

Théorie des langages TD n°1

Exercice 1

1.1 Pour chacun des ensembles suivants, donnez une application bijective de cet ensemble dans \mathbb{N} (entiers naturels). Explicitez à chaque fois la bijection réciproque :

$$2\mathbb{N} ; 2\mathbb{N}+1 ; \mathbb{Z}$$

1.2 Pour chacun des ensembles suivants, donnez une application bijective de cet ensemble dans \mathbb{N} (entiers naturels) :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} ; \mathbb{N}^3 ; \mathbb{N}^k$$

Exercice 2 Soit $X = \{a, b, c\}$ un alphabet. Après avoir choisi une numérotation "raisonnable" de X à l'aide de $\{1, 2, 3\}$ (combien de possibilités ?), utilisez X^* pour représenter les entiers suivants en numération de position à base 3 sans le zéro : 0, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 86.

Quels sont les nombres représentés par $\varepsilon, c, ac, aabb$?

Exercice 3 Montrer que pour tout ensemble fini X , l'application suivante est un homomorphisme de monoïde :

$$h : X^* \rightarrow \mathbb{N} \\ f \rightarrow h(f) = |f|$$

Exercice 4 Soit X un alphabet ; pour tout $x \in X$ on définit

$$\phi_x : X^* \rightarrow \mathbb{N} \\ f \rightarrow \phi_x(f) = |f|_x$$

Montrer que ϕ_x est un homomorphisme de monoïde

Exercice 5 même question avec

$$\delta : \{a,b\}^* \rightarrow \mathbb{Z} \\ \delta(\varepsilon) = 0 \\ \text{et, } \forall u \in \{a,b\}^* \\ \delta(a.u) = 1 + \delta(u) \\ \delta(b.u) = \delta(u) - 1$$

Exercice 6 Montrer que si X, Y et Z sont des alphabets,

$$\alpha : X^* \rightarrow Y^*$$

et

$$\beta : Y^* \rightarrow Z^* \text{ des homomorphismes,}$$

alors

$$\beta \circ \alpha : X^* \rightarrow Z^* \text{ est un homomorphisme.}$$

Exercice 7

Soit $X = \{a, b\}$

$$L_1 = \{a^n b^n / n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^{2n} / n \geq 0\}$$

Montrez qu'il existe un homomorphisme ϕ (de X^* dans X^*) tel que $L_2 = \phi(L_1)$

Exercice 8

soient $K, L, M \subset X^*$. Calculer

$$6.1. L \cdot \emptyset$$

$$6.2. \emptyset \cdot L$$

$$6.3. L \cdot \{\varepsilon\}$$

$$6.4. \{\varepsilon\} \cdot L$$

$$6.5. K \cdot (L \cup M)$$

$$6.6. \text{A-t-on de même } K \cdot (L \cap M) = K \cdot L \cap K \cdot M \text{ ???}$$

Exercice 9

Etudier de même la différence et l'image miroir.

Exercice 10 Facteurs gauches

On note $FG(L)$ l'ensemble des facteurs gauches d'un langage L , i.e. :

$$FG(L) = \{u \in X^* / \exists f \in L \wedge \exists v \in X^*, f = uv\}$$

Trouver l'ensemble des facteurs gauches de chacun des langages suivants sur $\{a, b\}$:

$$8.1. L_1 = \{a^n b^n / n \geq 0\}$$

$$8.2. L_2 = \{a^n b^m / 0 \leq n \leq m\}$$

$$8.3. L_3 = \{a^n b^m / 0 \leq m \leq n\}$$

$$8.4. L_4 = \{f \in X^* / |f|_a = |f|_b\}$$

Exercice 11 Conjugaison

Deux mots u, v de X^* sont dits conjugués ssi $\exists g_1, g_2 \in X^*$ tq

$$u = g_1 g_2 \text{ et } v = g_2 g_1$$

Montrez que la conjugaison est une relation d'équivalence.

Exercice 12 Langage résiduel

Soit L un langage sur X et $f \in L$. On appelle résiduel de L par rapport à f et on note

$$f^{-1}L = \{g \in X^* / fg \in L\} \text{ (à ne pas confondre avec l'image réciproque, cf. exercice 2)}$$

$$10.1. \text{Que vaut } \varepsilon^{-1}L \text{ ?}$$

$$10.2. \text{Mq } \forall u, v \in X^*, (uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L)$$

$$10.3. \text{Pour } x \in X, \text{ que valent } x^{-1}(L \cup M), x^{-1}(L \cdot M), x^{-1}(L^*) \text{ ?}$$

$$x^{-1}(L \cdot M) \text{ ?}$$

$$x^{-1}(L^*) \text{ ?}$$