

# Corrigé TD2 - Exercices 5.3 et 7

9 mars 2010

## 1 Exercice 5.3

Lors de la section 5.2, on aura remarquer qu'ajouter 0 en fin d'un mot le multiplie par 2. Il faut remarquer qu'ajouter 1 en fin d'un mot  $w$  à l'effet suivant :  $v(w \cdot 1) = v(w) * 2 + 1$ .

On considère les langages  $L_{0[3]}, L_{1[3]}, L_{2[3]}$ . Alors :

- $v(w) = 3k$  ( $w \in L_{0[3]}$ ) implique
  - $v(w \cdot 0) = 6k$ , donc  $w0 \in L_{0[3]}$
  - $v(w \cdot 1) = 6k + 1$ , donc  $w1 \in L_{1[3]}$
- $v(w) = 3k + 1$  ( $w \in L_{1[3]}$ ) implique
  - $v(w \cdot 0) = 6k + 2$ , donc  $w0 \in L_{1[3]}$
  - $v(w \cdot 1) = 6k + 2 + 1$ , donc  $w1 \in L_{0[3]}$
- $v(w) = 3k + 2$  ( $w \in L_{2[3]}$ ) implique
  - $v(w \cdot 0) = 6k + 4$ , donc  $w0 \in L_{1[3]}$
  - $v(w \cdot 1) = 6k + 4 + 1$ , donc  $w1 \in L_{2[3]}$

On s'intéresse aux langages résiduels de chacun de ces langages vers  $L_{0[3]}$  :

$$L_0 = \{v \in \{0, 1\}^* \mid \text{si } u \in L_{0[3]}, \text{ alors } uv \in L_{0[3]}\}$$

$$L_1 = \{v \in \{0, 1\}^* \mid \text{si } u \in L_{1[3]}, \text{ alors } uv \in L_{0[3]}\}$$

$$L_2 = \{v \in \{0, 1\}^* \mid \text{si } u \in L_{2[3]}, \text{ alors } uv \in L_{0[3]}\}$$

On en déduit donc le système d'équations suivant :

$$L_0 = 0L_0 + 1L_1 + \epsilon$$

$$L_1 = 1L_0 + 0L_2$$

$$L_2 = 1L_2 + 0L_1$$

On applique le lemme de Arden pour résoudre ce système :

$$L_0 = 0^*1L_1 + 0^*$$

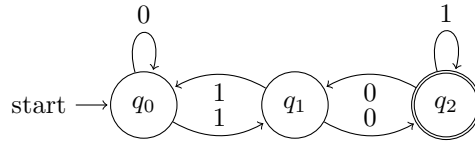
$$L_2 = 1^*0L_1$$

$$L_1 = 1L_0 + 0L_2 = 10^*1L_1 + 10^* + 01^*0L_1 = (10^*1 + 01^*0)L_1 + 10^* = (10^*1 + 01^*0)10^*$$

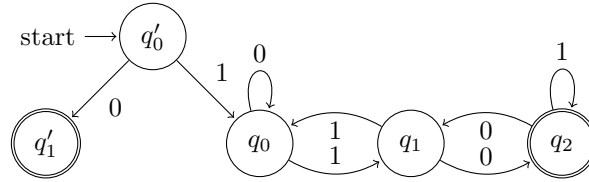
Comme  $L_{[3]} = 0 + 1L_1$ , en remplaçant, on trouve :

$$L_{[3]} = 0 + 1(10^*1 + 01^*0)10^*$$

Des équations, on déduit l'automate suivant qui reconnaît le langage  $L_1$  :



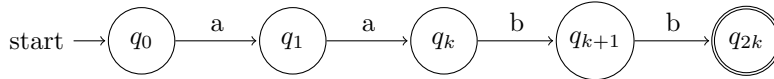
Donc l'automate de  $L_{[3]}$  est le suivant :



## 2 Exercice 7

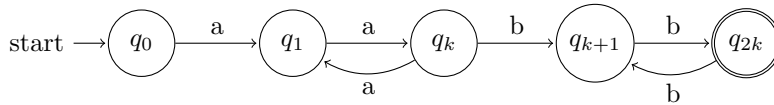
### 2.1 $L_k = \{a^k b^k\}$

Il s'agit d'un langage fini, ne contenant qu'un mot. Or tout langage fini est rationnel.



### 2.2 $L_{kmult} = \{a^{mk} b^{nk} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

On peut trouver une expression rationnelle pour ce langage :  $(a^k)^*(b^k)^*$ . Donc ce langage est bien un langage rationnel.



### 2.3 $L_{fact} = \{a^{n!} \mid n > 0\}$

Idée : ce langage n'est pas rationnel car il est infini, et que calculer la factorielle... c'est compliqué!

Montrons que  $L_{fact}$  ne vérifie pas le lemme de l'étoile. On suppose qu'il le vérifie : alors il existe un entier  $n_{fact}$  tel que tout mot  $w$  de  $L_{fact}$  vérifie l'énoncé du lemme. On choisit un mot  $w = a^{n!}$  tel que  $(n-1)! < n_{fact} < n!$ . D'après l'énoncé du lemme, on peut séparer  $w$  en facteurs :  $w = u_1 u_2 u_3$  tels que :

1.  $|u_2| > 0$ , d'où l'existence d'un entier  $p_2$ , tel que  $u_2 = a^{p_2}$

2.  $|u_1 u_2| \leq n_{fact}$  d'où l'existence d'un entier  $p_1$  tel que  $u_1 = a^{p_1}$

Donc  $w = a^{p_1} a^{p_2} a^{n! - p_2 - p_1}$ . D'après l'énoncé du lemme, pour tout entier  $k$ , il existe un entier  $m$  tel que  $n! + kp_2 = m! = n! \times n + 1 \times \dots \times m$ . En particulier, pour  $k = 1$ , il faut  $p_2 > n!$ , donc  $p_2$  ne peut pas être dans  $w$ .

## 2.4 $L = \{a^n b^m a^n | n, m \in \mathbb{N}\}$

Idée : Non-rationnel car on a besoin de mémoriser le nombre de  $a$ .

Néanmoins ce langage respecte le Lemme de l'étoile : soit un mot  $a^k b^h a^k$  de  $L$ ; on peut le décomposer en  $u_1 u_2 u_3$  tel que  $u_2$  ne contienne que des  $b$ ; dans ce cas, cette séquence de  $b$  peut être répétée et le mot obtenu rester dans la langage.

Pour montrer que ce langage n'est pas rationnel, on utilise alors le Théorème de Myhill-Nerode : en effet :

1.  $a^{-1}L = \{a \cdot b^m a^{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$
2.  $(aa)^{-1}L = \{a^n b^m a^{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$
3. ...

On obtient un infinité de classes d'équivalence dans ce cas.

## 2.5 $L_{pal} = \{w\bar{w} | w \in \{a, b\}^*\}$

Idée : comme pour le langage précédent, on a besoin de mémoriser de l'information

Ce langage vérifie quand même le lemme de l'étoile; en effet, on peut décomposer tout mot de  $L_{pal}$  en  $u_1 u_2 u_3$ , tel que  $u_1 = \bar{u}_3$ . Alors la séquence  $u_2$  peut être itérée et le mot  $u_1 u_2^* u_3$  reste un palindrome.

On utilise donc le théorème de Myhill-Nérode : soit un mot  $w \in \{a, b\}^*$ , alors  $w^{-1}L_{pal} = L_{pal} \cdot \bar{w}$ . En particulier, pour  $w = ab$  :

1.  $(ab)^{-1}L_{pal} = L_{pal} \cdot ba$
2.  $((ab)^2)^{-1}L_{pal} = L_{pal} \cdot (ba)^2$
3. ...
4.  $((ab)^k)^{-1}L_{pal} = L_{pal} \cdot (ba)^k$

Et ces classes d'équivalences sont toutes différentes : en effet  $L_{pal} \cdot (ba)^{k+1} = (L_{pal} \cdot ba)(ba)^k$ ; mais  $L_{pal} \cdot ba \neq L_{pal}$ .