dem die Standardzeit beruht (L_{st}). Diese Abweichung beträgt 4 Minuten pro Längengrad Abweichung. In vielen Ländern werden die Uhren im Sommer eine Stunde vorgestellt; man nennt das Sommerzeit (C). Daher kann die Sonnenzeit geschrieben werden als:

$$\text{Solar Time} = \text{Standard Time} + ET \pm 4(L_{\text{st}} - L_{\text{loc}}) + C \quad (3.29)$$

wobei L_{st} der Standardmeridian für die lokale Zeitzone ist, L_{loc} die geografische Länge des Ortes und ET die Zeitgleichung [6]. Eine lokale Zeitzone ist ein Gebiet der Erde, das überall dieselbe Standardzeit eingeführt hat. Standardzeitzone können durch eine geometrische Unterteilung der Erdoberfläche in 24 Zonen definiert werden, die alle 15° Länge von einem Meridian begrenzt werden. Zum Beispiel ist der Standardmeridian von Italien 15° Länge und für Griechenland 30° . Die Sommerzeitkorrektur C ist gleich Null, wenn keine Sommerzeit ist; ansonsten entspricht C der Anzahl Stunden, um die die Uhrzeit vorgestellt wird, in der Regel 1 Stunde.

Es gilt zu beachten, dass alle Terme in der obigen Gleichung in Minuten umgerechnet werden müssen. Das positive Vorzeichen im dritten Term dieser Gleichung ist für Orte westlich von Greenwich, während das negative Vorzeichen bei Orten östlich von Greenwich gesetzt wird.

Beispiel 3.8

Berechnen Sie a) die Lokalzeit des Sonnenuntergangs in Athen, Griechenland ($\phi = 37^\circ 58'$, $L = 23^\circ 43'$) am 19. April, wenn $C=0$, und b) die Taglänge dieses Tages.

Lösung

a) Am 19. April ist $n = 109$ und aus Gleichung 3.2:

$$\delta = 23.45 \sin\left(360 \frac{284 + 109}{365}\right) = 10.9^\circ$$

Die Stundenwinkel für Sonnenauf- und Sonnenuntergang (ω_s), sind durch Gleichung 3.10 gegeben:

$$\omega_s = \arccos(-\tan 37.97 \tan 10.9) = 98.64^\circ = 6.58 h$$

Daher ist der Sonnenuntergang um 6.58 h Sonnenzeit.

In Gleichung 3.28 ist die Zeitkorrektur am 19. April 0,756 Minuten. Wenn wir Gleichung 3.29 umstellen, erhalten wir daher:

$$\text{Lokale Standardzeit} = 394.8 - 0.765 + 4(30 - 23.72) = 419.2 \text{ min} \approx 7.0 h$$

Daher ist der Sonnenuntergang um 19:00 Uhr lokaler Standardzeit.

b) Mit Gleichung 3.11 beträgt die Taglänge:

$$\text{Day length} = \frac{2 \cdot 98.64}{15} = 13.15 h$$

Literaturnachweis

[1] Braun J. E. and J. C. Mitchell. 1983. "Solar geometry for fixed and tracking surfaces" Solar Energy, 31, 439-444.

[2] Cooper, P.I. 1969. "The absorption of radiation in solar stills" Solar Energy, 12, 333- 346.

- [3] Axaopoulos P. and G. Pitsilis. 2007. "Energy software programs for educational use" Renewable Energy 32, 1045 - 1058.
- [4] Klein S.A. 1977. "Calculation of monthly average insolation on tilted surfaces" Solar Energy 19, 325-329.
- [5] Duffie, J. A. and W. A. Beckman. 2006. "Solar Engineering of thermal Processes" John Wiley & Sons, Inc.
- [6] ASHRAE. 1989. Handbook of Fundamentals. Atlanta GA. ASHRAE.

Ergänzende Literatur

- Achard, P. and R. Gicquel. 1986. "European Passive Solar Handbook". CEC DG XII.
- Bernard, R., G. Menguy, M. Schwartz. 1980. Le Rayonnement solaire. Conversion thermique et applications. 2e edition, Technique & Documentation Lavoisier.
- Coulson K. L. 1975. "Solar and Terrestrial Radiation". Academic Press, New York.
- Iqbal, M. 1983. "An introduction to Solar Radiation". Academic Press, Toronto.
- Sfeir A. A. and G. Guarracino. 1981. "Ingenierie des systemes solaires" Technique & Documentation.
- Astronomical data from the U.S. Naval observatory at <http://aa.usno.navy.mil/AA/> NASA's Space Science Data System at <http://ssds.nasa.gov/>
<http://image.gsfc.nasa.gov/poetry/ask/askmag.html#list>