

Corrigé TD1 - Exercice 12

28 février 2010

1. Le langage $\epsilon^{-1}L$ se définit comme $\{g \in X^* \mid \epsilon g \in L\} = \{g \in X^* \mid g \in L\}$.
Donc $\epsilon^{-1}L = L$.
2. Soit $u, v \in X^*$. Alors $(uv)^{-1}L = \{g \in X^* \mid (uv)g \in L\}$. Comme la concaténation est associative, cet ensemble est égal à $\{g \in X^* \mid u(vg) \in L\}$. Donc, pour tout mot $g \in (uv)^{-1}L$, $vg \in u^{-1}L$. Pour $L' = u^{-1}L$, l'ensemble des mots g tel que $vg \in L'$ est par définition $v^{-1}L' = v^{-1}(u^{-1}L)$.
3. Soit $x \in X$.

(a)

$$\begin{aligned}x^{-1}(L \cup M) &= \{g \in X^* \mid xg \in L \cup M\} \\ &= \{g \in X^* \mid xg \in L\} \cup \{g \in X^* \mid xg \in M\} \\ &= x^{-1}L \cup x^{-1}M\end{aligned}$$

- (b) $x^{-1}(L.M) = \{g \in X^* \mid xg \in L.M\}$. Si L contient le mot vide ϵ , alors $x^{-1}(L.M)$ contient forcément le langage $x^{-1}M$; sinon $x^{-1}(L.M) = \{g_1.g_2 \in X^*.M \mid x.g_1.g_2 \in L.M\}$ donc contient $(x^{-1}L).M$. Le langage résiduel est donc :

$$(\{\epsilon\} \cap L).x^{-1}(L.M) \cup (x^{-1}L).M$$

- (c) Le langage L^* peut se décomposer en :

$$\{\epsilon\} \cup L \cup L.L \dots \cup L.L^{n-1} \cup \dots$$

où L ne contient pas ϵ . Donc le langage résiduel associé est égal à :

$$x^{-1}\{\epsilon\} \cup x^{-1}L \cup x^{-1}L.L \dots \cup x^{-1}L.L^{n-1} \cup \dots$$

Puisque ϵ n'est pas dans L , on peut le réécrire :

$$\emptyset \cup (x^{-1}L) \cup (x^{-1}L).L \dots \cup (x^{-1}L).L^{n-1} \cup \dots$$

ce qui se réduit en $(x^{-1}L).L^*$