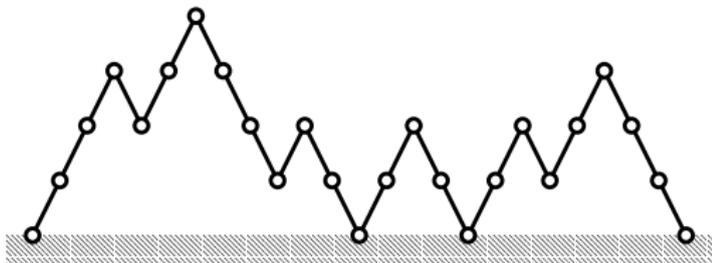


# Variations combinatoires sur des classes d'objets comptées par la suite de Catalan

Yvan Le Borgne, LaBRI

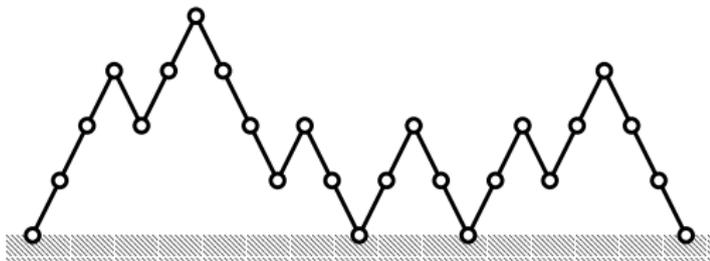
sous la direction de Mireille Bousquet-Mélou  
13 décembre 2004

## Un problème d'énumération



Un chemin de Dyck de taille 12.

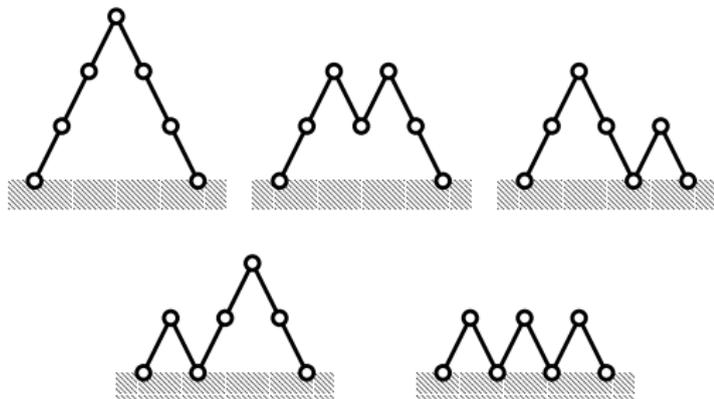
## Un problème d'énumération



Un chemin de Dyck de taille 12.

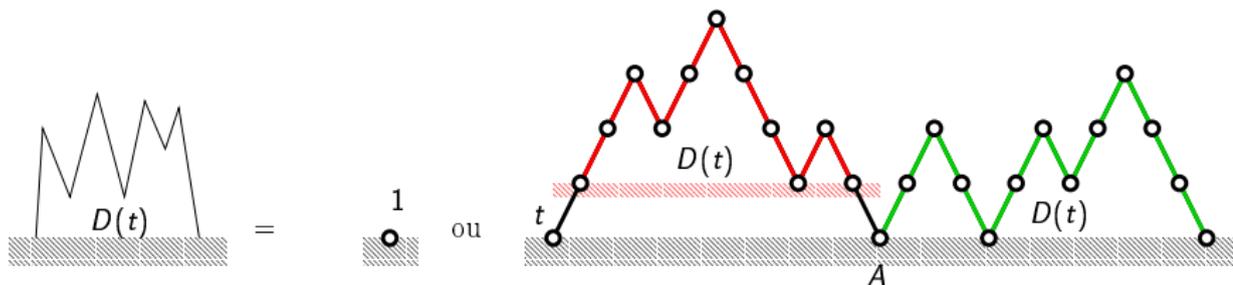
On cherche le nombre  $d_n$  de chemins de Dyck de taille  $n$ .

## Un problème d'énumération



On cherche le nombre  $d_n$  de chemins de Dyck de taille  $n$ .  
Par exemple,  $d_3 = 5$

# Un problème d'énumération

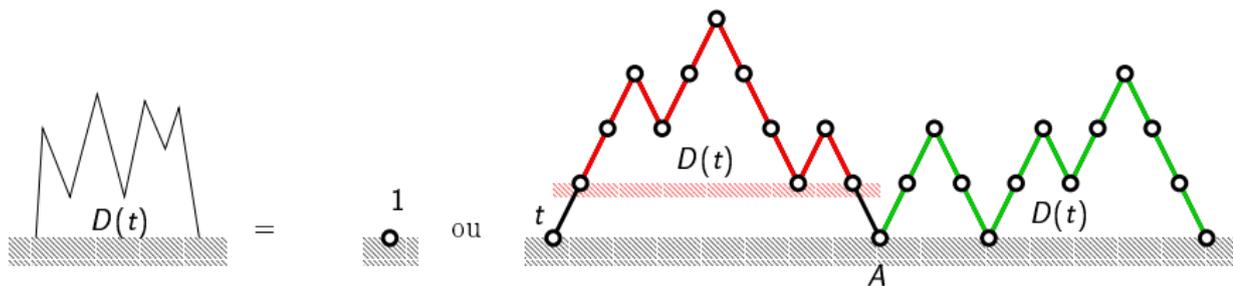


$$d_0 = 1 \text{ et } d_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k d_{n-1-k}.$$

On introduit la *série génératrice*  $D(t) = \sum_{n \geq 0} d_n t^n$ .

$$D(t) = 1 + tD(t)^2$$

## Un problème d'énumération



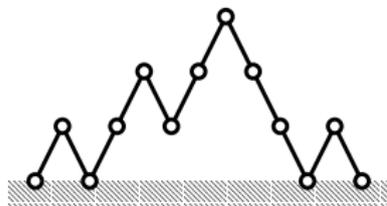
On introduit la *série génératrice*  $D(t) = \sum_{n \geq 0} d_n t^n$ .

$$D(t) = 1 + tD(t)^2$$

$$D(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} \rightarrow d_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} \sim \frac{1}{n\sqrt{\pi n}} 4^n$$

# Un problème d'énumération : une solution bijective

Chemin de Dyck

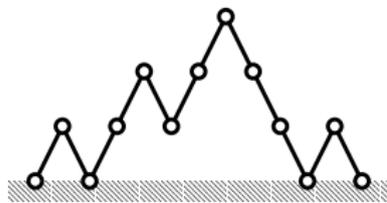


$d_n$



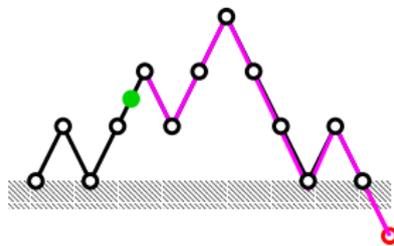
# Un problème d'énumération : une solution bijective

Chemin de Dyck



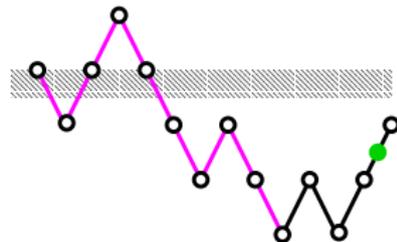
$d_n$

Chemin prolongé et marqué



$(2n + 1)d_n$

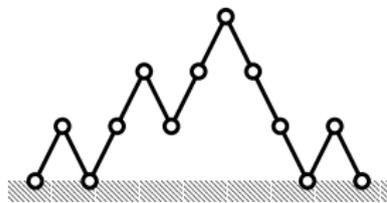
Mélange de pas



Lemme cyclique [DM47]

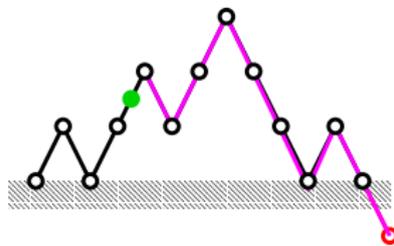
# Un problème d'énumération : une solution bijective

Chemin de Dyck



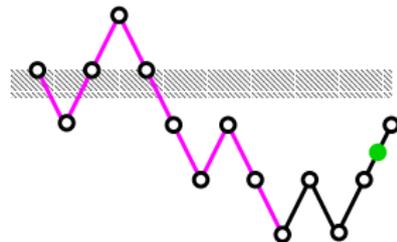
$d_n$

Chemin prolongé et marqué



$(2n + 1)d_n$

Mélange de pas

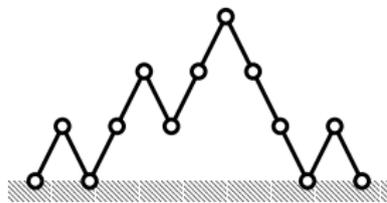


$(2n + 1)d_n$

Lemme cyclique [DM47]

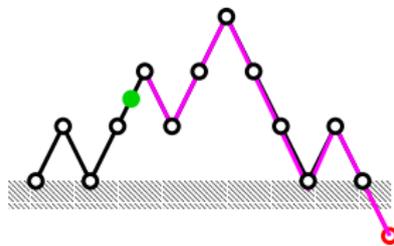
# Un problème d'énumération : une solution bijective

Chemin de Dyck



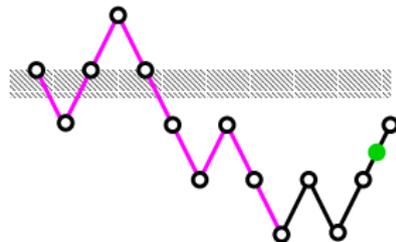
$d_n$

Chemin prolongé et marqué



$(2n + 1)d_n$

Mélange de pas

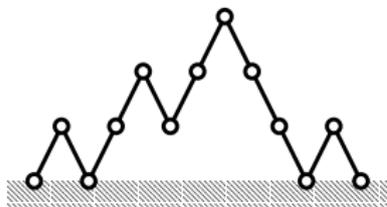


$$(2n + 1)d_n = \binom{2n + 1}{n}$$

Lemme cyclique [DM47]

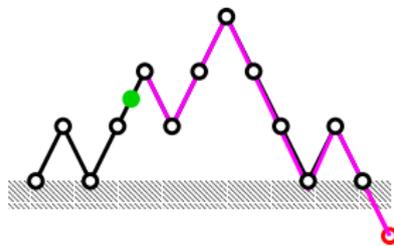
# Un problème d'énumération : une solution bijective

Chemin de Dyck



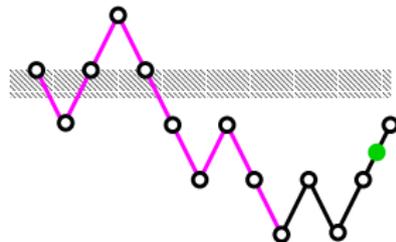
$d_n$

Chemin prolongé et marqué



$(2n + 1)d_n$

Mélange de pas



$(2n + 1)d_n = \binom{2n + 1}{n}$

$$d_n = \frac{1}{2n + 1} \binom{2n + 1}{n}$$

Lemme cyclique **[DM47]**

# Pourquoi compter ?

## Pourquoi compter ?

- ▶ En informatique : Complexité moyenne d'un algorithme sur un ensemble d'entrées. (ex : tri d'une permutation)

## Pourquoi compter ?

- ▶ En informatique : Complexité moyenne d'un algorithme sur un ensemble d'entrées. (ex : tri d'une permutation)
- ▶ En mathématiques : Calculer des probabilités discrètes (La combinatoire algébrique est une autre source)

## Pourquoi compter ?

- ▶ En informatique : Complexité moyenne d'un algorithme sur un ensemble d'entrées. (ex : tri d'une permutation)
- ▶ En mathématiques : Calculer des probabilités discrètes (La combinatoire algébrique est une autre source)
- ▶ En physique statistique : Calcul de la fonction de partition

$$Z = \sum_{\text{états accessibles } e} \exp(-\text{énergie}(e))$$

## Pourquoi compter ?

- ▶ En informatique : Complexité moyenne d'un algorithme sur un ensemble d'entrées. (ex : tri d'une permutation)
- ▶ En mathématiques : Calculer des probabilités discrètes (La combinatoire algébrique est une autre source)
- ▶ En physique statistique : Calcul de la fonction de partition

$$Z = \sum_{\text{états accessibles } e} \exp(-\text{énergie}(e))$$

- ▶ Découvrir des structures sur les objets.

## Pourquoi compter ?

- ▶ En informatique : Complexité moyenne d'un algorithme sur un ensemble d'entrées. (ex : tri d'une permutation)
- ▶ En mathématiques : Calculer des probabilités discrètes (La combinatoire algébrique est une autre source)
- ▶ En physique statistique : Calcul de la fonction de partition

$$Z = \sum_{\text{états accessibles } e} \exp(-\text{énergie}(e))$$

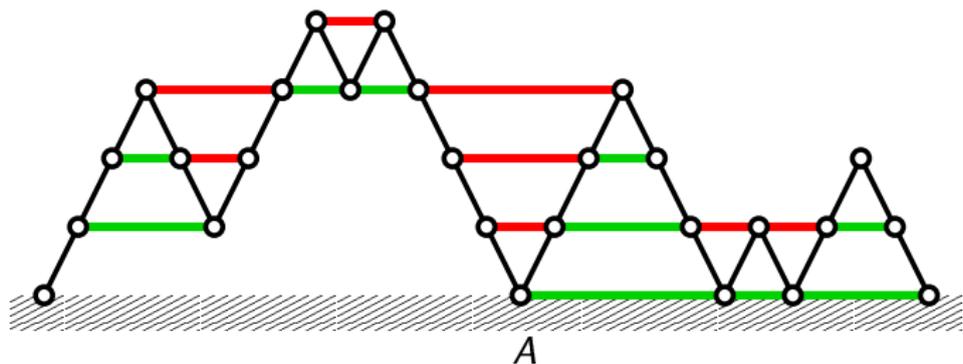
- ▶ Découvrir des structures sur les objets.
- ▶ Faire le lien avec d'autres problèmes.

## Au menu

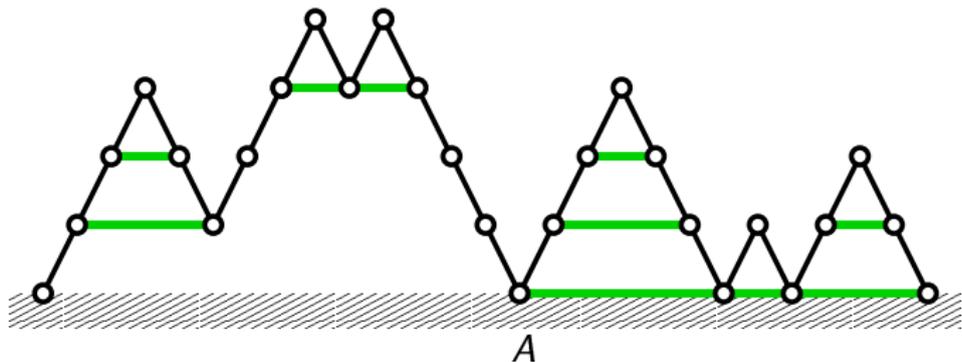
- ▶ **Interactions dans les chemins de Dyck**
- ▶ Règles de réécritures et bijections entre chemins de Dyck
- ▶ Animaux dirigés et percolation dirigée
- ▶ **Modèle du tas de sable et polynôme de Tutte**

## Interactions supérieures dans les chemins de Dyck

# Interactions dans les chemins de Dyck



# Interactions dans les chemins de Dyck

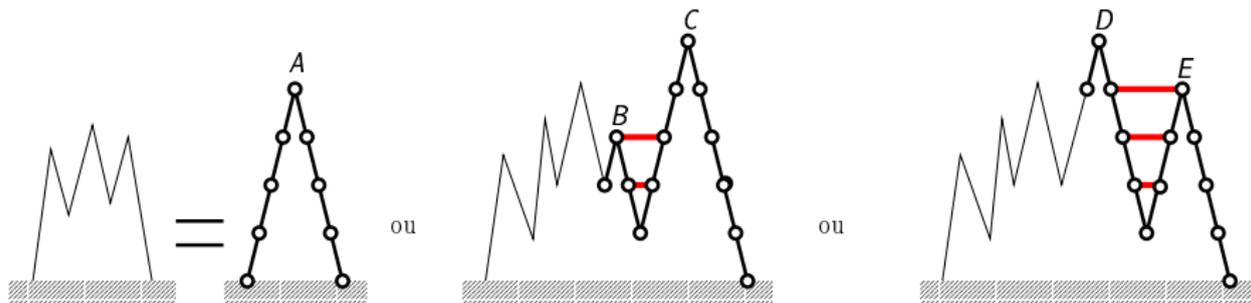


La série selon la longueur et le nombre d'interactions inférieures (en vert) est algébrique **[DS95]** :

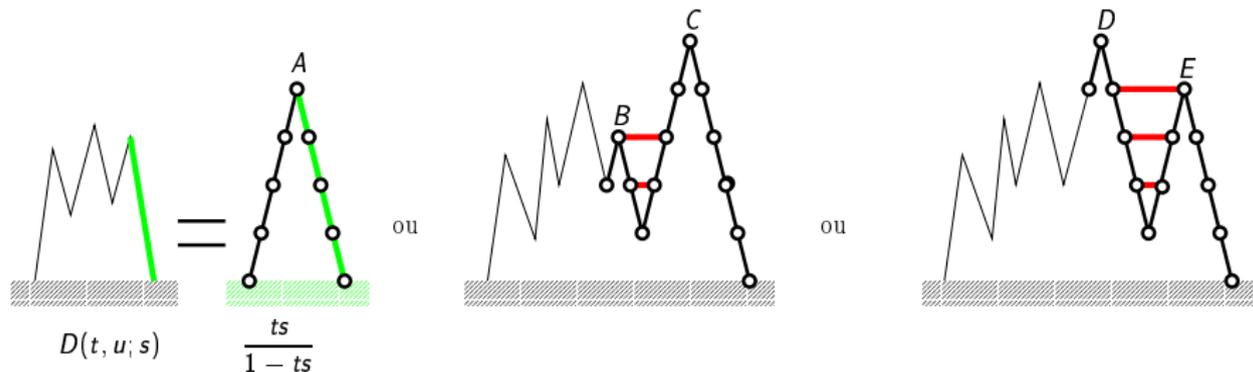
$$\sigma(t, u) \equiv \sigma = \frac{1 + t - 2ut - \sqrt{(1-t)(1-t-4ut+4u^2t^2)}}{2t(1-ut)}.$$



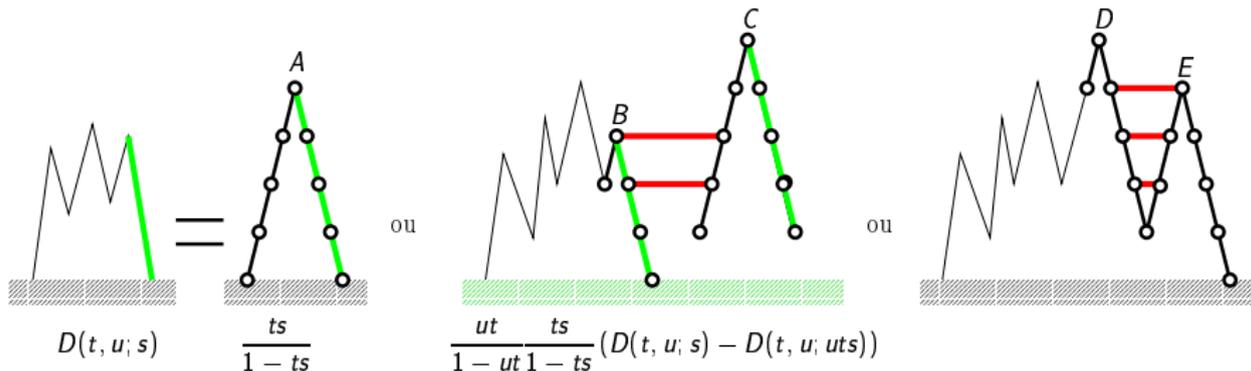
# Mise en équation par strates



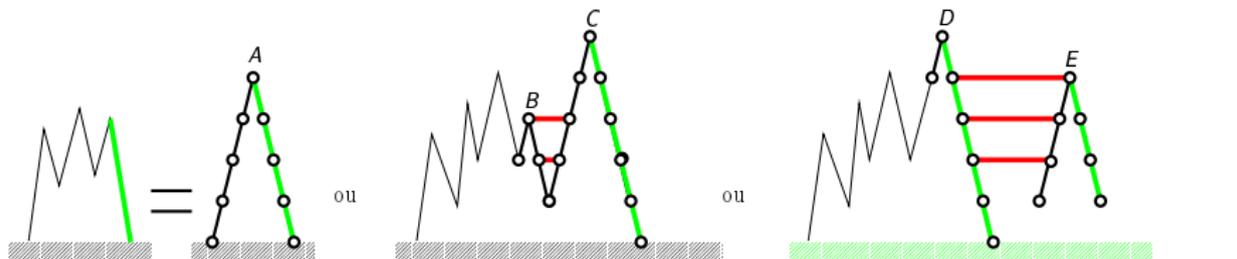
# Mise en équation par strates



# Mise en équation par strates



# Mise en équation par strates



$$D(t, u; s) = \frac{ts}{1 - ts} + \frac{ut \, ts}{1 - ut \, 1 - ts} (D(t, u; s) - D(t, u; uts)) + \frac{ut}{1 - ut} \left( \frac{s}{1 - s} (D(t, u; 1) - D(t, u; s)) - \frac{uts}{1 - uts} (D(t, u; 1) - D(t, u; uts)) \right)$$

# Résolution algébrique de l'équation fonctionnelle

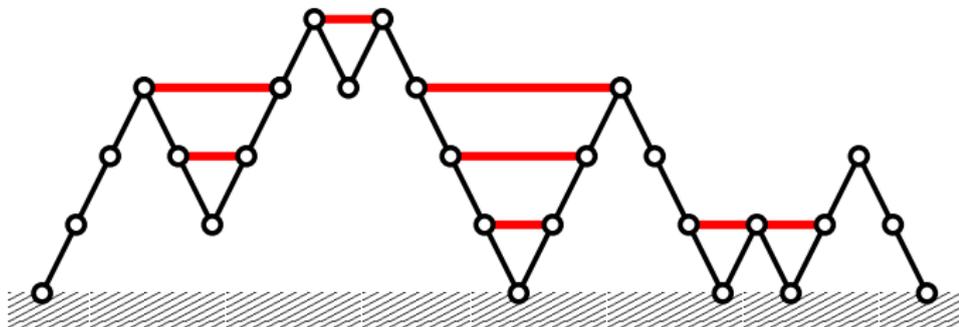
On pose  $q = ut$  et on écrit l'équation sous la forme

$$D(s) = a(s) + b(s)D(1) + c(s)D(qs) + d(s)D(s).$$

- Une itération de l'équation élimine  $D(qs)$ .
- La méthode du noyau élimine  $D(s)$  et introduit  $\sigma$ .
- On utilise les relations entre les racines du noyau.
- Une division permet d'exprimer  $D(1)$ .

$$D(t, u) = - \frac{t \sum_{n \geq 0} \left( \frac{(q-t)\sigma}{1-q} \right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n (qt\sigma^2)_n}}{q \sum_{n \geq 0} \left( \frac{(q-t)\sigma}{1-q} \right)^n \frac{q^{\binom{n+2}{2}-1}}{(q)_n (qt\sigma^2)_n} \frac{(1-tq^n\sigma)}{(1-q^n\sigma)(1-q^{n+1}\sigma)}}$$

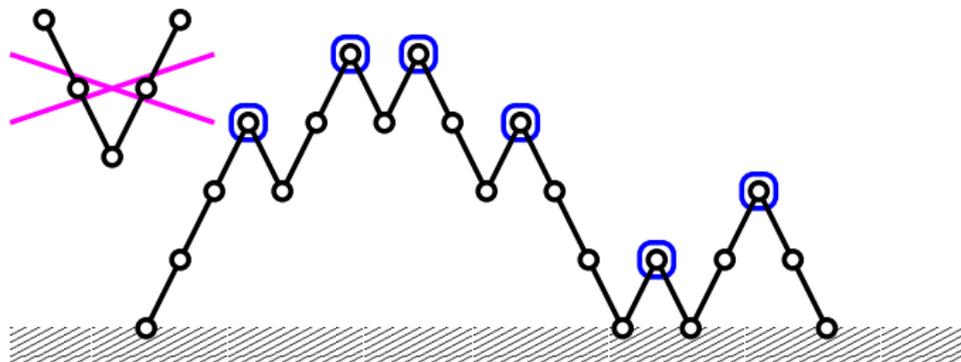
## Changement de modèle





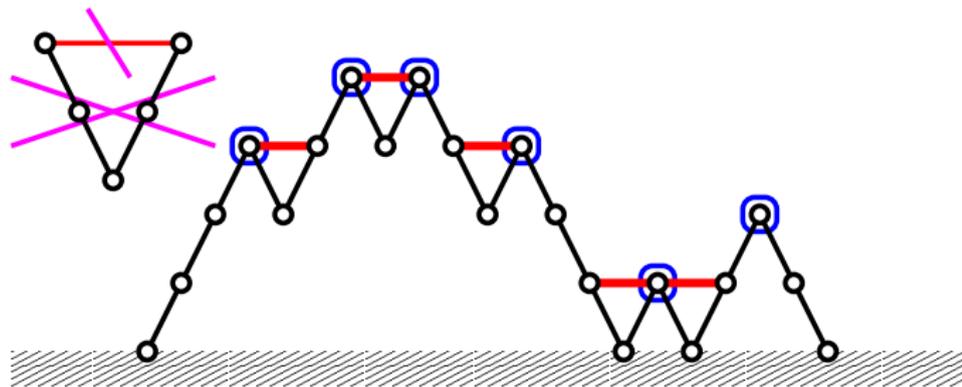


## Changement de modèle



Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creux.

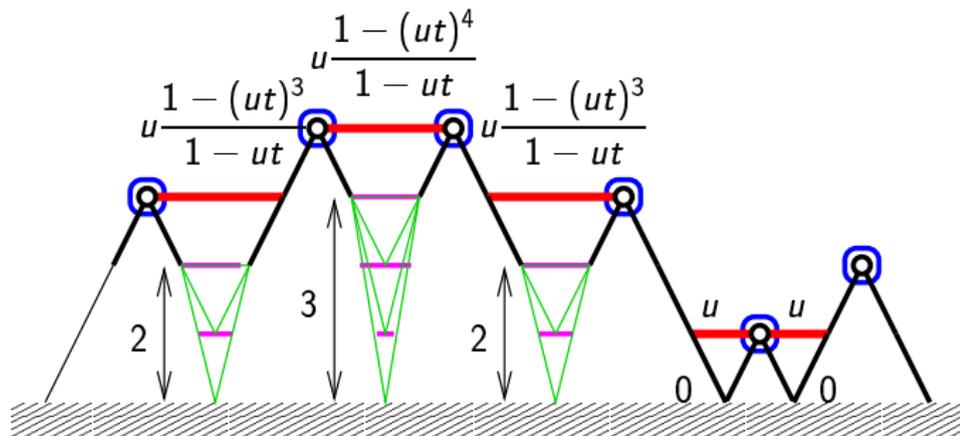
## Changement de modèle



Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creux.



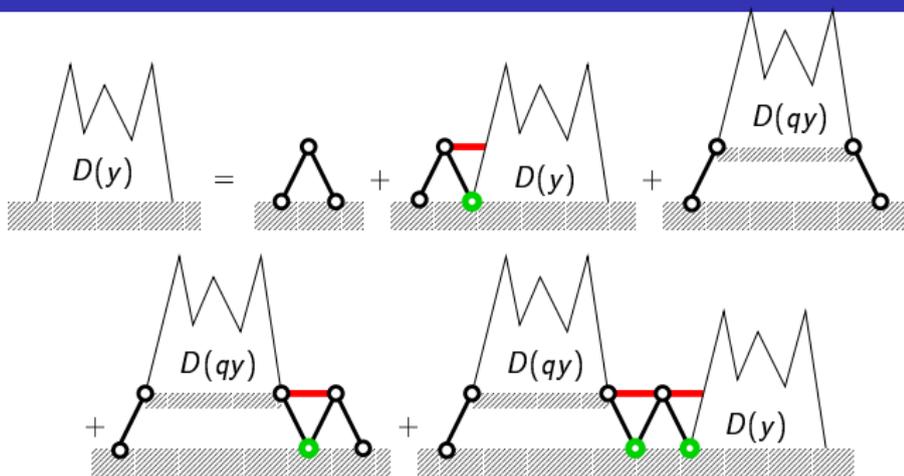
# Changement de modèle



Les *chemins à petits creux* sont les chemins de Dyck évitant les double-creux.

Un petit creux à la hauteur  $k$  est valué  $\frac{q(1 - q^{k+1}y)}{t(1 - q)}$ .

# Une équation $q$ -algébrique

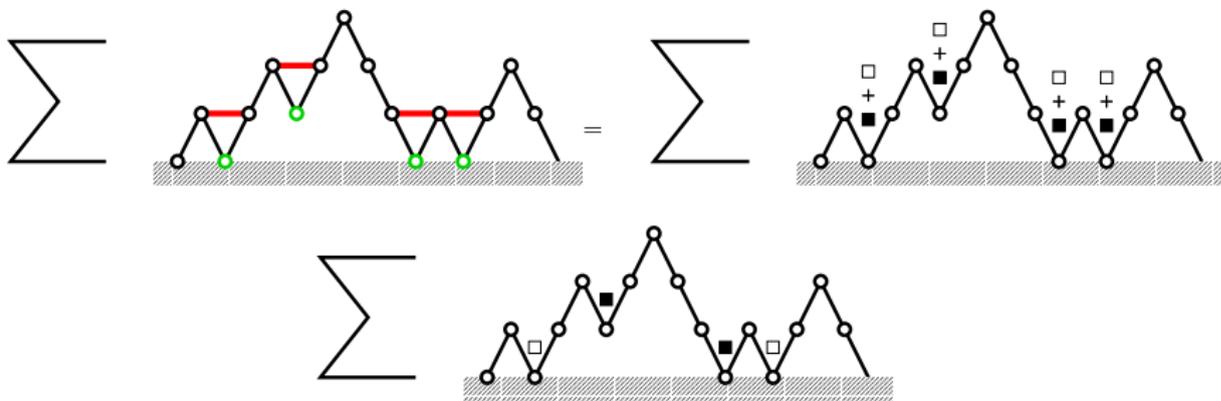


$$\begin{aligned}
 D(y) &= t + t \frac{q(1-xy)}{t(1-q)} D(y) + t D(qy) \\
 &\quad + t^2 \frac{q(1-xy)}{t(1-q)} D(qy) + t^2 \left( \frac{q(1-xy)}{t(1-q)} \right)^2 D(qy) D(y).
 \end{aligned}$$

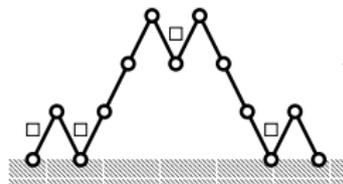
# Chemins à petits creux bicolores

Valuation d'un petit creux à hauteur  $k$ :

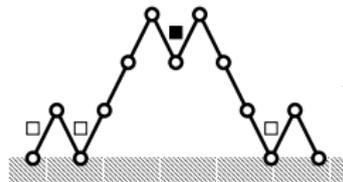
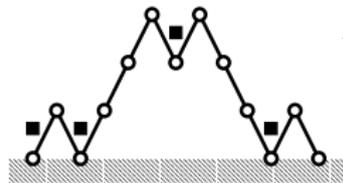
$$\frac{q(1 - q^{k+1}y)}{t(1 - q)} = \frac{q}{t(1 - q)} + \frac{-q^{k+2}y}{t(1 - q)} = \square + \blacksquare.$$



# Interprétations combinatoires d'éléments de la formule



$\sigma$



$$t \sum_{n \geq 0} \frac{(q-t)^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}} y^n}{(1-q)^n (q)_n (t/q)_{n+2}}$$

$$q^2 \sum_{n \geq 0} \frac{(q-t)^{n+1} q^{\binom{n+1}{2}} y^n}{(1-q)^n (q)_n (t/q)_n}$$

Lien avec [JvR00]

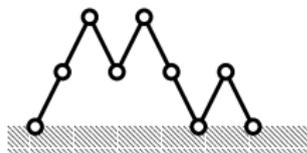
$$t^2 \sigma \sum_{n \geq 0} \frac{q^{6n} t^n \sigma^n y^n}{(q-1)^{3n} (q)_n (qt\sigma^2)_n}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{5n} t^n \sigma^n y^n}{(q-1)^{3n} (q)_n (qt\sigma^2)_n}$$

+ conditions simplificatrices

# Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck

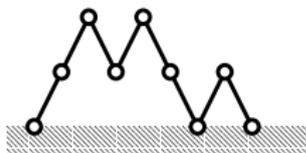
# Multiple interprétations pour les nombres de Catalan



Chemins de Dyck

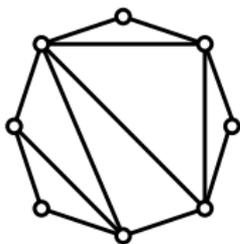
$$\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$$

# Multiples interprétations pour les nombres de Catalan



Chemins de Dyck

$$\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$$

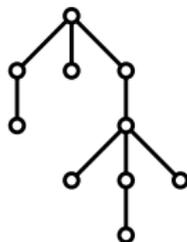


Triangulations de polygones

# Multiple interpretations for Catalan numbers

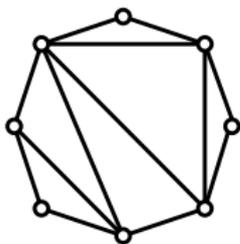


Chemins de Dyck



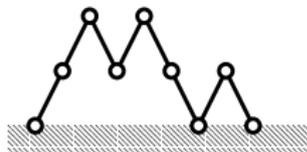
Arbres plans

$$\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$$

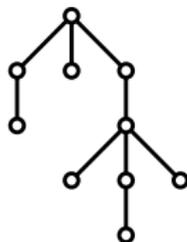


Triangulations de polygones

# Multiple interpretations for Catalan numbers

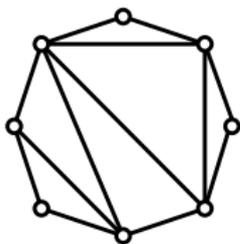


Chemins de Dyck

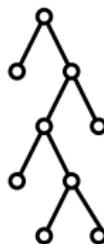


Arbres plans

$$\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$$



Triangulations de polygones

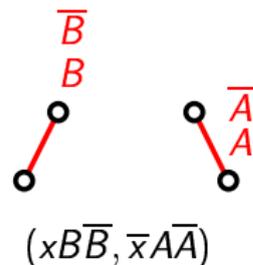


Arbres binaires

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions

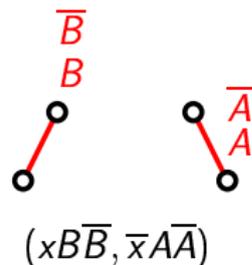
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



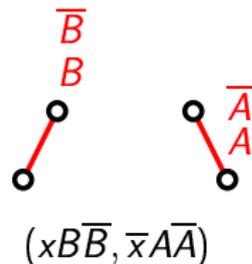
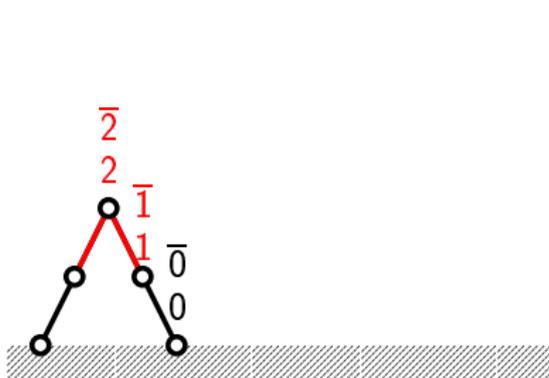
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



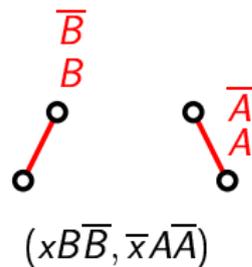
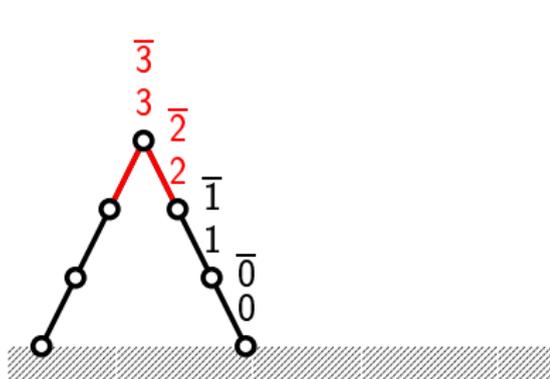
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



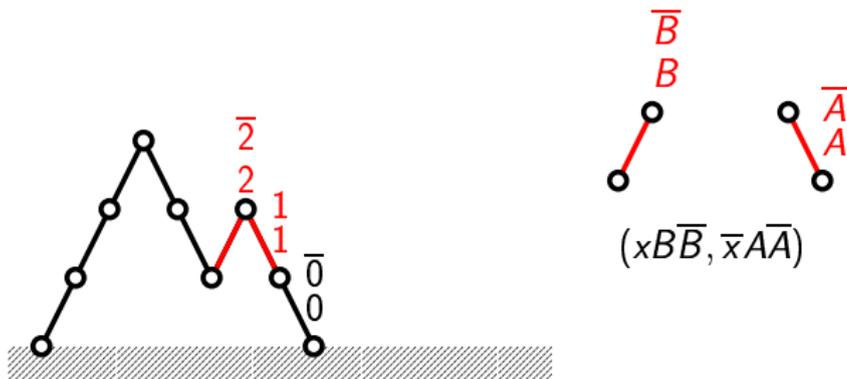
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



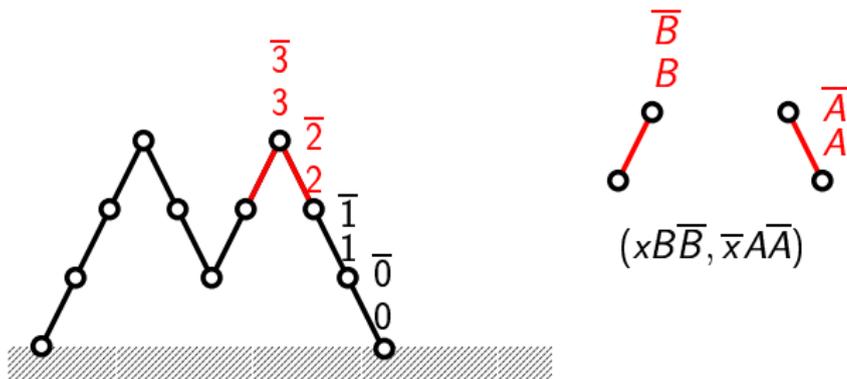
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



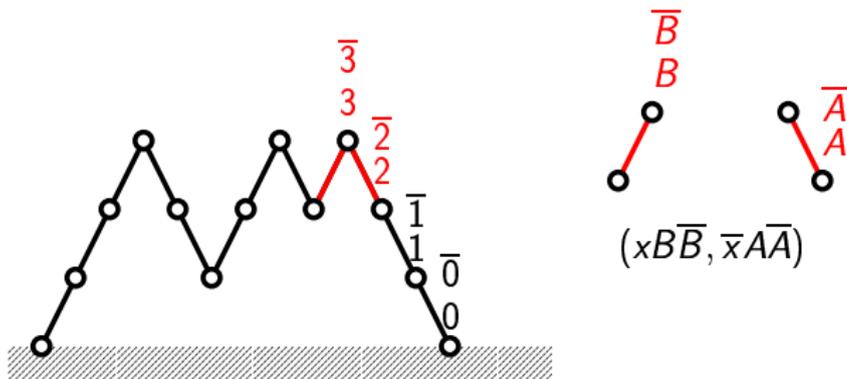
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



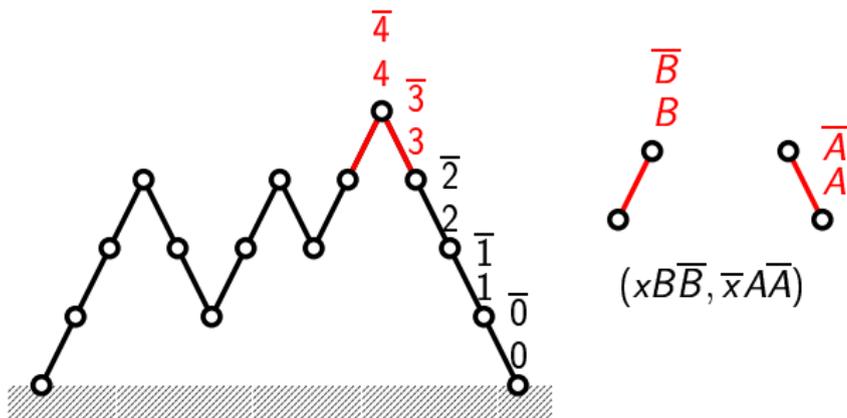
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



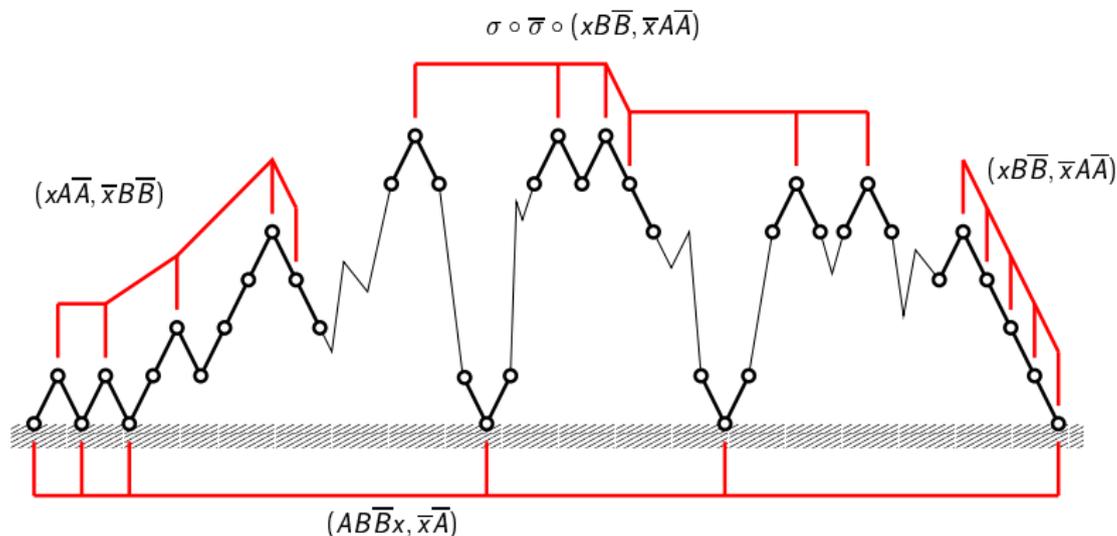
Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

# Un algorithme paramétré par des modes d'insertions



Une suite quasi-décroissante : 0, 1, 2, 1, 2, 2, 3

## Des analogues de la dernière descente



## Étude de ces bijections

J'ai réalisé :

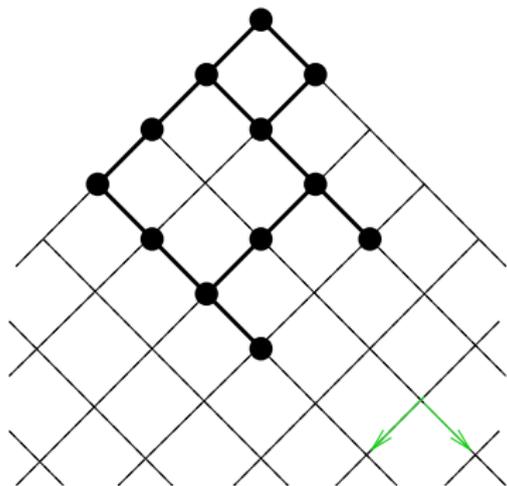
- ▶ Une étude systématique de 210 modes d'insertions,
- ▶ 12 bijections différentes et deux symétries sur les modes,
- ▶ 5 analogues de la dernière descente identifiés.

J'ai trouvé ce style de bijection dans les contextes combinatoires suivants :

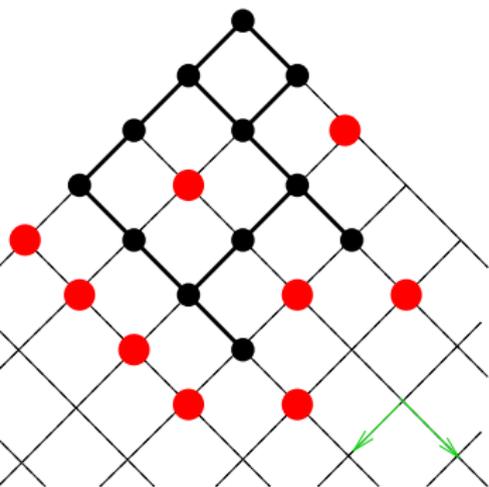
- ▶ Demi-animaux et chemins de Motzkin **[Sha00]**,
- ▶ Interprétation combinatoire autour de la méthode du noyau,
- ▶ Les analogues de l'aire de Haiman, Haglund . . . ,
- ▶ Symétries sur les polyominos parallélogrammes et une involution de Kreweras **[Kre70]**.

## Animaux et percolation dirigés

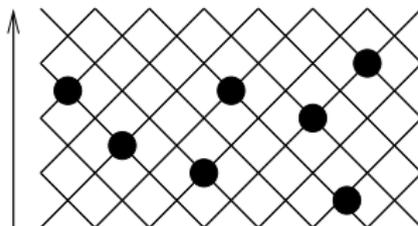
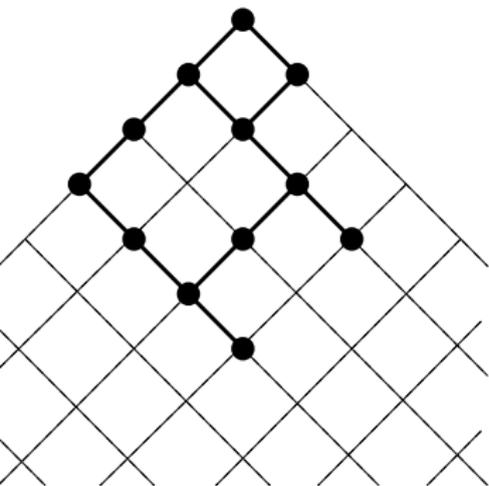
# Animaux et percolation dirigés



# Animaux et percolation dirigés

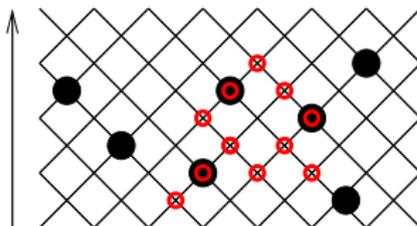
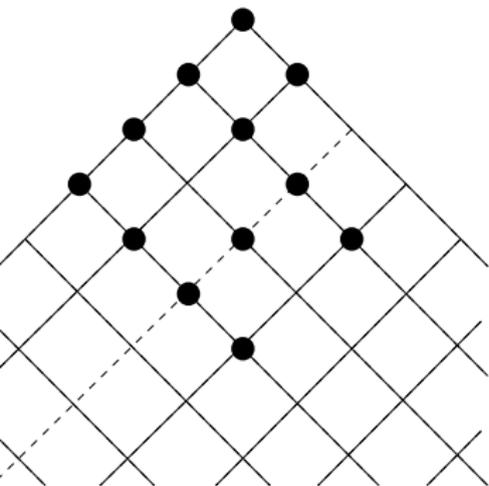


# Animaux et percolation dirigés



[Dhar84]

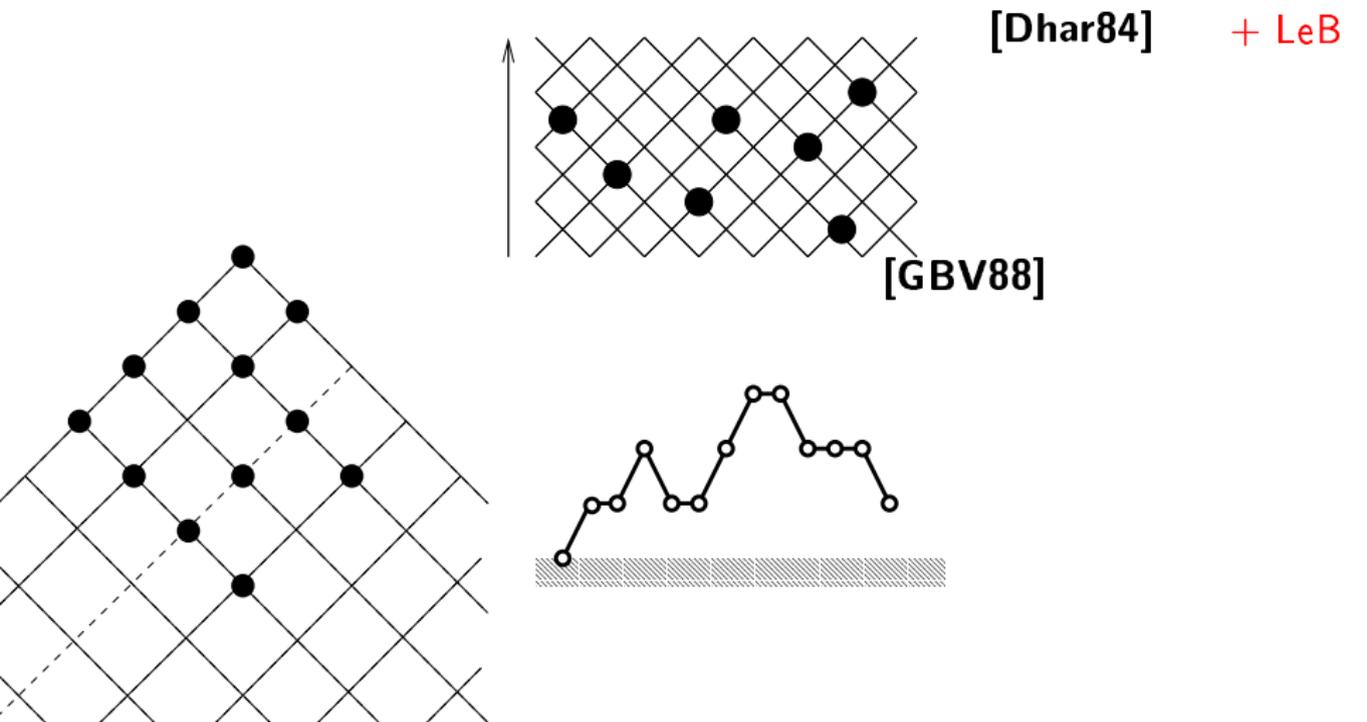
# Animaux et percolation dirigés



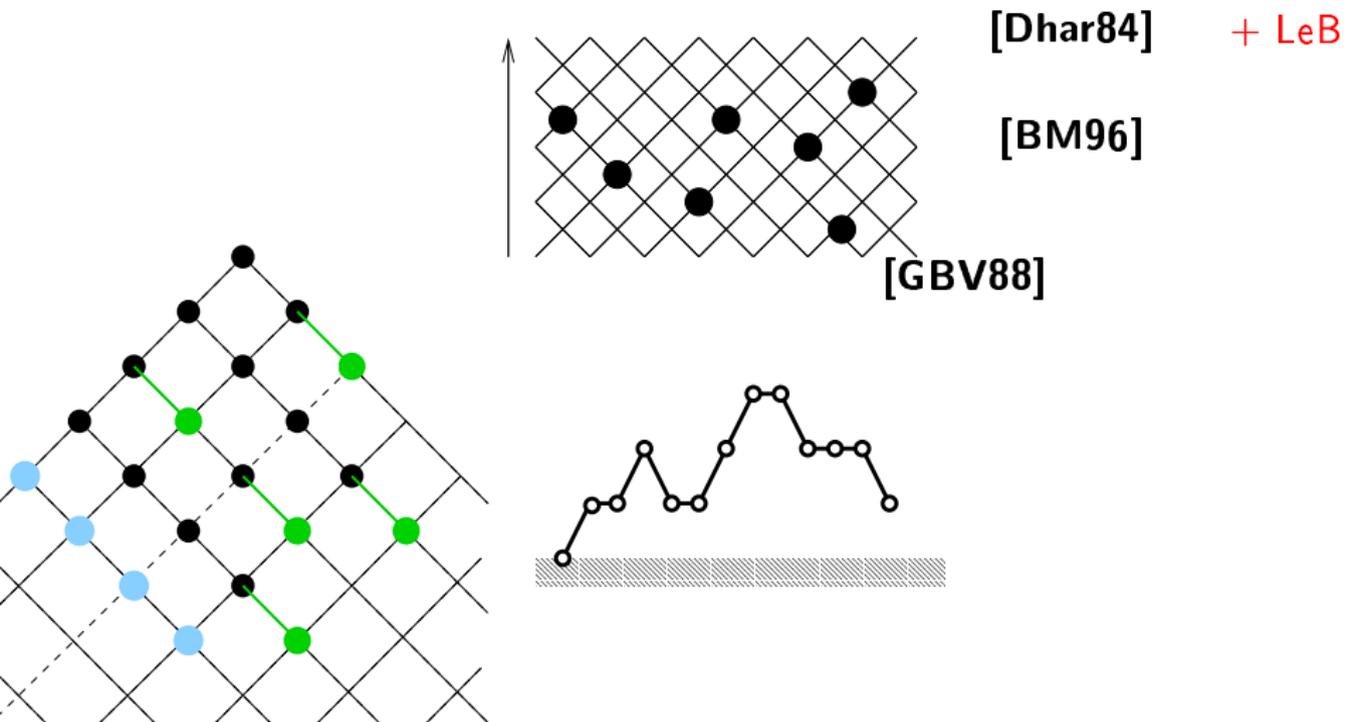
[Dhar84]

+ LeB

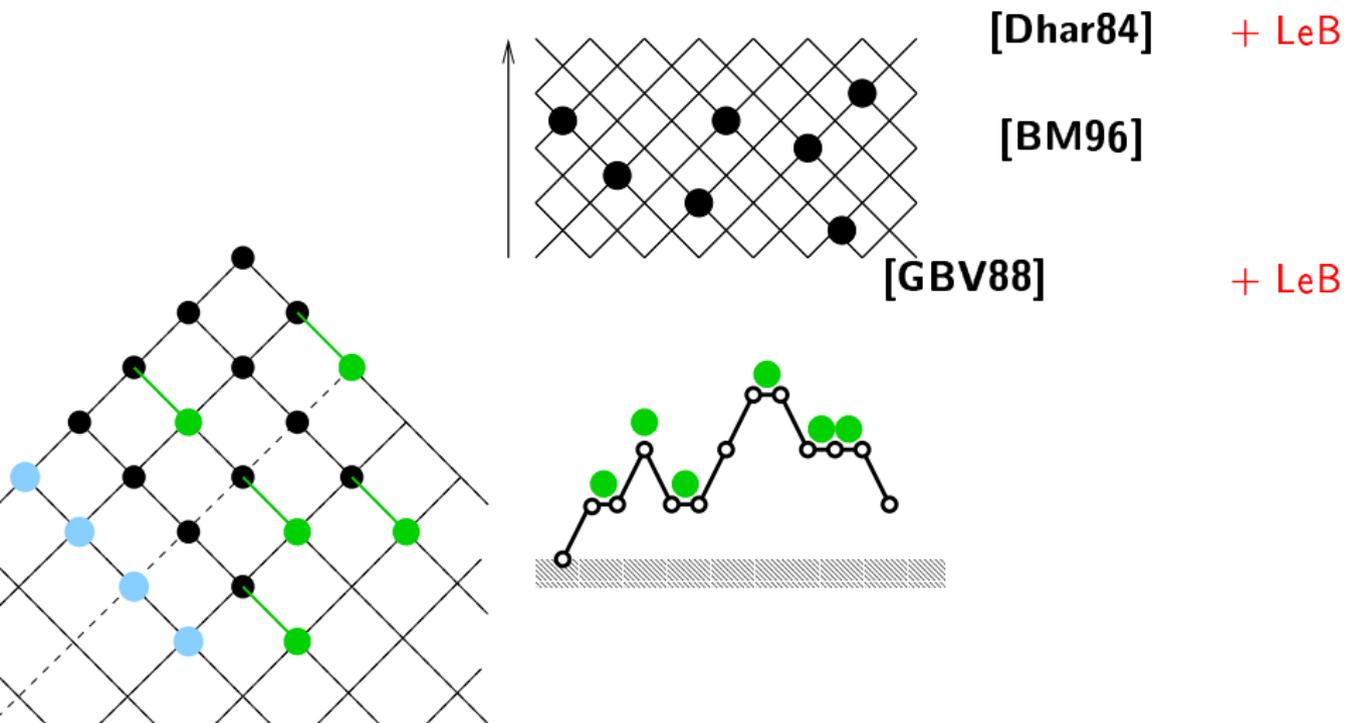
# Animaux et percolation dirigés



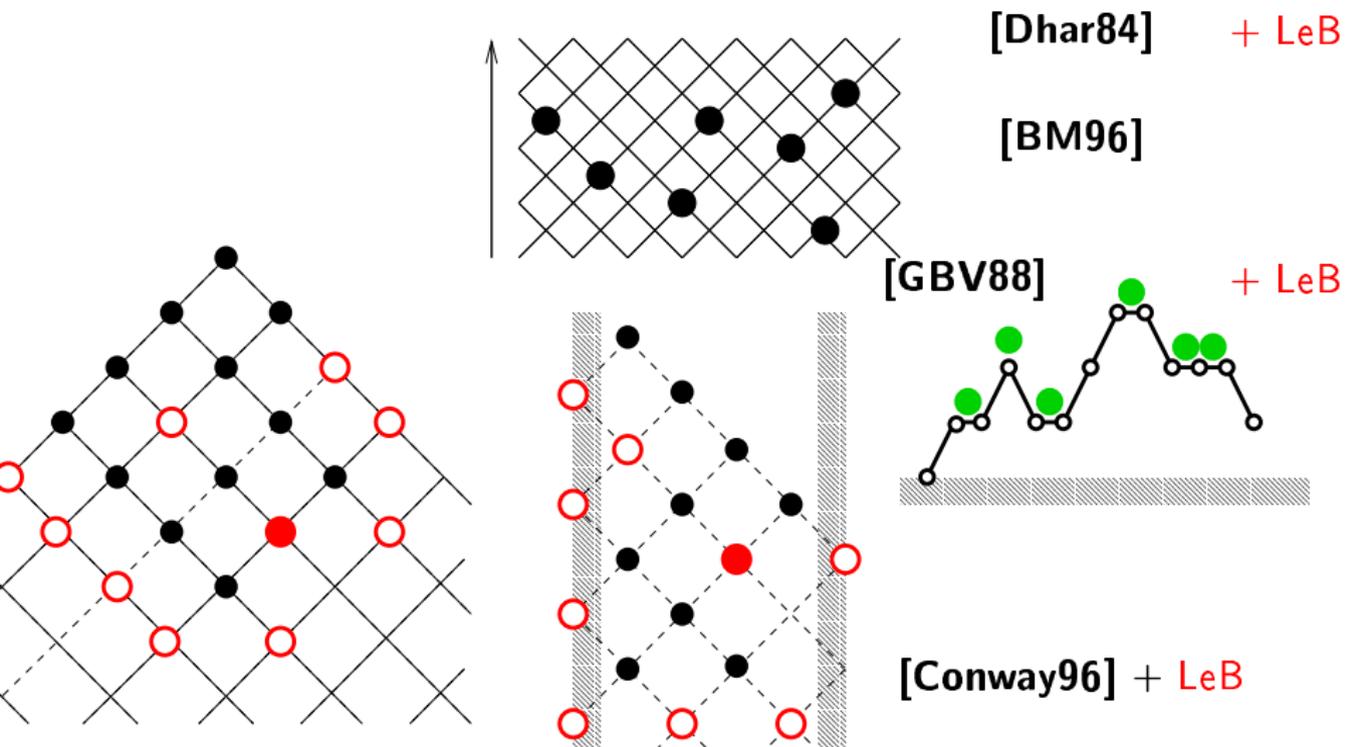
# Animaux et percolation dirigés



# Animaux et percolation dirigés



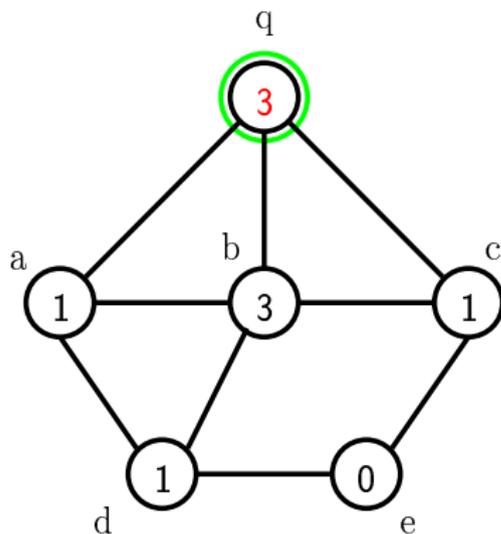
# Animaux et percolation dirigés



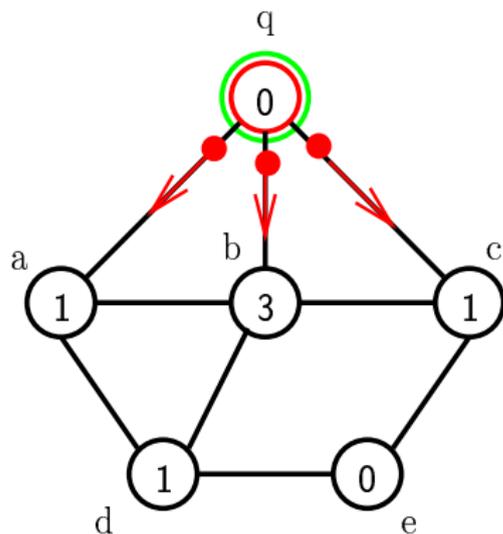
## Modèle du tas de sable et polynôme de Tutte

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire

- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.

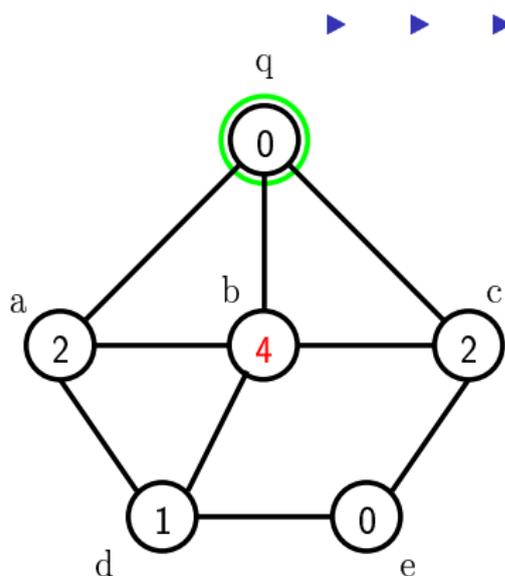


## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



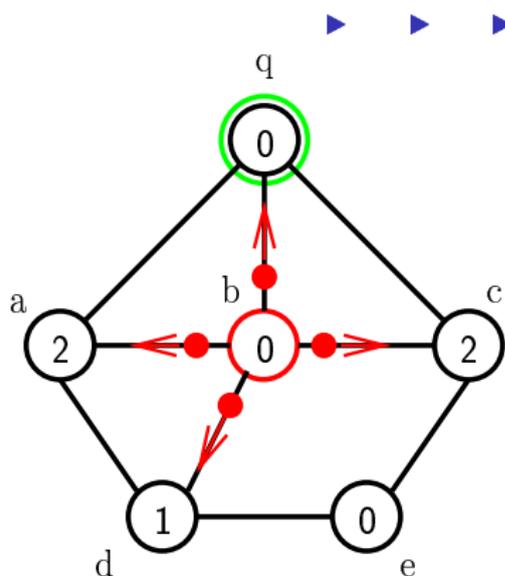
- ▶ ▶ ▶ ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



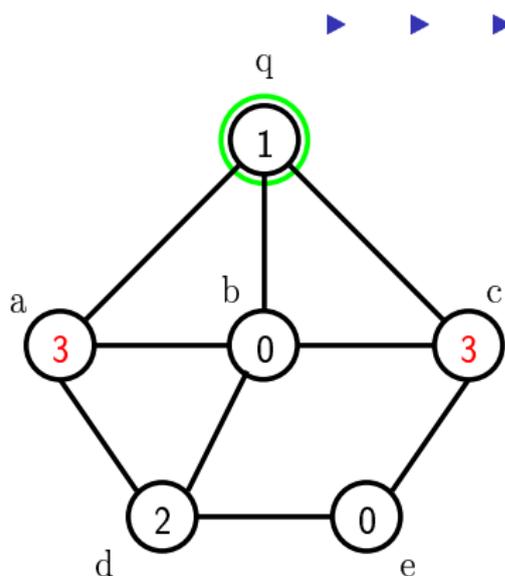
- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- ▶ Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- ▶ Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire

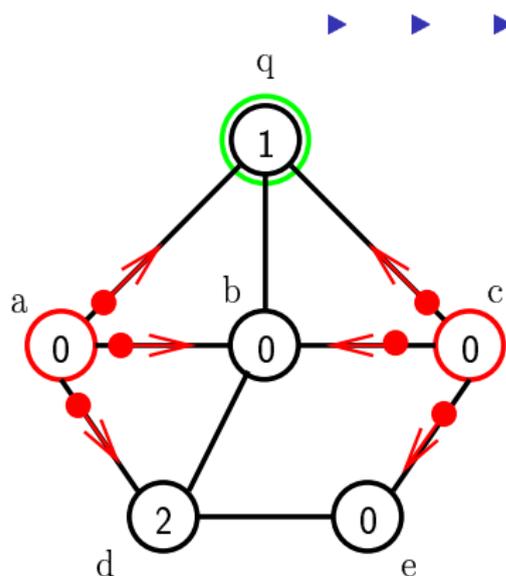


► ► ► ► Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.

Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.

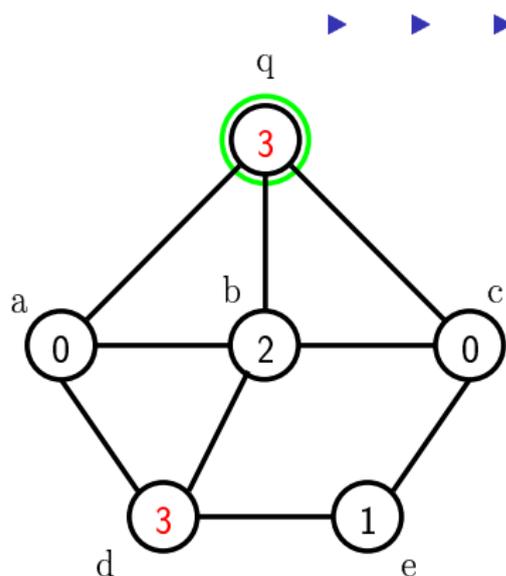
Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- ▶ Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.
- ▶ Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire

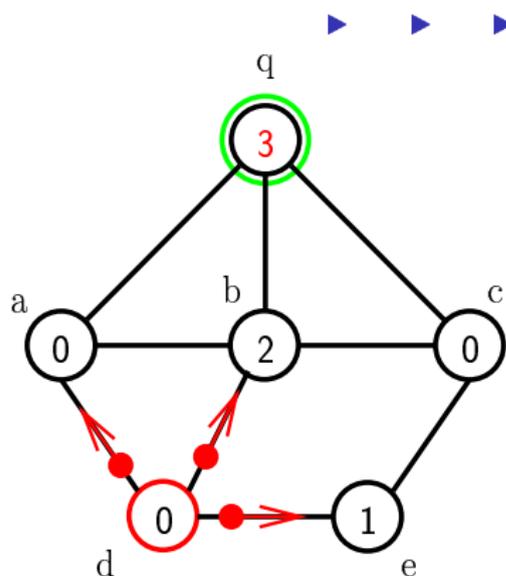


► ► ► ► Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.

Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.

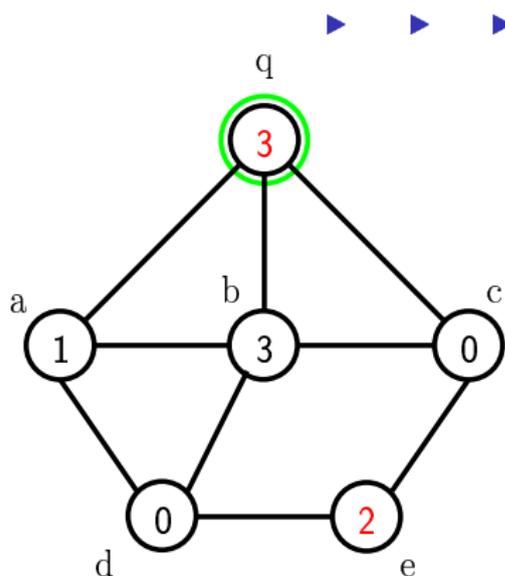
Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



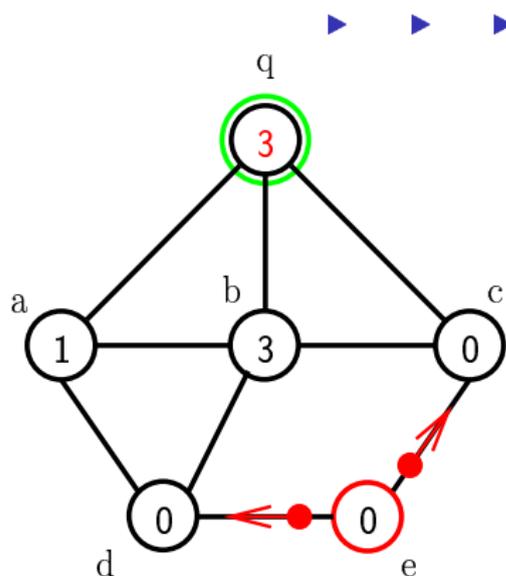
- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- ▶ Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.
- ▶ Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



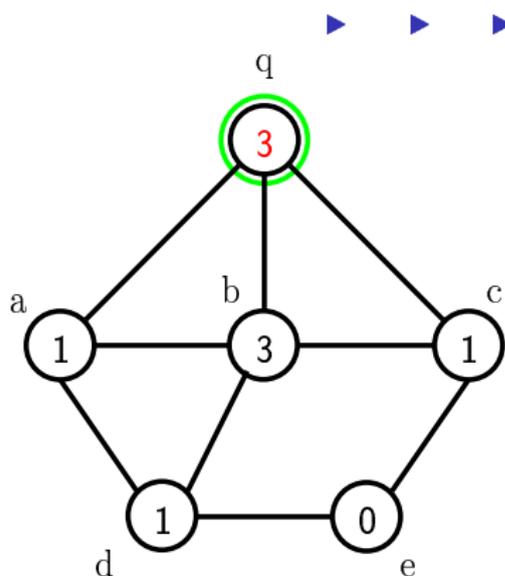
- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- ▶ Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.
- ▶ Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



- ▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.
- ▶ Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.
- ▶ Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

## Modèle du tas de sable : une diffusion discrète élémentaire



▶ Une **configuration** est une distribution de grains sur les sommets.

Un sommet est **stable** si son nombre de grains est inférieur à son degré sinon il s'**éboule** en envoyant un grain sur chaque arête incidente.

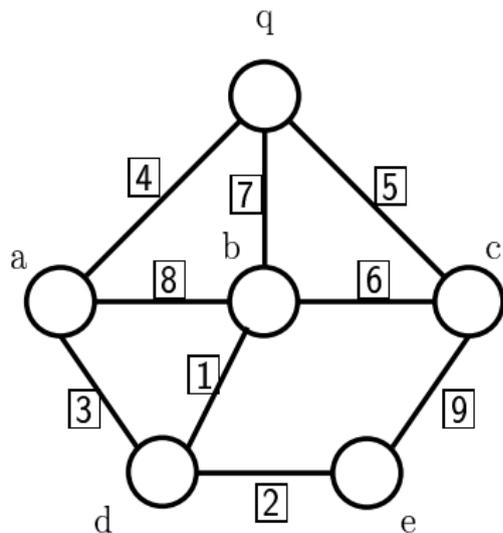
Une configuration est **récurrente** si seul le puits est instable et que son éboulement entraîne un éboulement de chaque sommet.

Le **niveau** d'une configuration est le nombre de grains moins le nombre d'arêtes du graphe. Ici

$$(3 + 1 + 3 + 1 + 1 + 0) - 9 = 0.$$

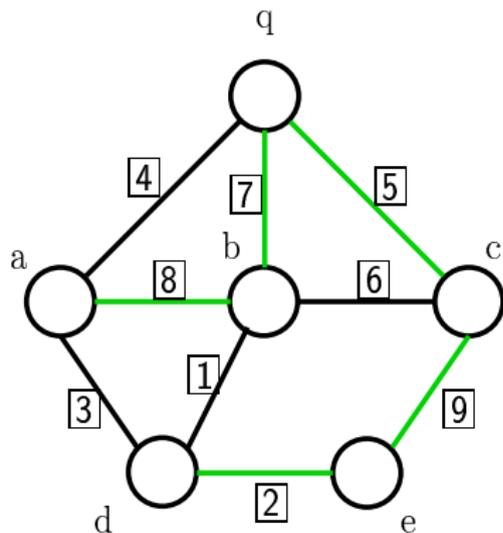
# Le polynôme de Tutte

▶ ▶ ▶ On fixe un ordre arbitraire sur les arêtes.



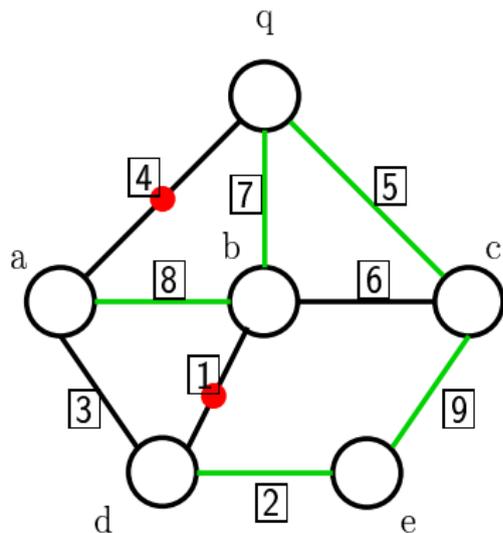
## Le polynôme de Tutte

- ▶ On fixe un ordre arbitraire sur les arêtes.
- ▶ Soit  $T$  un arbre couvrant du graphe  $G$ .

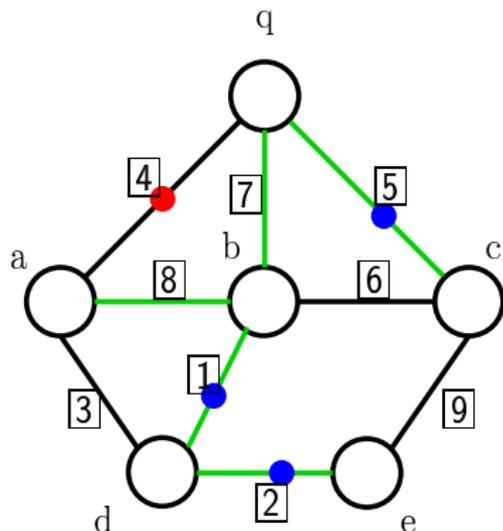


## Le polynôme de Tutte

- ▶ On fixe un ordre arbitraire sur les arêtes.
- ▶ Soit  $T$  un arbre couvrant du graphe  $G$ .
- ▶ Une arête **externe** est **active** dans  $T$  si elle est l'arête minimale du cycle qu'elle forme avec  $T$ .

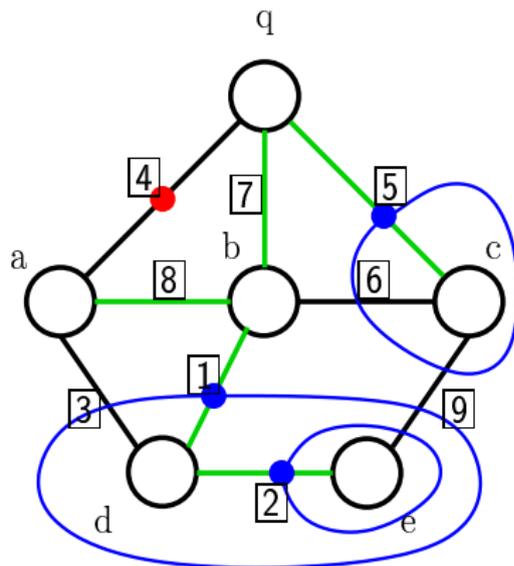


## Le polynôme de Tutte



- ▶ On fixe un ordre arbitraire sur les arêtes.
- ▶ Soit  $T$  un arbre couvrant du graphe  $G$ .
- ▶ Une arête **externe** est **active** dans  $T$  si elle est l'arête minimale du cycle qu'elle forme avec  $T$ .
- ▶ Une arête *interne*  $e$  est *active* dans  $T$  si elle est l'arête minimale du cocycle défini par les deux composantes de  $T$  privé de  $e$ .

## Le polynôme de Tutte



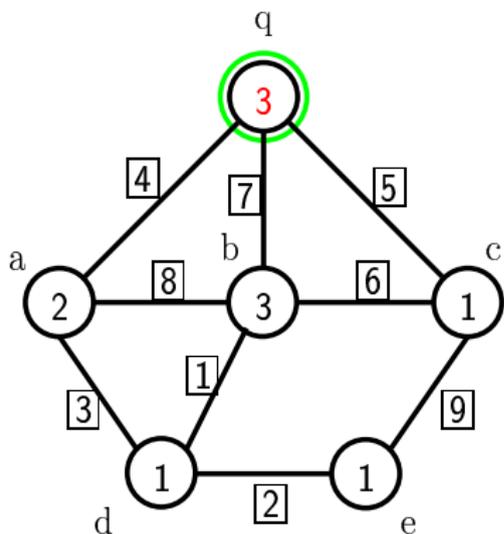
- ▶ On fixe un ordre arbitraire sur les arêtes.
- ▶ Soit  $T$  un arbre couvrant du graphe  $G$ .
- ▶ Une arête **externe** est **active** dans  $T$  si elle est l'arête minimale du cycle qu'elle forme avec  $T$ .
- ▶ Une arête *interne*  $e$  est *active* dans  $T$  si elle est l'arête minimale du cocycle défini par les deux composantes de  $T$  privé de  $e$ .
- ▶ Le polynôme de Tutte **[Wel]** est

$$\mathcal{T}(G; x, y) = \sum_{\text{arbre couvrant } T} x^{\text{int}(T)} y^{\text{ext}(T)}.$$

## Polynôme de Tutte et modèle du tas de sable

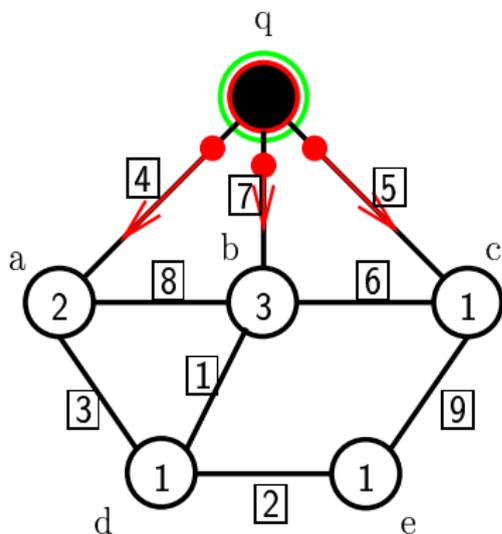
Pour un graphe  $G$  :

- Il y a autant de configurations récurrentes que d'arbres couvrants. (Bijection de Dhar et Majumdar)
- La distribution des niveaux des configurations récurrentes est  $\mathcal{T}(G; 1, y)$ , celle de l'activité externe des arbres couvrants. (Conjecture de Biggs, preuve de Merino-Lopez utilisant une définition récursive du polynôme de Tutte)
- **Il existe une bijection explicite entre les configurations récurrentes de niveau  $k$  et les arbres couvrants d'activité externe  $k$ . (Cori et Le Borgne, Adv. Appl. Math. 2003)**



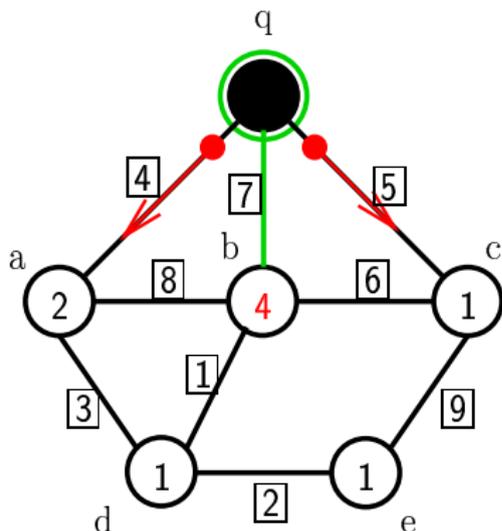
$q$ ;

- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.

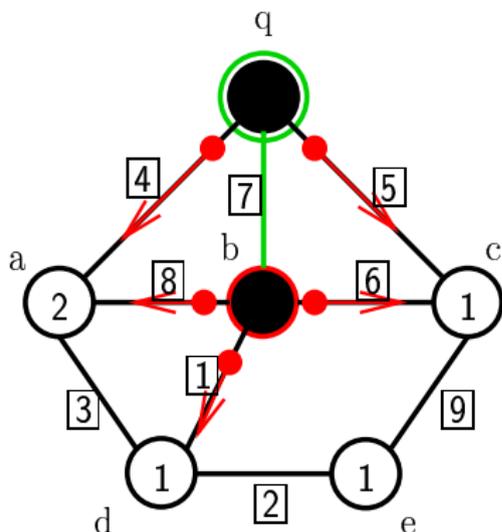


$q; 7;$

- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.

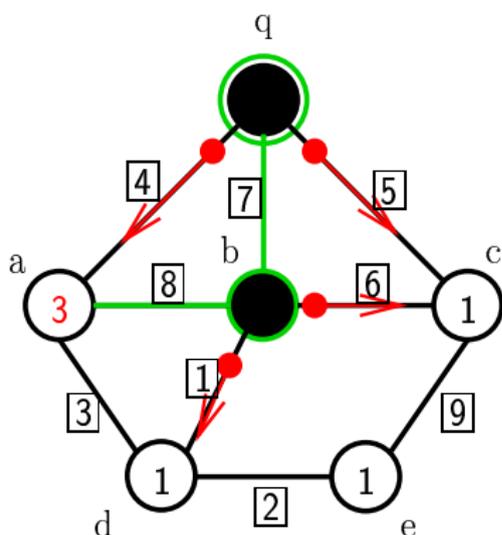


$q; 7; b;$



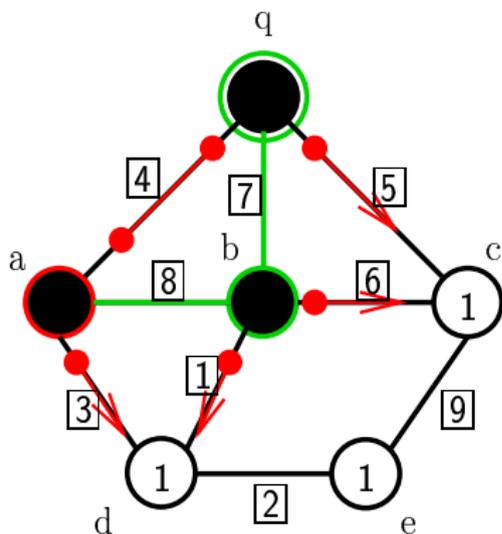
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.

$q; 7; b; 8;$



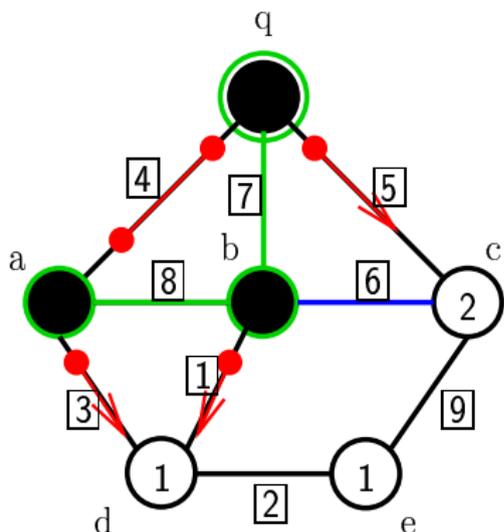
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.

$q; 7; b; 8; a;$



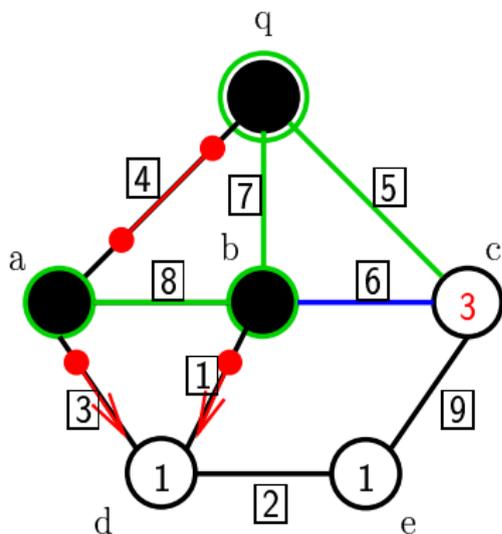
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.

$q; 7; b; 8; a; 6;$



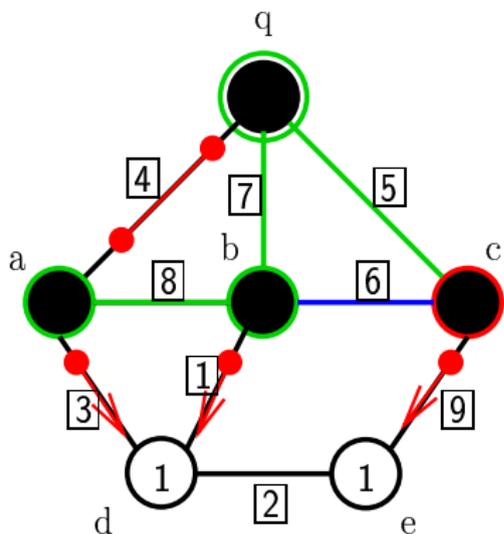
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5;$



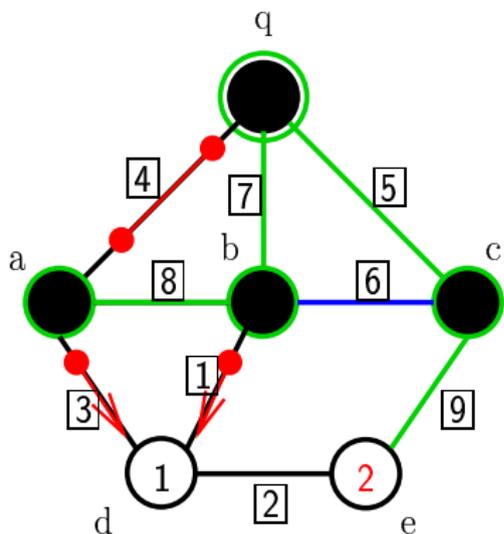
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5; c;$



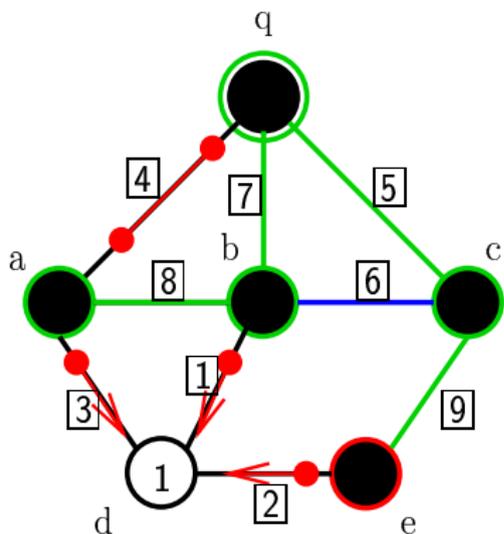
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5; c; 9;$



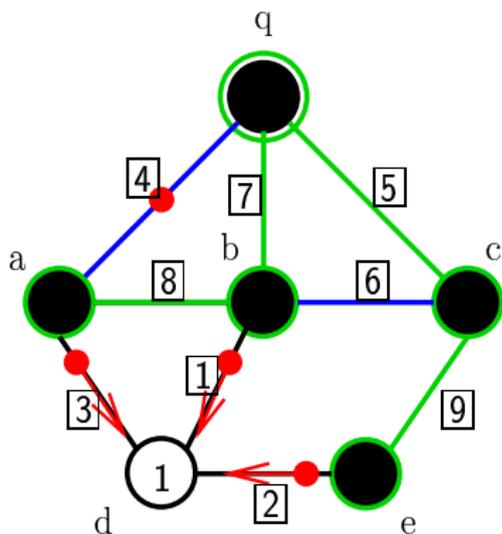
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q$ ; 7;  $b$ ; 8;  $a$ ; 6; 5;  $c$ ; 9;  $e$ ;



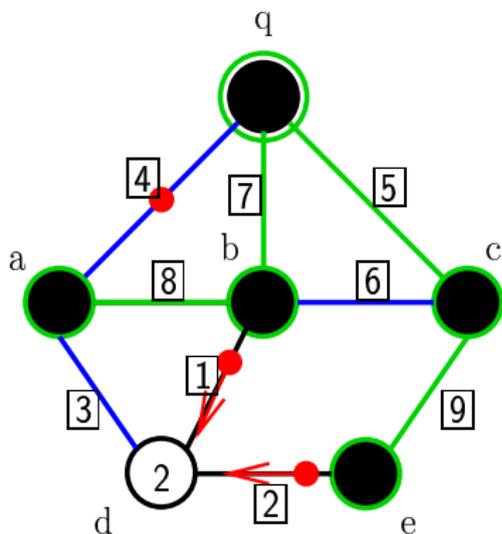
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q$ ; 7;  $b$ ; 8;  $a$ ; 6; 5;  $c$ ; 9;  $e$ ; 4;



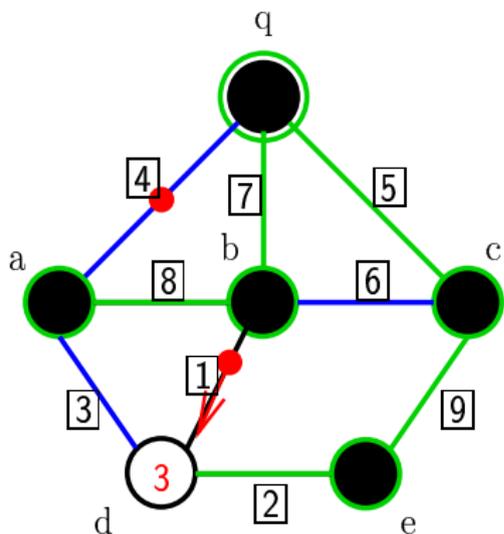
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5; c; 9; e; 4; 3;$



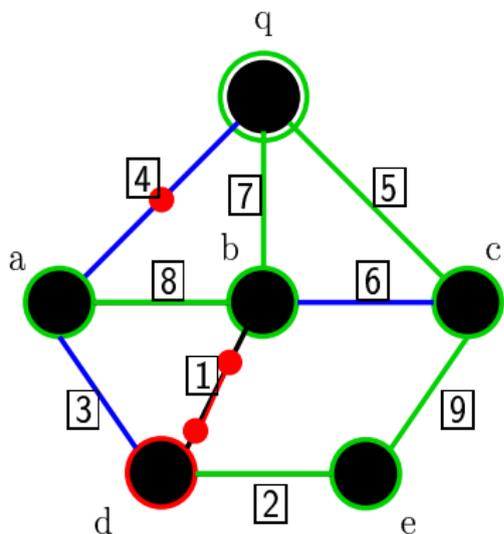
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5; c; 9; e; 4; 3; 2;$



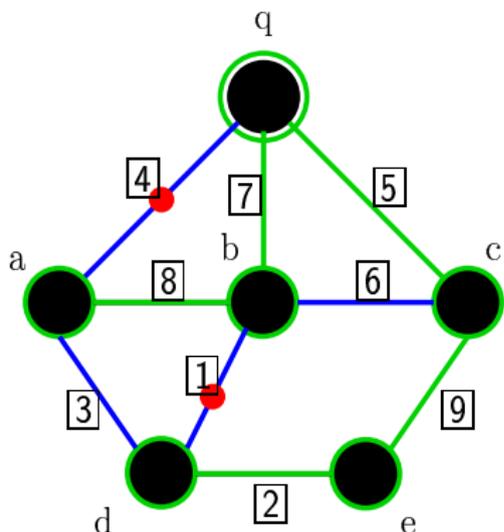
- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5; c; 9; e; 4; 3; 2; d;$



- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

$q; 7; b; 8; a; 6; 5; c; 9; e; 4; 3; 2; d; 1.$



- Le premier grain arrivant à destination est celui de la plus grande arête.
- Un sommet s'éboule dès qu'il est instable. Donc tous les grains se déplacent lors de l'éboulement.
- Sur une arête interne un grain fait un aller-retour.
- Deux grains se croisent sur une arête externe active.
- Sur une arête externe non-active un grain fait un aller-retour.
- L'activité externe de l'arbre couvrant est aussi le niveau de la configuration récurrente.

Interactions supérieures dans les chemins de Dyck  
Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck  
Animaux et percolation dirigés  
Modèle du tas de sable et polynôme de Tutte

Le modèle du tas de sable  
Le polynôme de Tutte  
Une bijection entre ces deux notions

## Perspectives

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :
  - ▶ Classifier des bijections de la littérature.

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :
  - ▶ Classifier des bijections de la littérature.
  - ▶ Trouver une bistatistique naturellement symétrique pour la conjecture de Haiman et Garsia.

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :
  - ▶ Classifier des bijections de la littérature.
  - ▶ Trouver une bistatistique naturellement symétrique pour la conjecture de Haiman et Garsia.
- ▶ Animaux et percolation dirigés

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :
  - ▶ Classifier des bijections de la littérature.
  - ▶ Trouver une bistatistique naturellement symétrique pour la conjecture de Haiman et Garsia.
- ▶ Animaux et percolation dirigés
  - ▶ Comprendre combinatoirement le périmètre droit.

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :
  - ▶ Classifier des bijections de la littérature.
  - ▶ Trouver une bistatistique naturellement symétrique pour la conjecture de Haiman et Garsia.
- ▶ Animaux et percolation dirigés
  - ▶ Comprendre combinatoirement le périmètre droit.
  - ▶ Déterminer le premier moment du périmètre.

## Perspectives

- ▶ Interactions supérieures dans les chemins de Dyck :
  - ▶ Obtenir une énumération "combinatoire" des interactions supérieures.
  - ▶ Observer les algorithmes de résolution de  $q$ -équation à la lumière des interprétations combinatoires.
- ▶ Règles de réécriture et bijections entre chemins de Dyck :
  - ▶ Classifier des bijections de la littérature.
  - ▶ Trouver une bistatistique naturellement symétrique pour la conjecture de Haiman et Garsia.
- ▶ Animaux et percolation dirigés
  - ▶ Comprendre combinatoirement le périmètre droit.
  - ▶ Déterminer le premier moment du périmètre.
- ▶ Modèle du tas de sable et polynôme de Tutte.