



THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité Informatique

au titre de l'École Doctorale I.C.M.S

Présentée et soutenue publiquement par

Adrien Boussicault

le 2 Décembre 2009

**Action du groupe symétrique sur
certaines fractions rationnelles
suivi de
Puissances paires du Vandermonde**

Sous la direction de :

Jean-Gabriel Luque

Devant le jury composé par:

Rapporteurs : Frédéric Chapoton
Daniel Barsky

Examineurs : Florent Hivert
Thierry Jolicoeur
Alain Lascoux
Jean-Yves Thibon
Jiang Zeng

Directeur de thèse : Jean-Gabriel Luque

Invité : Frédéric Toumazet

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes remerciements et toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Jean-Gabriel Luque qui m'a soutenu et aidé à progresser avec rigueur tout au long de ces trois années de travail.

Je remercie également Alain Lascoux pour m'avoir proposé le problème concernant les fractions rationnelles, objet de la première partie de ce mémoire.

Je remercie les rapporteurs Daniel Barsky et Frédéric Chapoton pour l'intérêt et les corrections apportés à mon travail. J'adresse mes remerciements aux membres du jury, Florent Hivert, Thierry Jolicoeur, Alain Lascoux, Jean-Yves Thibon, Frédéric Toumazet et Jiang Zeng qui ont accepté d'évaluer cette thèse.

Je souhaite particulièrement remercier Frédéric Toumazet avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant la conférence ESCS et dans le cadre du DUT Informatique de l'Université de Marne-la-Vallée.

Je remercie avec amitié Valentin Féray pour tout le travail qu'il a effectué avec moi dans l'élaboration de la première partie de cette thèse. Chacun de ses conseils a représenté une aide précieuse.

Merci à toute l'équipe de combinatoire de l'Institut Gaspard-Monge, Jean-Yves Thibon, Jean-Christophe Novelli et Philippe Biane pour leurs discussions durant les réunions de recherche.

Tous mes sincères remerciements à Florent Hivert et Nicolas Thiéry pour leurs conseils mathématiques et informatiques concernant le logiciel Mupad Combinat et Sage Combinat.

Je tiens à remercier vivement Teresa Gomez-Diaz pour toutes les relectures et corrections méticuleuses de mes articles, transparents et posters.

Je remercie particulièrement Marc Zipstein pour les fructueuses discussions au sujet de la conception d'une librairie graphique destinée aux étudiants. Un chaleureux remerciement pour ses contributions, sa bonne humeur et ses avis éclairés en gastronomie.

Merci à Pierre-André Picon et Jacques Désarménien pour leurs encouragements.

Je remercie également les enseignants de l'IUT de Marne-la-Vallée qui m'ont accueilli au sein de leur équipe.

Je remercie toute l'équipe de l'Université Paris-Nord, Hayat Cheballah, Gérard Duchamp, Laurent Poinot, Goodenough Silviai et Christophe Tollu avec lesquels j'ai pu échanger idées et réflexions lors du séminaire "Combinatoire, Informatique et Physique".

Un grand merci à Line Fonfrède pour sa patience et sa gentillesse.

Merci à l'ensemble du personnel du service Informatique dont j'ai apprécié l'aide et la disponibilité.

Je remercie mes parents ainsi que tous les miens pour leur bienveillant soutien.

Résumé

L'objet de cette thèse concerne les propriétés du groupe symétrique à travers deux problèmes.

Le premier consiste à étudier l'action du groupe symétrique sur la fraction

$$\psi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_{n-1} - x_n)}.$$

En appliquant certaines opérations sur les graphes et les cartes, nous donnons des algorithmes et des formules combinatoires pour déterminer complètement la fraction réduite suivante :

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

où P est un ensemble partiellement ordonné et $\mathcal{L}(P)$ l'ensemble de ses extensions linéaires. L'auteur C. Greene a introduit cette fraction rationnelle pour généraliser des identités liées à la règle de Murnaghan-Nakayama. Nous utilisons Ψ pour établir un nouvel algorithme de décomposition en éléments simples à l'aide des graphes.

Dans la seconde partie, nous cherchons à développer les puissances paires du Vandermonde au moyen de fonctions symétriques. En particulier, nous proposons une écriture hyperdéterminantale des coefficients du développement des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur. Nous obtenons plusieurs identités reliant les puissances paires du Vandermonde et les polynômes de Jack. Puis nous introduisons une q -déformation des puissances paires du Vandermonde que nous exprimons grâce aux polynômes de Macdonald.

Abstract

The main purpose of this document is the symmetric group. In particular, we study the two following problems :

First, the symmetric group acts naturally on the rational function

$$\psi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_{n-1} - x_n)},$$

by permuting the variables. With the help of some operations on the graphs, we give algorithms and combinatorial formulas allowing us to compute the reduced fraction

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

where P is a partially ordered set and $\mathcal{L}(P)$ is the set of the linear extensions of P . The author C. Greene has introduced these rational functions in the aim to generalize some identities related to the Murnaghan-Nakayama rules. We use these properties to give an original algorithm to perform partial decompositions of fractions with the help of graphs.

In the second problem, we study the expansion of the even powers of the Vandermonde in several basis of symmetric functions. In this part, we give identities between symmetric functions and hyperdeterminants and we use them to obtain an hyperdeterminantal expression of the coefficients in Schur's basis. We investigate also the relation between the even powers of the Vandermonde and Jack's functions. Finally, we introduce a q -déformation of the even powers of the Vandermonde and we relate it to some specialisations of Macdonald's polynomials.

Table des matières

Introduction	15
I Sur certaines fractions rationnelles indexées par les graphes	17
1 Introduction	19
2 Ensemble ordonné, graphes et cartes	21
2.1 Posets, diagrammes de Hasse et extensions linéaires	21
2.2 Les graphes	23
2.3 Prolongement de la définition du diagramme de Hasse et des extensions linéaires pour les graphes	24
2.4 Intervalles du permuttoèdre et extensions linéaires des graphes	25
2.5 Cartes enracinées	26
3 Quelques outils sur les graphes	29
3.1 Suppression d'arêtes et de sommets	29
3.2 Contraction	30
3.3 Linéarisation partielle	34
3.4 Décontraction	35
3.5 Poinçonnage de Féray	36
4 Propriétés générales des fonctions de Greene	39
4.1 Les fonctions de Greene	39
4.2 Application des outils aux fonctions de Greene	40
4.3 Connexité et nullité de la fraction réduite	44
4.4 Calcul du dénominateur	45
4.5 Algorithme pour le calcul du numérateur	47
4.6 Formule combinatoire pour le numérateur N	49
4.7 Quelques calculs explicites de numérateurs	55
5 Factorisation du numérateur	67
5.1 Factorisation par chaîne	67
5.2 Factorisations complètes des posets planaires	71
5.3 Chaînes et fonction de Möbius	73

6	Application de la fonction de Greene à la décomposition en éléments simples	79
7	Conclusion	85
II	Puissances paires du Vandermonde	87
8	Introduction	89
9	Les partitions admissibles	91
9.1	Développement des puissances paires du Vandermonde sur la base des fonctions de Schur	91
9.2	Définition des partitions admissibles	93
9.3	Série génératrice des partitions admissibles	94
10	Expression hyperdéterminantale des coefficients dans le développement de Δ^{2k} sur les fonctions de Schur	97
10.1	Hyperdéterminants de Hankel	97
10.2	Hyperdéterminants et intégrales	98
10.3	Algorithme pour obtenir les coefficients	99
10.4	Conséquences	107
11	Polynômes de Jack rectangles et hyperdéterminants de Hankel	109
11.1	Les polynômes de Jack	109
11.2	La substitution $x^n \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{Y})$	110
11.3	Polynômes de Jack quasi-rectangles et hyperdéterminants	112
11.4	Puissances paires du Vandermonde et polynômes de Jack rectangles sur l'alphabet $-\mathbb{X}$	114
11.5	Polynômes de Jack gauches	116
11.6	L'opérateur $\int_{\mathbb{Y}}$ et les fonctions symétriques de Jack gauches	117
12	Une q-déformation des puissances paires du Vandermonde : les puissances polarisées du q-discriminant	119
12.1	Polynômes et opérateur de Macdonald	120
12.2	Polynômes de Macdonald escaliers et q -discriminant	121
12.3	Puissances paires du Vandermonde et polynômes de Jack escaliers	123
12.4	Partitions admissibles et q -discriminant	123
13	Conclusion	127
	Annexe : Développements de produits à l'aide de graphes	129
A.1	Interprétation combinatoire du développement de $\prod (p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j)$	129
A.2	Preuve combinatoire de l'identité du Vandermonde	134

Table des figures

2.1	Un poset représenté par un graphe	22
2.2	Exemple de poset	22
2.3	Diagramme de Hasse d'un poset	22
2.4	Exemple de chaîne et de cycle	23
2.5	Le graphe de permutation \mathbb{G}_{1324}	25
2.6	Le graphe de permutation $\mathbb{G}_{215736498}$	25
2.7	Exemple de 4 cartes différentes	26
3.1	G' est le graphe induit par G sur $\{1, 2, 3\}$	29
3.2	Suppression du puits 4	30
3.3	Exemple de contraction	31
3.4	Exemple d'émondage élémentaire	31
3.5	Exemple de sommet libre (le sommet 0)	32
3.6	Le graphe G et $G/(4, 5)$, leurs diagrammes de Hasse associés et leurs extensions linéaires	33
3.7	Linéarisation partielle G'	34
3.8	Un graphe G et un graphe induit G'	35
3.9	Le graphe G est la contraction du graphe biparti \overline{G}	35
3.10	Exemple d'application du théorème 3.5.1	37
4.1	Exemple de graphe	40
4.2	Décontraction de G	43
4.3	Le graphe \mathbb{G}_{2143} n'est pas planaire	44
4.4	Le graphe \mathbb{G}_{1324} est planaire	44
4.5	Numérateur et dénominateur de la fraction réduite $\Psi_{\mathbb{G}_{132546}}$	46
4.6	Contraction et numérateur	48
4.7	Les différents cas de la preuve de la proposition 4.5.3	49
4.8	Exemple de carte enracinée M possédant un cycle admissible de type 1	50
4.9	Une carte enracinée générique M sans cycle admissible de type 1	51
4.10	Exemple de carte enracinée M' possédant un cycle admissible de type 2	51
4.11	Tour d'un arbre recouvrant associé à une carte	53
4.12	Graphe à 1 cycle	57
4.13	Exemple de graphe G ayant pour nombre cyclomatique 2	57
4.14	Le graphe 54331-complet	59
4.15	Le graphe G^{β^1} pour $\lambda = 54331$ ($\beta^1 = 4433$)	60

4.16	Linéarisation partielle du graphe induit par a_1 et a_2 dans le graphe β^1 -complet, où $\lambda = 54331$ ($\beta^1 = 4433$)	61
4.17	Numérotation d'une partition	62
4.18	Construction de la permutation σ_{554221}	62
4.19	Graphes de partition et de permutation	63
5.1	Exemple de factorisation du numérateur	67
5.2	Un graphe G avec une chaîne c , les composantes G_i de $G \setminus c$ et les régions correspondantes $\overline{G_i}$	68
5.3	Illustration de la preuve du théorème 5.1.1 (factorisation par chaîne)	69
5.4	Bon choix de cycle	69
5.5	Un diamant	71
5.6	Un poset non planaire pour lequel la formule de Greene reste vraie	73
5.7	Cas 1 : $i \notin V_c$ et j n'est pas dans la même région que i	74
5.8	Cas 2 : $i \notin V_c$ et j est dans la même région que i	75
5.9	Cas 3 : $i \in V_c$ et $j \notin V_c$	75
5.10	Cas 4 : i et j appartiennent à V_c	76
5.11	Un exemple de factorisation non expliqué par le théorème 5.1.1	77
7.1	Un exemple de factorisation non expliqué par le théorème 5.1.1	85
9.1	Ordre de dominance	95
A.1	Exemple de graphe associé à un produit	130
A.2	Graphes orientés ayant le même monôme	133
A.3	Graphe K_4 dans lesquels se trouvent tous les cycles de taille 3 susceptibles d'apparaître ou de disparaître en inversant le circuit $(1, 2, 3)$	136

Introduction

L'objet central de ce mémoire est le groupe symétrique que nous avons analysé à travers deux problèmes :

- l'étude de son action naturelle sur la fraction rationnelle

$$\psi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{n-1} - x_n)},$$

- le développement des puissances paires du Vandermonde

$$\Delta^{2K} = \left(\prod_{i \leq j} (x_i - x_j) \right)^{2k}$$

dans différentes bases des polynômes symétriques.

La première partie traite plus particulièrement de la somme

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

où P est un ensemble partiellement ordonné et $\mathcal{L}(P)$ l'ensemble des extensions linéaires de P .

L'auteur C. Greene introduit cette fraction rationnelle (article [23]) pour généraliser des identités liées à la règle de Murnaghan-Nakayama.

Dans ce document, nous étendons la définition de Ψ pour les graphes. Cette description donne lieu à un développement important sur les graphes orientés, les cartes et de nombreuses transformations comme le poinçonnage de Féray. En appliquant ces outils, nous obtenons des algorithmes et des formules combinatoires qui déterminent le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite de Ψ . Enfin, nous utilisons le formalisme de Ψ pour mettre au point un algorithme original de décomposition en éléments simples à partir des graphes.

La seconde partie décrit les puissances paires de Vandermonde dans différentes bases de polynômes symétriques comme les fonctions de Schur et les polynômes de Jack.

Cette question est apparue en physique pour étudier la théorie de l'effet de Hall fractionnaire quantique (voir [36]). D'après l'article [17] de P. Di Francesco et al., l'expression des fonctions d'onde de Laughlin au moyen des fonctions d'onde de Slatter est équivalente au développement de Δ^{2k} dans les fonctions de Schur.

Sur ce thème, nous approfondissons plus particulièrement les relations qui existent entre fonctions symétriques et hyperdéterminants. Nous utilisons pour cela de nombreux outils comme les produits scalaires, les séries génératrices, les substitutions et différents opérateurs qui symétrisent les polynômes. Ce travail établit une formule hyperdéterminantale des coefficients de Δ^{2k} dans la base des fonctions de Schur. Nous donnons une identité reliant les puissances paires du Vandermonde et les polynômes de Jack rectangles sur l'alphabet $-\mathbb{X}$. En dernier lieu, avec l'utilisation d'une q -déformation de Δ^{2k} , nous proposons une écriture de Δ^{2k} à l'aide des polynômes de Jack escaliers.

Première partie

Sur certaines fractions rationnelles indexées par les graphes

1

Introduction

Ce chapitre analyse les propriétés de la fraction rationnelle

$$\psi_{12\dots n} := \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_{n-1} - x_n)}.$$

Plus particulièrement, pour toute permutation σ , nous avons caractérisé les sommes :

$$\Psi_{[id, \sigma]} := \sum_{w \in [id, \sigma]} \psi_w,$$

où $[id, \sigma]$ est un intervalle du permutoèdre pour l'ordre faible de Bruhat.

En effet, bien qu'aucun lien n'ait pour l'instant été trouvé, il semblerait qu'il existe des similitudes entre certaines familles de variétés de Schubert et cette fraction rationnelle. Par exemple, lorsque σ évite les motifs 1324 et $\overline{2143}$, la fraction Ψ se simplifie complètement et s'exprime comme un produit de termes du type $(x_i - x_j)^{-1}$. Étonnamment, ces mots apparaissent en géométrie, identifiant certaines familles de variétés de Schubert. Les variétés de Schubert sont indexées par des permutations et celles qui sont non singulières sont indexées par des permutations qui évitent les motifs 1324 et 2143.

En fait, la fraction $\Psi_{[id, \sigma]}$ peut être étendue sur les posets P en définissant Ψ_P de la façon suivante :

$$\Psi_P := \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

où $\mathcal{L}(P)$ désigne les extensions linéaires du poset P considérées comme des mots w .

Dans ce nouveau formalisme, les intervalles du permutoèdre deviennent des familles d'extensions linéaires de posets particuliers. Ainsi, d'après l'article [5] de S. Butler et M. Bousquet-Mélou, les intervalles $[id, \sigma]$ où σ évite les motifs 1324 et $\overline{2143}$ sont les familles d'extensions linéaires des posets pour lesquelles le diagramme de Hasse correspondant est acyclique.

La fonction Ψ_P a originellement été considérée par C. Greene [23]. Il voulait généraliser une identité rationnelle liée à la règle de Murnaghan-Nakayama pour les caractères irréductibles du groupe symétrique. Dans son article, C. Greene énonce une formule close de Ψ lorsque les posets sont planaires :

$$\Psi_P = \begin{cases} 0 & \text{si } P \text{ est un graphe non connexe,} \\ \prod_{i,j \in P} (x_i - x_j)^{\mu_P(i,j)} & \text{si } P \text{ est un graphe connexe.} \end{cases}$$

La formule explique le résultat obtenu pour les fractions des posets lorsque le diagramme de Hasse est acyclique, mais ne donne aucune interprétation de Ψ dans le cas général.

Cette partie de notre travail décrit intégralement la fraction Ψ_P pour n'importe quel poset P .

Préalablement, au chapitre 2, nous élargissons la définition de la fonction Ψ à l'ensemble des graphes orientés et des cartes, en définissant les extensions linéaires qui se rapportent à ces objets.

Il existe de nombreuses transformations dans les graphes orientés qui induisent des identités sur leurs extensions linéaires. Dans le chapitre 3, nous présentons la suppression d'arêtes et de sommets, la contraction, la linéarisation partielle, la décontraction et le poinçonnage de Féray. Contrairement aux quatre autres, le poinçonnage est le seul à conserver la structure interne du diagramme de Hasse d'un graphe. Il ne fait pas apparaître de graphes autres que les sous-graphes du graphe initial. Étant donné que Ψ_G est fortement lié au diagramme de Hasse de G , cette propriété explique le rôle fondamental du poinçonnage Féray dans l'étude de Ψ .

Le chapitre 4 met en oeuvre les transformations précédentes afin de déterminer, d'une part, des algorithmes de calcul récursif pour Ψ et son numérateur, d'autre part, des formules combinatoires pour le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite de Ψ . La détermination du numérateur fait intervenir le poinçonnage et la notion de carte qui lui est associée (voir [15]).

Le chapitre 5 introduit un outil, la factorisation par chaîne, qui énonce une condition de factorisation du numérateur de Ψ_G . La factorisation par chaîne ne suffit pas à déterminer tous les numérateurs qui se factorisent, mais elle permet de redémontrer et d'étendre la formule de Greene à une classe de graphes plus grande. Cette propriété supprime ainsi le caractère géométrique qui apparaît dans le théorème de Greene présenté ci-dessus.

Enfin, dans le chapitre 6, nous appliquons la fonction de Greene à la décomposition en éléments simples. Nous donnons ainsi un algorithme original de décomposition en éléments simples à l'aide de graphes.

2

Ensemble ordonné, graphes et cartes

Nous avons vu en introduction que la fraction de Greene est définie sur les posets. Cependant, il s'avère plus simple de l'utiliser dans un contexte de graphes.

La notion de graphe permet de représenter les posets de façon naturelle. En effet, l'ensemble des posets peut être considéré comme un sous-ensemble des graphes orientés sans circuits.

Le présent chapitre définit les objets et notations concernant les graphes et les posets que nous utilisons dans cette partie de notre étude.

2.1 Posets, diagrammes de Hasse et extensions linéaires

Ici nous détaillons les différentes notations se référant aux posets.

Un **ensemble partiellement ordonné** (poset) P est un ensemble muni d'une opération binaire \leq vérifiant :

- pour tout élément x de P , $x \leq x$ (**réflexivité**),
- si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (**antisymétrie**),
- si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ (**transitivité**).

On appelle **support** d'un poset, l'ensemble des éléments du poset. De même, on appelle **relation d'ordre** tout couple (x, y) de P tel que $x \leq y$. Dans un poset, on dit que deux éléments x et y sont **comparables** si et seulement si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Par exemple, 1 et 2 sont comparables dans le poset $\{1, 2, 3, 4\}$ muni de la relation d'ordre $\{(1, 3), (1, 2), (3, 4), (2, 4), (1, 4)\}$. Toutefois, 2 et 3 ne sont pas comparables.

Généralement, on représente les posets à l'aide de graphes orientés. Les éléments des posets sont alors les sommets des graphes orientés et les relations d'ordre sont leurs arêtes.

Dans un souci de clarté, nous dessinons les posets de sorte que si $x \leq y$ alors x est à gauche de y dans le dessin. Ainsi, le poset de l'exemple précédent est dessiné dans la figure 2.1.

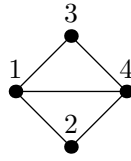


FIG. 2.1 – Un poset représenté par un graphe

On dit que y **couvre** x si $x \leq y$ et s'il n'existe pas d'élément z qui vérifie $x \leq z \leq y$ avec $z \neq x, y$. On note la **relation de couverture** \preceq . Par exemple, dans le poset de la figure 2.1, $1 \preceq 3$ mais $1 \not\preceq 4$.

Un **ordre total** est un poset dont tous les éléments sont comparables deux à deux.

Un ordre total peut être représenté par un **mot** sans répétition de lettres. En effet, les lettres de l'alphabet sont les éléments de P et, si $a \leq b$ alors a est à gauche de b dans le mot.

Soient P_1 et P_2 deux posets ayant le même support et des relations d'ordre distinctes. On dit que P_1 est **compatible** avec P_2 si les relations d'ordre de P_2 sont incluses dans celles de P_1 .

Une **extension linéaire** d'un ensemble partiellement ordonné P est un ordre total compatible avec P . On note $\mathcal{L}(P)$ l'ensemble des extensions linéaires de P .

Par exemple, les extensions linéaires du poset $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ muni de la relation d'ordre $\{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (1, 4), (2, 5)\}$ (voir figure 2.2) sont les mots 12345, 21345, 12354, 21354.

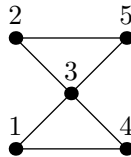


FIG. 2.2 – Exemple de poset

Le **diagramme de Hasse** d'un poset P est le graphe dont les sommets sont les éléments du poset P et dont les arêtes sont les relations de couverture. On notera $\mathcal{H}(P)$ le diagramme de Hasse associé au poset P .

Par exemple, le diagramme de Hasse du poset $\{1, 2, 3, 4\}$ muni de la relation d'ordre $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4), (2, 4)\}$ est dessiné sur la figure 2.3.

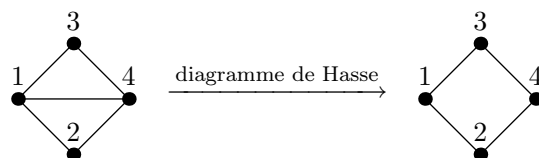


FIG. 2.3 – Diagramme de Hasse d'un poset

2.2 Les graphes

Le livre [12] présente de nombreux types de graphes. Notre étude concerne uniquement les graphes orientés finis.

Un **graphe orienté** est constitué par :

- un ensemble fini de **sommets** V_G ,
- un ensemble fini d'**arêtes** E_G vérifiant $E_G \subset V_G \times V_G$.

Si e est une arête de E_G , on note par $\alpha(e)$ la première composante de e (appelée **origine** de e) et $\omega(e)$ la seconde composante (appelée **fin** de e).

Dans cette définition, chaque arête possède une **orientation**. Soit $e = (v_1, v_2)$ une arête de $V_G \times V_G$. On note par \bar{e} la paire (v_2, v_1) .

Il est pratique de définir quatre notions de parcours du graphe.

Plus précisément, soit G un graphe et E un ensemble d'arêtes.

Une **chaîne** est une suite d'arêtes $c = (e_1, \dots, e_k)$ de G telle que $\omega(e_1) = \alpha(e_2)$, $\omega(e_2) = \alpha(e_3)$, \dots et $\omega(e_{k-1}) = \alpha(e_k)$.

Un **circuit** est une chaîne (e_1, \dots, e_k) de G telle que $\omega(e_k) = \alpha(e_1)$.

Un **chemin** est une séquence (e_1, \dots, e_h) d'éléments de $E \cup \bar{E}$ telle que $\omega(e_1) = \alpha(e_2)$, $\omega(e_2) = \alpha(e_3)$, \dots et $\omega(e_{h-1}) = \alpha(e_h)$.

Un **cycle** C est un chemin tel que $\omega(e_k) = \alpha(e_1)$. Si C est un cycle, alors nous notons par $HE(C)$ l'ensemble $C \cap E$.

Cycles et circuits (resp. chemins et chaînes) constituent deux objets différents. Dans un circuit, toutes les arêtes se trouvent dans le graphe de départ ce qui n'est pas le cas pour un cycle quelconque. Dans cette situation, un circuit est un cycle qui vérifie la propriété $HE(C) = C$.

On appelle **source** (resp. **puits**) tout sommet du graphe qui n'est la fin (resp. le début) d'aucune arête. Un **sommet extrémal** est une source ou un puits. L'ensemble des sommets extrémaux se note $Extr(G)$. De même, un **sommet intérieur** est un sommet qui n'est ni une source, ni un puits du graphe. L'ensemble des sommets intérieurs du graphe est noté $In(G)$.

Pour faciliter la lecture des figures, les sommets d'une arête e sont dessinés de façon à ce que $\alpha(e)$ soit toujours à gauche de $\omega(e)$. Une telle construction n'est pas possible si le graphe possède un circuit. Cependant, nous nous intéressons principalement aux graphes sans circuit.

Un exemple de graphe est dessiné dans la figure 2.4. Dans le graphe de gauche, les arêtes qui ne sont pas en pointillés forment une chaîne c . Dans le graphe de droite, elles forment un cycle. $HE(C)$ contient alors 3 arêtes : $(1, 6)$, $(6, 8)$ et $(5, 7)$.

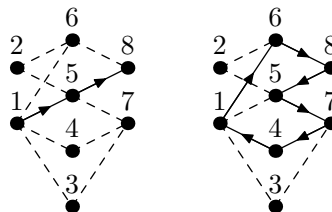


FIG. 2.4 – Exemple de chaîne et de cycle

Le **nombre cyclomatique** d'un graphe G est $|E_G| - |V_G| + c_G$, où c_G est le nombre de composantes connexes de G . Par exemple, le graphe de la figure 2.4 possède un nombre cyclomatique égal à $4 = 11 - 8 + 1$.

Si un graphe contient un cycle alors son nombre cyclomatique est différent de 0 (voir [12]). Si le graphe est sans cycle, il est appelé **forêt** et son nombre cyclomatique est égal au nombre de ses composantes connexes moins 1. Ainsi, un graphe connexe et sans cycle est par définition un **arbre** et son nombre cyclomatique vaut 0.

Il est à noter qu'il n'y a pas de règle d'orientation pour les arêtes d'un arbre. Généralement, un arbre orienté possède toutes les arêtes orientées de la racine aux feuilles. Dans ce document, nous ne considérerons pas ce genre d'objet.

2.3 Prolongement de la définition du diagramme de Hasse et des extensions linéaires pour les graphes

Soit G un graphe, il est possible de munir l'ensemble des sommets V_G de la relation suivante :

$$xRy \stackrel{\text{def}}{\iff} \left(x = y \text{ ou } \exists e \in E_G \text{ tel que } \begin{cases} \alpha(e) = x \\ \omega(e) = y \end{cases} \right).$$

Si le graphe n'a pas de circuit, la clôture transitive \leq de la relation d'ordre précédente est antisymétrique et transforme l'ensemble V_G en un poset que nous noterons $\text{poset}(G)$.

L'application poset n'est pas injective. Si on regarde l'antécédent par poset d'un poset donné P , il existe un unique graphe minimum (pour le nombre d'arêtes). Ce graphe minimum est exactement le **diagramme de Hasse** de P défini à la section 2.1.

La définition des extensions linéaires données au paragraphe 2.1 peut être formulée à l'aide des graphes. Une **extension linéaire** d'un graphe G est un ordre total \leq_w sur l'ensemble des sommets V_G tel que, pour chaque arête de G , on ait $\alpha(e) \leq_w \omega(e)$.

L'ensemble des extensions linéaires de G est noté $\mathcal{L}(G)$. On peut aussi définir la somme formelle $\varphi(G)$ par $\varphi(G) = \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} w$.

Si G contient un circuit, alors il ne possède pas d'extensions linéaires. Si G ne possède pas de circuit, les extensions linéaires de G sont exactement les extensions linéaires de $\text{poset}(G)$.

Le lemme suivant est une conséquence des définitions précédentes :

Lemme 2.3.1. *Soient G et G' deux graphes possédant le même ensemble de sommets. Alors,*

$$E(G) \subset E(G') \text{ et } w \in \mathcal{L}(G') \implies w \in \mathcal{L}(G),$$

$$w \in \mathcal{L}(G) \text{ et } w \in \mathcal{L}(G') \iff w \in \mathcal{L}(G \vee G'),$$

où $G \vee G'$ est défini par $\begin{cases} V(G \vee G') = V(G) = V(G'), \\ E(G \vee G') = E(G) \cup E(G'). \end{cases}$

2.4 Intervalles du permutoèdre et extensions linéaires des graphes

Dans ce paragraphe, nous précisons le lien entre les intervalles du permutoèdre et les extensions linéaires des graphes.

Soit $[\sigma, \tau]$ l'intervalle de plus petit élément σ et de plus grand élément τ pour l'ordre faible de Bruhat.

Par exemple,

$$[123456, 132564] = \{132564, 123564, 132546, 123546, 132456, 123456\}.$$

Pour toute permutation σ de \mathfrak{S}_n , on associe le graphe \mathbb{G}_σ , appelé **graphe de permutation** σ , qui est le diagramme de Hasse du graphe $\mathbb{G}_\sigma^{poset}$ défini par :

- l'ensemble de sommets $V_{\mathbb{G}_\sigma^{poset}} = \{1, \dots, n\}$,
- l'ensemble des arêtes $E_{\mathbb{G}_\sigma^{poset}} = \{(i, j) | i < j \text{ et } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)\}$.

La figure 2.5 présente les graphes $\mathbb{G}_{1324}^{poset}$ et \mathbb{G}_{1324} .

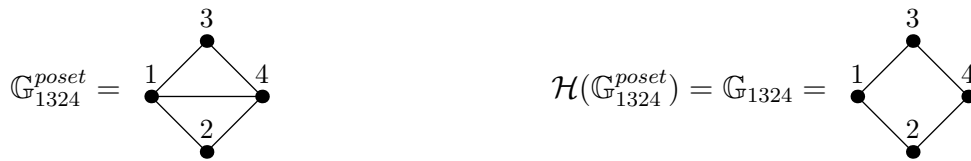


FIG. 2.5 – Le graphe de permutation \mathbb{G}_{1324}

Un algorithme simple pour construire un graphe de permutation consiste à lire les lettres de G de la droite vers la gauche. Si les valeurs des lettres lues croissent, nous dessinons les sommets verticalement sur la même ligne. Si les valeurs décroissent, nous ajoutons les sommets de la droite vers la gauche. Enfin, nous dessinons les arêtes entre deux sommets $i < j$ si i est à gauche de j et s'il n'existe pas de sommet k vérifiant les deux conditions suivantes :

- $i < k < j$ et
- k se situe à droite de i et à gauche de j .

La figure 2.6 montre le résultat de cet algorithme appliqué à la permutation 215736498.

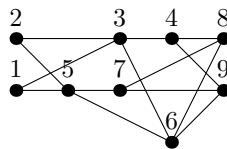


FIG. 2.6 – Le graphe de permutation $\mathbb{G}_{215736498}$

La propriété suivante indique que l'ensemble constitué des $\mathfrak{L}(G)$ associés à tous les graphes contient tous les intervalles du permutoèdre.

Proposition 2.4.1. *Soit σ une permutation, alors*

$$\mathcal{L}(\mathbb{G}_\sigma) = [id, \sigma].$$

Démonstration. L'intervalle $[id, \sigma]$ est l'ensemble des permutations qui sont plus petites que σ pour l'ordre de Bruhat. Il s'agit de l'ensemble des permutations τ de \mathfrak{S}_n tel que les sous-mots croissants de taille 2 de σ sont des sous-mots de τ .

D'autre part, les extensions linéaires de \mathbb{G}_σ sont les mots τ' tels que pour toute arête (i, j) de \mathbb{G}_σ (ce qui, par définition, implique que $i < j$ et $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$) nous avons $\tau'(i) \leq \tau'(j)$.

La définition de τ' est équivalente à celle de τ . \square

Il est à noter que la réciproque de ce théorème est fautive, les extensions linéaires des graphes ne sont pas toujours des intervalles.

Dans l'article [5], S. Butler et M. Bousquet-Mélou ont montré que les graphes des permutations évitant les motifs 1324 et $\overline{2143}$ sont exactement des arbres. Nous verrons ultérieurement que les fractions rationnelles associées aux arbres possèdent des expressions simples.

2.5 Cartes enracinées

Une **carte** est un graphe connexe tel que pour tout sommet v de G , l'ensemble des arêtes d'origine ou de fin v est muni d'un ordre cyclique.

Cette définition est naturelle quand le graphe est dessiné sur le plan (voir par exemple [43]). La figure 2.7 donne un exemple de quatre cartes différentes possédant le même graphe sous-jacent.

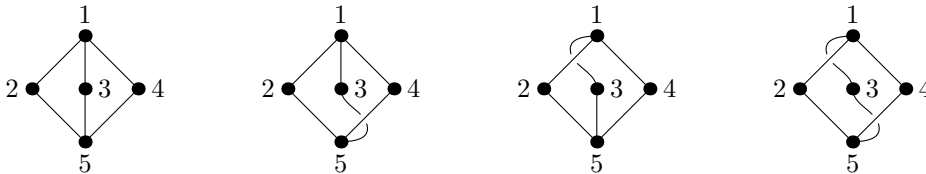


FIG. 2.7 – Exemple de 4 cartes différentes

Lorsque nous travaillons avec les cartes, il est plus facile de considérer les arêtes comme des couples de deux **demi-arêtes** (h_1, h_2) , la première est d'extrémité $\alpha(e)$ et la seconde d'extrémité $\omega(e)$. Ainsi, la structure de carte est donnée par une permutation σ sur toutes les demi-arêtes, dont les orbites correspondent à l'ensemble des demi-arêtes de même extrémité.

On appelle **demi-arête extérieure** une demi-arête qui n'appartient à aucune arête, mais qui possède une extrémité et une place dans l'ordre cyclique associé à cette extrémité.

Une **carte enracinée** est une carte qui possède une et une seule demi-arête extérieure. Cette arête est notée h_0 et son sommet \star .

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'ensemble des posets constitue un sous-ensemble de graphes.

Nous avons élargi la définition des extensions linéaires aux graphes et introduit la notion de carte.

Il est maintenant possible de définir des opérations (chapitre 3) ainsi qu'une nouvelle définition de Ψ (chapitre 4) pour les graphes.

3

Quelques outils sur les graphes

Dans le chapitre 4 nous ferons le lien entre la fraction Ψ et les graphes. Pour étudier cette fraction il est nécessaire de définir quelques opérations sur les graphes. Les pages qui suivent présentent la suppression de sommets, la contraction, la linéarisation partielle, la décontraction et le poinçonnage de Féray. L'opération la plus importante est le poinçonnage de Féray. Nous verrons ultérieurement que cette opération permet de caractériser complètement Ψ .

3.1 Suppression d'arêtes et de sommets

Le principal outil de cette étude est la suppression d'arêtes dans un graphe G .

Soit G un graphe et E un sous-ensemble des arêtes E_G de G . On appelle **suppression** des arêtes de E l'opération qui associe au graphe G le graphe G' tel que

- les sommets sont ceux de G ,
- les arêtes sont $E_{G'} = E_G \setminus E$.

Nous noterons $G - E$ le résultat.

Si G est un graphe et V' un sous-ensemble des sommets V de G , on appelle **graphe induit** par G sur V' le graphe de sommets V' dont les arêtes sont celles de G ayant les deux extrémités appartenant à V' .

La figure 3.1 présente un exemple de graphe induit.

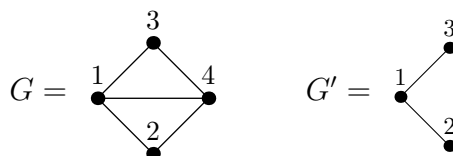


FIG. 3.1 – G' est le graphe induit par G sur $\{1, 2, 3\}$

Soit G un graphe, V' un sous-ensemble des sommets de G et V'' le complémentaire de V' à V_G , alors la **suppression** de V' à G est le graphe induit sur V'' . Le graphe obtenu est noté $G - V'$.

Un cas particulier consiste à supprimer 1 source ou 1 puits d'un graphe. Nous verrons dans le prochain chapitre que cela joue un rôle particulier dans les fractions rationnelles. Cette particularité s'explique par la propriété suivante :

Proposition 3.1.1. *Soit c une source (resp. un puits) d'un graphe G et w un mot d'alphabet V_G . Alors, cw (resp. wc) est une extension linéaire de G si et seulement si w est une extension linéaire de $G \setminus \{c\}$.*

Démonstration. Supposons que cw soit une extension linéaire de G et a, b deux sommets de $G - \{c\}$. S'il existe une chaîne d'origine a et de fin b dans $G \setminus \{c\}$ alors cette chaîne existe dans G . Cela implique que a est à gauche de b dans les extensions linéaires w de $\mathcal{L}(G \setminus (\{c\}))$.

Réciproquement, supposons que w soit une extension linéaire de $G \setminus \{c\}$. Soient a et b deux éléments de G tels qu'il existe une chaîne c d'origine a et de fin b dans G . Si $a \neq c$, alors, comme c est une source, c n'est pas le sommet de la chaîne. Ainsi, il existe une chaîne d'origine a et de fin b dans $G \setminus \{c\}$. Nous en déduisons donc que a est à gauche de b dans w . Si $a = c$, alors trivialement a est à gauche de b dans cw . Nous pouvons conclure que $cw \in \mathcal{L}(G)$. □

Par exemple, le sommet 4 du graphe G de la figure 3.2 est un puits et peut être supprimé. Les extensions linéaires de $G \setminus 4$ sont

$$\mathcal{L}(G \setminus 4) = \{123, 213\}$$

et l'ensemble obtenu après sélection des mots de $\mathcal{L}(G)$ de lettre terminale 4 est en bijection avec $\mathcal{L}(G \setminus 4)$:

$$\{w'4 \in \mathcal{L}(G)\} = \{1234, 2134\}$$

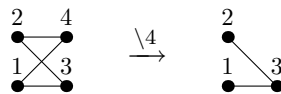


FIG. 3.2 – Suppression du puits 4

3.2 Contraction

Soit G un graphe et e une arête de G . La **contraction** de l'arête e est l'opération qui envoie le graphe G sur le graphe G' obtenu à partir de $G - e$ en remplaçant les sommets $\alpha(e)$ et $\omega(e)$ par un unique sommet v . Généralement, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous choisissons de remplacer v par $\alpha(e)$ ou par $\omega(e)$. On notera cette opération G/e .

Ainsi, si $G = \mathcal{H}(G)$ et si $\alpha(e)$ est différent de $\omega(e)$ alors G/e possède le même nombre cyclomatique que G . À cause de la définition des graphes choisie au chapitre 2, cette propriété

devient fausse lorsque $G \neq \mathcal{H}(G)$. En effet, nos graphes sont à arêtes simples et non à arêtes multiples. Dans le cas des graphes à arêtes multiples, la contraction préserve le nombre cyclomatique des graphes.

La définition de **graphes à arêtes multiples** est obtenue en spécifiant un ensemble de sommets, un ensemble d'arêtes et une relation d'adjacence qui est une application potentiellement surjective de l'ensemble des arêtes dans les couples de sommets. Dans le cas des graphes à arêtes simples, cette application est injective, et permet de confondre l'ensemble des arêtes et son image par l'application d'adjacence. L'utilisation des graphes à arêtes simples simplifie considérablement l'ensemble des notations et des preuves de ce document tout en n'altérant pas les résultats obtenus pour Ψ . De fait, nous verrons dans le chapitre 4 que $\Psi_G = \Psi_{\mathcal{H}(G)}$.

Par contre, le choix de cette définition a une incidence sur l'objet $N(G)$ que nous présenterons dans le chapitre 4. Il dépend à la fois des extensions linéaires de G et de ses arêtes ($N(G) \neq N(\mathcal{H}(G))$). Ainsi, lorsque nous étudions $N(G)$, le meilleur choix de définition pour les graphes est celui des graphes à arêtes multiples.

Un exemple de contraction est présenté à la figure 3.3.

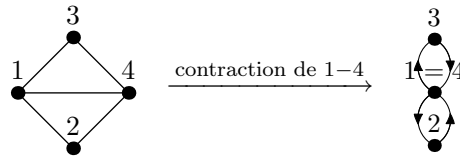


FIG. 3.3 – Exemple de contraction

On appelle **émondage élémentaire** toute contraction d'arête e telle que $\alpha(e)$ ou $\omega(e)$ appartiennent à une et une seule arête.

La figure 3.4 montre un exemple d'émondage élémentaire.

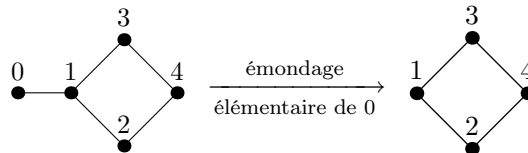


FIG. 3.4 – Exemple d'émondage élémentaire

Le nombre de composantes connexes de G et le nombre cyclomatique restent invariants quel que soit l'émondage élémentaire effectué.

Lorsqu'un sommet est le sommet d'une unique arête, on dit que le sommet est **libre** (voir figure 3.5).

Un **émondage** est une séquence d'émondages élémentaires. Nous noterons $\text{Emond}(G)$ l'unique maximal sous-graphe de G sans sommets libres.

Proposition 3.2.1. *Soit G un graphe sans circuit et $e = (c, d)$ une arête de G . G/e est sans circuit si et seulement si e est l'unique chaîne de G ayant c pour origine et d pour fin.*

Démonstration. Nous allons démontrer cette propriété avec un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un circuit C de G/e . Admettons que v (le sommet qui a remplacé c et

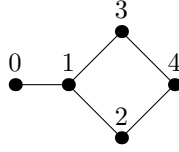


FIG. 3.5 – Exemple de sommet libre (le sommet 0)

d durant la contraction de e) ne soit ni la fin ni l'origine d'une arête de C , alors C est aussi un circuit de G , ce qui est en contradiction avec le contexte de la proposition. Admettons maintenant que v est le sommet d'une arête de $C = ((v, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k))$. Par construction de G/e nous savons que l'une des 4 situations suivantes apparaît :

(u_k, c) et (c, u_1) sont des arêtes de G alors $((c, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k), (u_k, c))$ est un circuit de G , ce qui est impossible.

(u_k, d) et (d, u_1) sont des arêtes de G alors $((d, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k), (u_k, d))$ est un circuit de G , ce qui est impossible.

(u_k, c) et (d, u_1) sont des arêtes de G alors $((c, d), (d, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k), (u_k, c))$ est un circuit de G , ce qui est impossible.

(u_k, d) et (c, u_1) sont des arêtes de G alors $((c, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k), (u_k, d))$ est une chaîne d'origine c et de fin d , ce qui est impossible.

□

Proposition 3.2.2. *Soit G un graphe sans circuit et $e = (c, d)$ une arête (telle que $c \neq d$). Alors $w'cdw''$ est une extension linéaire de G si et seulement si $w'cw''$ est une extension linéaire de $G/(c, d)$.*

Par exemple, si nous contractons l'arête $(4, 5)$ du graphe G (figure 3.6), le graphe $G/(4, 5)$ obtenu est sans circuit et ses extensions linéaires sont

$$\mathcal{L}(G/(4, 5)) = \{1234, 2134\}.$$

De plus, l'ensemble obtenu en enlevant tous les mots de $\mathcal{L}(G)$ qui ne contiennent pas le facteur 45 est en bijection avec $\mathcal{L}(G/(4, 5))$.

$$\{w'45w'' \in \mathcal{L}(G)\} = \{12345, 21345\}$$

Démonstration. La démonstration de la propriété se fait uniquement en deux temps. Le premier correspond au cas dégénéré où G/e possède un circuit. Le deuxième est consacré au cas où G et G/e sont tous les deux sans circuit.

i) Supposons que G/e possède un circuit.

Si il existe un circuit dans G , alors G et G/e ne possèdent pas d'extension linéaire ce qui conclut ce cas.

Si G est sans circuit, alors, d'après la propriété 3.2.1, il existe une chaîne de G d'origine c et de fin d différente de la chaîne (c, d) . Dans ce contexte, G ne possède pas d'extensions linéaires telles que c soit juste à gauche de d . La propriété est donc vérifiée.

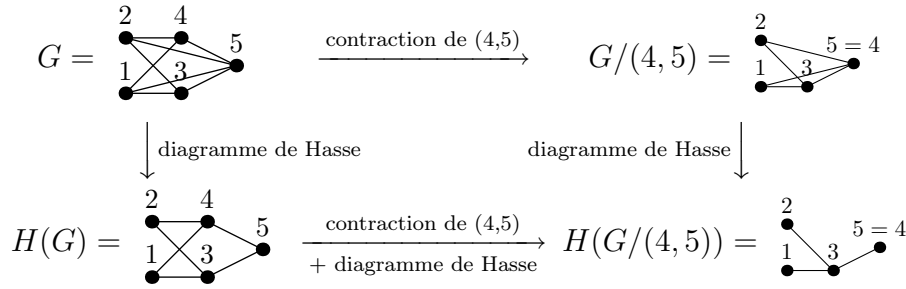


FIG. 3.6 – Le graphe G et $G/(4,5)$, leurs diagrammes de Hasse associés et leurs extensions linéaires

ii) Supposons que G et G/e ne possèdent pas de circuit.

D'après la propriété 3.2.1, l'arête (c, d) est l'unique chaîne de G ayant pour origine c et fin d .

\Rightarrow : Supposons que $w'cdw''$ soit une extension linéaire de G . Nous voulons démontrer que $w'cw''$ est une extension linéaire de G/e . Soit (a, b) une arête de G/e , 4 cas sont à envisager :

$a = b = c$: c'est impossible car, par hypothèse, G/e est sans circuit.

$a = c$ et $b \neq c$: dans ce cas, l'une des arêtes (c, b) ou (d, b) appartient à G . En conséquence, d est à gauche de b dans $w'cdw''$ et a est à gauche de b dans $w'cw''$.

$a \neq c$ et $b = c$: cette situation est semblable à la précédente.

$a \neq c$ et $b \neq c$: dans ce cas, (a, b) est aussi une arête de G/e . Dès lors, a est à gauche de b dans $w'cdw''$ et donc dans $w'cw''$.

\Leftarrow : Supposons que $w'cw''$ soit une extension linéaire de G/e . Nous voulons démontrer que $w'cdw''$ est une extension linéaire de G . Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble des relations associées aux arêtes de G sont des relations de l'ordre total $w'cdw''$. Soit (a, b) une arête de G . Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{l} V_G \rightarrow V_G \\ s \rightarrow f(s) = \begin{cases} c & \text{si } s = c \text{ ou } s = d, \\ s & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Quatre cas sont à envisager :

– $f(a) = f(b) = c$: comme G est sans circuit, $(a, b) = (c, d)$. De ce fait, a est bien à gauche de b dans le mot $w'cdw''$.

– $f(a) \neq c$ et $f(b) = c$: $f(a) = a$ et $(b = c \text{ ou } b = d)$. (a, c) est donc une arête de G/e . Le sommet c est à droite de a dans le mot $w'cw''$. Comme c et d sont côte à côte dans $w'cdw''$ alors a est à gauche de b dans $w'cdw''$.

– $f(a) = c$ et $f(b) \neq c$ ce cas est symétrique au cas précédent.

– $f(a) \neq c$ et $f(b) \neq c$ alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$. On en déduit que (a, b) est une arête de G/e . Ainsi, a est à gauche de b dans $w'cw''$. Il en est de même pour $w'cdw''$.

□

3.3 Linéarisation partielle

Soit G un graphe de sommets V et G' le graphe induit sur un sous-ensemble V' de V . Soit w une extension linéaire de G' . On appelle **linéarisation partielle** de G par w , l'opération qui associe au graphe G le graphe G_w obtenu de la façon suivante :

- les sommets de G_w sont les sommets de G ,
- l'ensemble des arêtes de G_w est la réunion de l'ensemble $E_w = \{(a, b) | a \leq_w b\}$ et des arêtes de G ayant au maximum une extrémité dans V' .

Par exemple, dans la figure 3.7, les extensions linéaires du graphe induit G' de G par le sous-ensemble $\{3, 4\}$ sont

$$\mathcal{L}(G') = \{34, 43\}.$$

Les linéarisations partielles de G selon les extensions linéaires de G' se trouvent représentées dans la figure 3.7

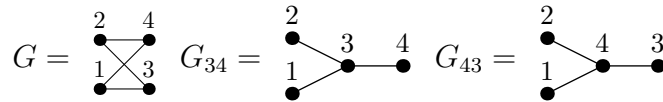


FIG. 3.7 – Linéarisation partielle G'

Proposition 3.3.1. *Soit G un graphe de sommets V et G' le graphe induit par $V' \subset V$ alors*

$$\mathcal{L}(G) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(G')} \mathcal{L}(G_w)$$

où \bigsqcup est le symbole d'union disjointe.

Démonstration. Commençons par prouver d'abord que $\mathcal{L}(G) = \bigcup_{w \in \mathcal{L}(G')} \mathcal{L}(G_w)$. Par définition de G_w , on a l'inclusion $\bigcup_{w \in \mathcal{L}(G')} \mathcal{L}(G_w) \subset \mathcal{L}(G)$. Réciproquement, chaque extension linéaire de G induit un ordre total sur G' . Ainsi, $\mathcal{L}(G) = \bigcup_{w \in \mathcal{L}(G')} \mathcal{L}(G_w)$.

De plus, si w et w' sont deux extensions distinctes de G' alors $\mathcal{L}(G_w) \cap \mathcal{L}(G_{w'}) = \emptyset$. \square

L'ensemble des extensions linéaires du graphe G de la figure 3.8 s'écrit :

$$\mathcal{L}(G) = \{123456, 213456, 124356, 214356, 123465, 213465, 124365, 214365\}.$$

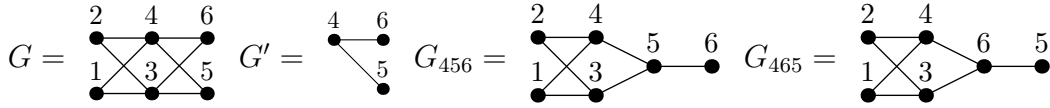
Cet ensemble peut être partitionné en sous-ensembles disjoints indexés par les extensions linéaires du graphe induit G' de la figure 3.8. En effet,

$$\mathcal{L}(G_{456}) = \{123456, 213456, 124356, 214356\}$$

$$\mathcal{L}(G_{465}) = \{123465, 213465, 124365, 214365\}$$

On a donc bien, comme l'indique la proposition 3.3.1,

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_{456}) \sqcup \mathcal{L}(G_{465}).$$

FIG. 3.8 – Un graphe G et un graphe induit G'

3.4 Décontraction

Dans la section précédente, nous avons décrit l'opération de contraction. Nous allons maintenant montrer que tout graphe orienté peut s'obtenir à partir d'un poset biparti lorsqu'on contracte plusieurs arêtes. Un graphe est **biparti** si tous ses sommets sont, soit des sources, soit des puits.

Théorème 3.4.1. *Tout graphe peut être obtenu à partir d'un graphe biparti en appliquant une succession de contractions.*

Démonstration. Soit G un graphe. On construit un nouveau graphe \bar{G} en dupliquant tous les sommets intérieurs de G

$$V_{\bar{G}} = V_G \cup \{\bar{a} \mid a \in In(G)\}$$

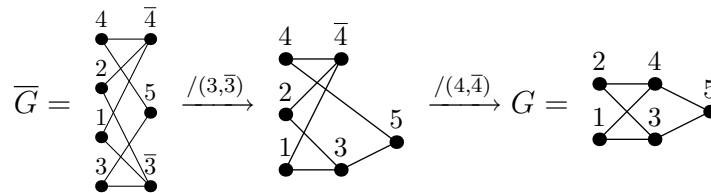
et (a, b) est une arête de \bar{G} si :

1. $a \in In(G)$ et $b = \bar{a}$,
2. $b \in Ext(G)$, $a \in G$ et (a, b) est une arête de G ,
3. $b = \bar{c}$ où c est un sommet de G , a est un sommet de G et (a, c) est une arête de G .

Par construction, tout élément de \bar{G} est un puits ou une source. De plus, quand nous contractons les arêtes $\{(a, \bar{a}) \mid a \in In(G)\}$, on obtient le graphe G . \square

Soit G un graphe, on appelle **décontraction** de G , le graphe \bar{G} obtenu dans la preuve du théorème 3.4.1.

Par exemple, le graphe \bar{G} de la figure 3.9 est obtenu par décontraction du graphe G .

FIG. 3.9 – Le graphe G est la contraction du graphe biparti \bar{G}

La contraction n'est pas une opération bijective. Il existe de nombreux graphes bipartis qui ont la même image par contraction. Il est possible de choisir différents graphes pour la décontraction \bar{G} . La définition de décontraction choisie n'est pas quelconque. En effet,

lorsque G est égal à son diagramme de Hasse $G = \mathcal{H}(G)$, alors pour toute arête (a, \bar{a}) , la contraction de G par (a, \bar{a}) est aussi un diagramme de Hasse.

$$\mathcal{H}(G/(a, \bar{a})) = G/(a, \bar{a}).$$

Ce qui peut également se formuler de la façon suivante :

$$\mathcal{H}(G/(a, \bar{a})) = (G - (a, \bar{a}))_{a \rightarrow \bar{a}}. \quad (1)$$

Le graphe \overline{G} , d'une certaine manière, est minimal. Si nous choisissons comme décontraction une opération qui duplique les sommets internes a en a et \bar{a} , alors, \overline{G} est le sous-graphe de tous les graphes qui ont pour image par contractions de (a, \bar{a}) le graphe G . De plus, seul \overline{G} vérifie l'équation (1). Autrement dit, pour tous les autres graphes, la contraction fait apparaître des arêtes transitives. Étant donné que Ψ est profondément liée au diagramme de Hasse, cette propriété fait de \overline{G} un choix judicieux pour la décontraction.

3.5 Poinçonnage de Féray

Dans ce paragraphe, nous prouvons une formule récursive sur les sommes formelles d'extensions linéaires associées aux graphes. Plus exactement, pour un graphe G donné, nous exprimons $\varphi(G)$ comme une combinaison linéaire de $\varphi(G')$, où G' parcourt des graphes possédant un nombre cyclomatique strictement plus petit.

Soit G un graphe et C un cycle de G , on appelle **poinçonnage de Féray** l'opération notée $\mathcal{F}_C(G)$ qui associe au graphe G la somme alternée :

$$\mathcal{F}_C(G) = \sum_{\substack{E' \subset HE(C) \\ E' \neq \emptyset}} (-1)^{|E'|-1} (G - E').$$

La fonction $\varphi(G) = \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} w$ peut être étendue par linéarité au groupe abélien libre engendré par les graphes. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. *Soit G un graphe et C un cycle de G . Alors,*

$$\varphi(G) = \varphi(\mathcal{F}_C(G)). \quad (2)$$

On peut remarquer que tous les graphes apparaissant à droite de l'équation (2) ont strictement moins de cycles que G . Un exemple est dessiné à la figure 3.10 (pour rendre la figure plus lisible, nous n'avons pas écrit l'opérateur φ devant chaque graphe).

Dans le cas où $HE(C) = \emptyset$, ce théorème dit que les graphes contenant un circuit n'ont pas d'extension linéaire.

Si $HE(C)$ est un singleton, le théorème dit que nous ne changeons pas l'ensemble des extensions linéaires en supprimant l'arête de $HE(C)$.

Pour prouver le théorème 3.5.1, nous aurons besoin du lemme suivant :

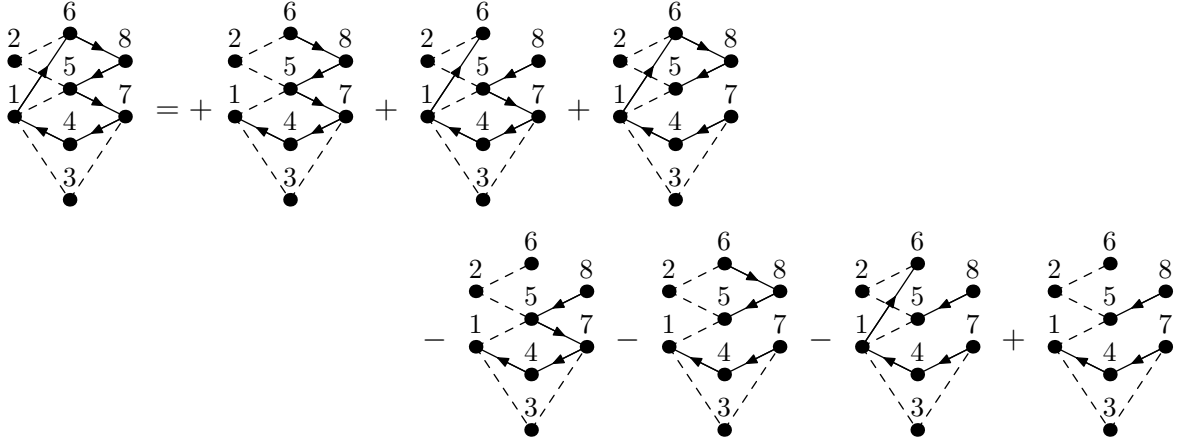


FIG. 3.10 – Exemple d'application du théorème 3.5.1

Lemme 3.5.2. Soit G un graphe et C un cycle de G . Soit $w \in \mathcal{L}(G - HE(C))$. Il existe $E'(w)$ tel que

$$\forall E'' \subset HE(C), \quad w \in \mathcal{L}(G - E'') \iff E'(w) \subset E'' \subset HE(C).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.3.1 page 24. \square

Lemme 3.5.3. Soit G un graphe et C un cycle de G . Soit $w \in \mathcal{L}(G - HE(C))$, il existe $E'' \subsetneq HE(C)$ tel que

$$w \in \mathcal{L}(G - E'').$$

Démonstration. Supposons qu'il soit possible de trouver un mot w pour lequel le lemme soit faux. Étant donné que $w \in \mathcal{L}(G - HE(C))$, le mot w est compatible avec les relations associées aux arêtes du cycle C qui ne sont pas dans $HE(C)$.

Cependant, si $e \in HE(C)$, on a $w \notin \mathcal{L}(G - (HE(C) - \{e\}))$. Cela signifie que w ne contient pas les relations correspondant à l'arête e . Comme w est un ordre total, il vérifie donc les relations imposées :

$$w \in \mathcal{L}[(G - HE(C)) \cup \bar{e}].$$

En appliquant le même argument pour toutes les arêtes $e \in HE(C)$, on obtient :

$$w \in \mathcal{L}[(G - HE(C)) \cup \overline{HE(C)}].$$

Cependant, ce graphe contient un cycle orienté et l'ensemble de ses extensions linéaires est vide. \square

Fin de la preuve du théorème 3.5.1. Soit w un mot sans répétition dont les lettres sont les éléments de $V(G)$. Nous allons calculer son coefficient dans la somme $\varphi(G) - \varphi(\mathcal{F}_C(G)) = \sum_{E' \subset HE(C)} (-1)^{|E'|} \varphi(G - E')$:

- Si $w \notin \mathcal{L}(G - HE(C))$, son coefficient est égal à 0 dans chaque terme de la somme.

- Si $w \in \mathcal{L}(G - HE(C))$, grâce au lemme 3.5.2, nous savons qu'il existe $E'(w) \subset HE(C)$ tel que

$$\forall E'' \subset HE(C), \quad w \in \mathcal{L}(G - E'') \iff E'(w) \subset E'' \subset HE(C).$$

D'après le lemme 3.5.3, on sait que $E'(w) \neq HE(C)$, le coefficient de w dans $\varphi(G) - \varphi(\mathcal{F}_C(G))$ est donc

$$\sum_{E'(w) \subset E'' \subset HE(C)} (-1)^{|E''|} = 0.$$

□

Dans ce chapitre, nous avons défini cinq opérations sur les graphes : la suppression d'arêtes et de sommets, la contraction, la linéarisation partielle, la décontraction et le poinçonnage de Féray.

Chacune de ces opérations a été traduite par des identités remarquables sur les extensions linéaires des graphes.

Le chapitre 4 s'attachera à les interpréter dans les fractions rationnelles Ψ .

4

Propriétés générales des fonctions de Greene

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons défini les graphes et présenté plusieurs opérations agissant sur ces objets : l'opération de contraction, l'opération de linéarisation partielle et les différentes opérations de suppression.

Nous allons maintenant étendre la définition de Ψ (introduction 1) pour les graphes (paragraphe 4.1) et analyser ces opérations dans l'espace des fractions rationnelles. En effet, pour chacune de ces opérations, une interprétation a été énoncée au moyen de formules mettant en jeu les extensions linéaires des graphes qui sont associés aux opérations.

La fraction Ψ peut donc être appliquée à droite et à gauche de chacune des égalités analysées au chapitre 3. Nous obtenons ainsi les identités du paragraphe 4.2.

Ces propriétés sont utilisées pour déterminer la nullité de Ψ_G (paragraphe 4.3), calculer le dénominateur de Ψ_G (paragraphe 4.4) et caractériser le numérateur de Ψ_G (paragraphe 4.5 et 4.6).

4.1 Les fonctions de Greene

Soit G un graphe possédant n sommets v_1, \dots, v_n , l'objet principal de cette partie est l'étude de la **fraction rationnelle** Ψ_G définie sur les variables $(x_{v_i})_{i=1..n}$ de la façon suivante :

$$\Psi(G) = \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} \frac{1}{(x_{w_1} - x_{w_2}) \dots (x_{w_{n-1}} - x_{w_n})}.$$

Par exemple, la fraction rationnelle associée au graphe de la figure 4.1 est égale à :

$$\begin{aligned}
\Psi_G &= \Psi_{12345} + \Psi_{21345} + \Psi_{12435} + \Psi_{21435} \\
&= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)} + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)} + \\
&\quad \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_4)(x_4 - x_3)(x_3 - x_5)} + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_4)(x_4 - x_3)(x_3 - x_5)} \\
&= \frac{x_4x_5 + x_3x_5 - x_2x_5 - x_1x_5 - x_3x_4 + x_1x_2}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_4 - x_5)(x_3 - x_5)}.
\end{aligned}$$

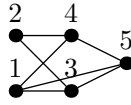


FIG. 4.1 – Exemple de graphe

Nous nous intéresserons à la fraction rationnelle $N(G)$:

$$N(G) := \Psi_G \cdot \prod_{e \in E_G} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}).$$

Si on reprend le calcul de la figure 4.1 on obtient pour $N(G)$:

$$N(G) = (x_1 - x_5)(x_4x_5 + x_3x_5 - x_2x_5 - x_1x_5 - x_3x_4 + x_1x_2).$$

Nous verrons plus tard que cet objet est en fait un polynôme et que si G est le diagramme de Hasse d'un poset, $\Psi(G) = \frac{N(G)}{\prod_{e \in E_G} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)})}$ est une fraction réduite. Dans ce cas, $N(G)$ est le **numérateur** de la fraction réduite $\Psi(G)$.

4.2 Application des outils aux fonctions de Greene

Nous allons maintenant interpréter chacune des propriétés du chapitre 3 à l'aide des fractions rationnelles.

D'après le théorème 3.5.1, le poinçonnage de Féray donne :

Théorème 4.2.1.

$$\Psi_G = \sum_{\substack{E' \subset HE(C) \\ E' \neq \emptyset}} (-1)^{|E'|-1} \Psi_{G-E'}. \quad (3)$$

Cette propriété centrale caractérise Ψ et permet de démontrer à elle seule l'ensemble des résultats de cette étude.

Nous analyserons en détail les propriétés connexes à cette formule.

Soit G un graphe de sommets V et G' le graphe induit par $V' \subset V$. L'opération de linéarisation partielle se traduit par :

Proposition 4.2.2.

$$\Psi_G = \sum_{w \in \mathcal{L}(G')} \Psi_{G_w}.$$

L'opération de contraction possède également une interprétation dans ce cadre.

Proposition 4.2.3. *Soit c et d deux éléments d'un graphe G . Nous avons*

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \cdot \Psi_G = \begin{cases} \Psi_{G/(c,d)} & \text{si } (c, d) \text{ est une arête du diagramme de Hasse de } G, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. En appliquant la substitution $x_c = x_d$ sur Ψ_G , nous obtenons

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \Psi_G = \lim_{x_d \rightarrow x_c} \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} (x_c - x_d) \psi_w. \quad (4)$$

Si cd et dc ne sont pas des facteurs de w , alors $(x_c - x_d)$ n'est pas un facteur de $Den(\psi_w)$ ni de $Num(\psi_w)$. On en déduit que $\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \psi_w = 0$.

Si cd ou dc est un facteur de w , alors $(x_c - x_d)$ est aussi un facteur de $Den(\psi_w)$ avec multiplicité 1. Nous obtenons donc que $\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \psi_w$ converge.

Nous concluons que somme et limite peuvent être permutées dans l'équation (4) pour obtenir

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \Psi_G = \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} \lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \psi_w \quad (5)$$

où la somme décrit les extensions linéaires w de G ayant cd et dc comme facteur (quand elles sont identifiées à des mots).

Il y a trois cas à considérer :

- 1) Il n'existe pas de chaîne d'origine c et de fin d et vice versa. De manière évidente, le mot $w'cdw''$ est une extension linéaire de G si et seulement si $w'dcw''$ est aussi une extension linéaire de G . Nous en déduisons donc que $\psi_{w'cdw''}$ et $\psi_{w'dcw''}$ apparaissent dans la somme de l'équation (5). Nous obtenons alors

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \Psi_G = \sum_{w'cdw'' \in \mathcal{L}(G)} \lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) [\psi_{w'cdw''} + \psi_{w'dcw''}]. \quad (6)$$

En posant $f(x_c, x_d) = (x_c - x_d) \psi_{w'cdw''}$, on obtient $(x_c - x_d) \psi_{w'dcw''} = -f(x_d, x_c)$. Ainsi,

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) [\psi_{w'cdw''} + \psi_{w'dcw''}] = \lim_{x_d \rightarrow x_c} (f(x_c, x_d) - f(x_d, x_c)) = 0. \quad (7)$$

À partir des équations (6) et (7), nous déduisons que $\lim_{x_c \rightarrow x_d} (x_c - x_d) \Psi_G = 0$.

- 2) Supposons maintenant que soit (c, d) ou soit (d, c) est une arête mais qu'il existe une chaîne d'origine c et de fin d . En assumant que (c, d) est l'arête (l'autre cas est similaire), il existe au moins un élément a tel qu'il existe une chaîne de G passant par a , d'origine c et de fin d . Alors $\mathcal{L}(G)$ ne contient pas de mots ayant cd ou dc en facteur. Le résidu $\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \Psi_G$ est égal à 0.

3) Si (c, d) est une arête de G mais qu'il n'existe pas d'autre chemin d'origine c et de fin d (le cas (d, c) est analogue), alors

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \Psi_G = \sum \lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \psi_w$$

où la somme décrit les extensions linéaires w de G vérifiant $w = w'cdw''$. D'après la proposition 3.2.2, on a

$$\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \Psi_G = \sum_{w'cw'' \in \mathcal{L}(G/(c,d))} \lim_x x_d \rightarrow x_c (x_c - x_d) \psi_{w'cdw''}.$$

La définition de ψ_w implique $\lim_{x_d \rightarrow x_c} (x_c - x_d) \psi_{w'cdw''} = \psi_{w'cw''}$. Ce qui finit la preuve. \square

Corollaire 4.2.4. Soit G un graphe tel que $G = \mathcal{H}(G)$. Soit \overline{G} la décontraction de G , alors

$$\lim_C (Num(\Psi_{\overline{G}})) = Num(\Psi_G)$$

où $C = \{x_{\bar{i}} \rightarrow x_i | i \in In(G)\}$.

Démonstration. D'après le théorème 4.2.3 et la proposition 3.4.1 on sait que

$$\lim_C \left(\prod_{i \in In(G)} (x_i - x_{\bar{i}}) \Psi_{\overline{G}} \right) = \Psi_G.$$

De plus, le dénominateur de Ψ est déterminé par les arêtes du diagramme de Hasse de G (voir théorème 4.4.1). Comme $G = \mathcal{H}(G)$, par construction de \overline{G} , la contraction préserve l'ensemble des arêtes du diagramme de Hasse de \overline{G} à l'exception des arêtes contractées. Ainsi, il y a bijection entre les facteurs du dénominateur Ψ_G et les facteurs du dénominateur de $\prod_{i \in In(G)} (x_i - x_{\bar{i}}) \Psi_{\overline{G}}$. On obtient alors :

$$\lim_C (Num(\Psi_{\overline{G}})) = Num(\Psi_G).$$

\square

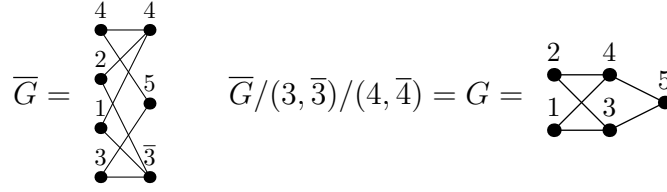
Par exemple, la fraction rationnelle Ψ_G qui est associée au graphe G de la figure 4.2 peut être obtenue en appliquant des résidus successifs sur $\Psi_{\overline{G}}$:

$$Num(\Psi_{\overline{G}}) = x_5.x_{\bar{3}} - x_1.x_{\bar{4}} - x_2.x_{\bar{3}} - x_2.x_{\bar{4}} - x_3.x_{\bar{3}} - x_3.x_{\bar{4}} - x_4.x_{\bar{3}} - x_4.x_{\bar{4}} - x_1.x_{\bar{3}} + x_5.x_{\bar{4}} + x_{\bar{3}}^2 + x_{\bar{4}}^2 + x_{\bar{3}}.x_{\bar{4}} + x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 - x_1.x_5 + x_2.x_4 - x_2.x_5$$

$$\lim_{\substack{x_{\bar{3}} \rightarrow x_3 \\ x_{\bar{4}} \rightarrow x_4}} (Num(\Psi_{\overline{G}})) = Num(\Psi_G)$$

$$Num(\Psi_G) = x_1.x_2 + x_3.x_5 + x_4.x_5 - x_1.x_5 - x_2.x_5 - x_3.x_4$$

Il suffit de calculer Ψ pour les graphes bipartis.

FIG. 4.2 – Décontraction de G

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en valeur l'opération permettant de supprimer une source ou un puits. Cette opération s'interprète de la façon suivante sur les fractions rationnelles :

Proposition 4.2.5. *Soit c un sommet d'un graphe G ,*

$$\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_G) = \begin{cases} -\Psi_{G \setminus c} & \text{si } c \text{ est un puits,} \\ \Psi_{G \setminus c} & \text{si } c \text{ est une source,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous avons

$$\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_G) = \lim_{x_c \rightarrow +\infty} \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} (x_c \cdot \Psi_w).$$

Lorsque nous coupons la somme en deux parties dont la première est la somme de tous les mots commençant ou finissant par c et la seconde le reste des termes, nous obtenons

$$\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_G) = \lim_{x_c \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\substack{w \in \mathcal{L}(G) \\ w=cw' \text{ ou } w=w'c}} (x_c \cdot \Psi_w) + \sum_{\substack{w \in \mathcal{L}(G), w=w'cw'' \\ \text{et } w', w'' \text{ n'est pas trivial}}} (x_c \cdot \Psi_w) \right). \quad (8)$$

Comme c est la première et la dernière lettre de w , alors le degré de x_c dans ψ_w est -1 et $\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \psi_w) = \psi_{w'}$. Si c n'est pas la première ni la dernière lettre de w , alors le degré de x_c dans ψ_w est -2 et $\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \psi_w) = 0$. Nous en déduisons que limite et somme dans l'équation (8) peuvent être permutées pour obtenir

$$\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_G) = \sum_{\substack{w \in \mathcal{L}(G) \\ w=cw' \text{ ou } w=w'c}} \lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_w). \quad (9)$$

Ce qui donne

$$\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_G) = \sum_{\substack{w \in \mathcal{L}(G) \\ w=cw' \text{ ou } w=w'c}} \Psi_{w'}.$$

Par la proposition 3.1.1, nous concluons que

$$\lim_{x_c \rightarrow +\infty} (x_c \cdot \Psi_G) = \Psi_{G \setminus \{c\}}.$$

□

4.3 Connexité et nullité de la fraction réduite

Dans cette partie, nous allons interpréter la notion de connexité des graphes par l'intermédiaire des fractions rationnelles. En particulier, le corollaire 4.3.2 montre que $\Psi_G = 0$ si et seulement si G est déconnecté.

Définition 4.1. *Le graphe G est fortement planaire si son diagramme de Hasse peut être dessiné suivant les règles suivantes :*

- les arêtes doivent être des segments,
- l'origine d'une arête doit être située à gauche de la fin de l'arête,
- les arêtes ne doivent pas se croiser,
- si on ajoute un puits relié à tous les puits de G et une source reliée à toutes les sources de G , alors les arêtes ne doivent pas se croiser.

La définition énoncée ci-dessus est la généralisation de la définition de Greene [23] sur les posets planaires dans les graphes.

Cette définition de planarité n'est pas usuelle car elle impose des conditions supplémentaires pour dessiner les graphes dans le plan.

Par exemple, d'après la définition de Greene [23], les figures 4.4 et 4.3 sont respectivement des graphes planaires et non planaires.

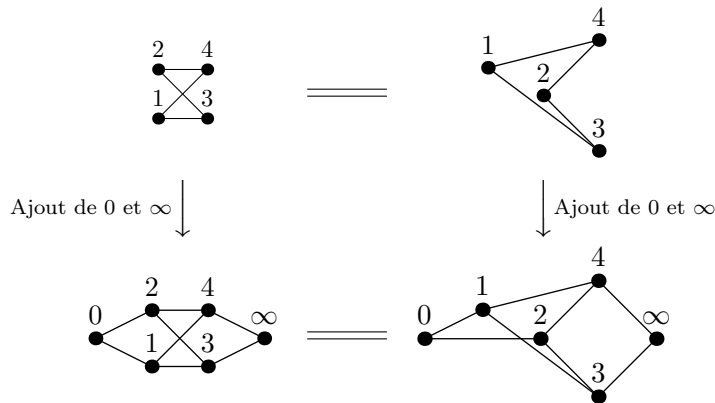


FIG. 4.3 – Le graphe \mathbb{G}_{2143} n'est pas planaire

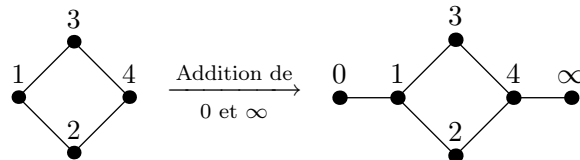


FIG. 4.4 – Le graphe \mathbb{G}_{1324} est planaire

Théorème 4.3.1 (Greene [23]). *Soit G un graphe planaire, alors*

$$\Psi_G = \begin{cases} 0 & \text{si } G \text{ n'est pas connexe,} \\ \prod_{a,b \in G} (x_a - x_b)^{\mu_G(a,b)} & \text{si } G \text{ est connexe,} \end{cases}$$

où μ_G est la fonction de Möbius sur le poset associé à G .

Nous avons donc le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.2. *Soit G un graphe, le diagramme de Hasse de G est connexe si et seulement si $\Psi_G \neq 0$.*

Démonstration. Supposons au préalable que G est connexe et que $\Psi_G = 0$. Comme la contraction des arêtes préserve la connexité des graphes, nous contractons successivement les arêtes de G jusqu'à produire un nouveau graphe ayant une unique arête (c, d) . Avec le théorème 4.2.3, nous obtenons Ψ_{c-d} à partir de Ψ_G en appliquant une succession de résidus. Il s'en suit que $\Psi_{c-d} = 0$. Ce qui constitue une contradiction avec le calcul direct $\Psi_{c-d} = \frac{1}{x_c - x_d}$. Ainsi, $\Psi_G \neq 0$.

Réciproquement, nous considérons le cas où le graphe G n'est pas connexe.

Soient C_1 et C_2 deux composantes non connexes de G . La proposition 4.2.2 implique que

$$\Psi_G = \sum_{w_1 \in \mathcal{L}(C_1), w_2 \in \mathcal{L}(C_2)} \Psi_{(G_{w_1})_{w_2}}.$$

Comme chaque graphe $(G_{w_1})_{w_2}$ est planaire et non connexe, le théorème de Greene (théorème 4.3.1) donne $\Psi_G = 0$. \square

4.4 Calcul du dénominateur

Dans cette section, nous proposons une formule explicite du dénominateur de Ψ_G . Ce résultat permet d'établir un critère simple pour déterminer le degré du numérateur.

On notera par $Den(\Psi_G)$ le dénominateur de la fraction réduite de Ψ_G et par $Num(\Psi_G)$ son numérateur.

Théorème 4.4.1. *Soit G un graphe connexe et $\mathcal{H}(G)$ son diagramme de Hasse, alors :*

$$Den(\Psi_G) = \prod_{(c,d) \in \mathcal{H}(G)} (x_c - x_d).$$

Démonstration. Le théorème 4.2.3 implique que $\prod_{(c,d) \in \mathcal{H}(G)} (x_c - x_d)$ est un facteur de $Den(\Psi_G)$. Étant donné que les contractions préservent la connexité du graphe (corollaire 4.3.2), nous en déduisons que $Den(\Psi_G)$ est exactement $\prod_{(c,d) \in \mathcal{H}(G)} (x_c - x_d)$. \square

Ce résultat montre que le diagramme de Hasse joue un rôle important dans l'étude des fractions rationnelles. De plus, le corollaire suivant confirme le statut spécial du diagramme de Hasse.

Corollaire 4.4.2. *Soit G un graphe connexe, le degré de $Num(\Psi_G)$ est égal au nombre cyclomatique du diagramme de Hasse de G .*

Démonstration. Soit G un graphe connexe possédant n sommets. Soit m le nombre d'arêtes de $\mathcal{H}(G)$ et o le nombre cyclomatique de $\mathcal{H}(G)$. Grâce au théorème 4.4.1, nous savons que le

degré du numérateur de la fraction réduite est au plus égal à $n - 1 - m$. D'après la formule d'Euler, (voir par exemple [12] ou [21]), $n - m - 1$ représente le nombre cyclomatique de $\mathcal{H}(G)$. Étant donné que le polynôme $Num(\Psi_G)$ est homogène, on en déduit que $Num(\Psi_G)$ est, soit nul, soit de degré o . Comme G est connexe, le corollaire 4.3.2 clôt la preuve. \square

Par exemple, le nombre cyclomatique du diagramme de Hasse de \mathbb{G}_{132546} vaut 3 (voir figure 4.5). Le degré de son numérateur est égal à 3.

$$Num(\Psi_{\mathbb{G}_{132546}}) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 - x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 - x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 - x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 + x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 + x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$$

$$Den(\Psi_{\mathbb{G}_{132546}}) = (x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_5 - x_6) \cdot (x_4 - x_6) \cdot (x_3 - x_5) \cdot (x_2 - x_5) \cdot (x_3 - x_4) \cdot (x_2 - x_4)$$

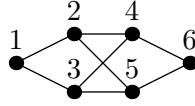


FIG. 4.5 – Numérateur et dénominateur de la fraction réduite $\Psi_{\mathbb{G}_{132546}}$

Corollaire 4.4.3. $N(G)$ est un polynôme et le produit $\prod (e \in E_G \setminus \mathcal{H}(G))(x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)})$ factorise $N(G)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la définition de $N(G)$ et du théorème 4.4.1. \square

Ce dernier corollaire entraîne $Num(\Psi_G) = N(G)$ lorsque G et son diagramme de Hasse sont identiques.

De plus,

Proposition 4.4.4. Soit a un élément du graphe connexe G tel que a est un sommet libre dans le diagramme de Hasse de G . Soit b l'unique sommet tel que (b, a) ou (a, b) soient des arêtes du diagramme de Hasse de G , alors

$$\Psi_G = \begin{cases} \Psi_{G \setminus \{a\}} \cdot \frac{1}{x_a - x_b} & \text{si } a \text{ est une source,} \\ \Psi_{G \setminus \{a\}} \cdot \frac{1}{x_b - x_a} & \text{si } a \text{ est un puits.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit a un sommet libre du diagramme de Hasse de G . Nous écrivons le numérateur de Ψ_G comme un polynôme en x_a à coefficient dans $\mathbb{C}[\mathbb{X} \setminus x_a]$:

$$Num(\Psi_G) = \sum_i C_i x_a^i.$$

Comme a est un sommet libre, a est une source ou un puits de G . Le théorème 4.2.5 montre que

$$\lim_{x_a \rightarrow +\infty} (x_a \cdot \Psi_G) = \begin{cases} -\Psi_{G \setminus a} & \text{si } a \text{ est un puits,} \\ \Psi_{G \setminus a} & \text{si } a \text{ est une source.} \end{cases}$$

D'après le théorème 4.4.1, x_a est de degré 1 dans le dénominateur de la fraction réduite de Ψ_G , ce qui implique que $C_0 \neq 0$ et pour tout $i \geq 1$, $C_i = 0$. Ainsi, $Num(\Psi_G) = C_0 = Num(\Psi_{G \setminus \{a\}})$. \square

Corollaire 4.4.5.

$$Num(\Psi_G) = Num(\Psi_{\text{Emond}(G)})$$

4.5 Algorithme pour le calcul du numérateur

Le calcul du numérateur de Ψ est un travail plus complexe et fait l'objet des paragraphes 4.5, 4.6, 4.7. Dans la section présente, nous décrivons un algorithme permettant de calculer le numérateur de Ψ .

Le principe consiste à itérer le poinçonnage de Féray sur Ψ jusqu'à ramener le calcul à une somme de fractions rationnelles associées uniquement à des arbres et des forêts.

Avant de traiter le cas général, nous allons considérer le calcul de Ψ pour les arbres et les forêts. Comme les forêts ne sont pas connexes, leurs fractions rationnelles associées sont nulles. Il ne reste donc plus qu'à examiner le cas des arbres.

Lemme 4.5.1. *Soit G un graphe connexe, alors le diagramme de Hasse de G n'a pas de cycle si et seulement si $Num(\Psi_G) = 1$*

Démonstration. Ce résultat est l'application directe du théorème de Greene et de son corollaire 4.4.2. \square

Jusqu'à présent, nous avons travaillé sur la fraction réduite de Ψ . Dans ce paragraphe nous nous intéresserons plus généralement à $N(G)$. En effet, les conséquences du poinçonnage de Féray s'observent plus facilement sur $N(G)$ que sur Ψ_G .

Dans la section précédente, nous avons vu que $N(G)$ était un polynôme et que si G n'est pas un diagramme de Hasse, $N(G)$ peut se factoriser et possède au moins le facteur $\prod_{e \in E_G \setminus \mathcal{H}(G)} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)})$.

Lorsqu'on souhaite calculer le numérateur de Ψ_G , il suffit de déterminer N pour le diagramme de Hasse de G , ou de supprimer le facteur $\prod_{e \in E_G \setminus \mathcal{H}(G)} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)})$ de $N(G)$.

C'est pourquoi, nous ne perdons pas en généralité quand nous étudions $N(G)$.

Écrit avec la quantité $N(G)$ au lieu de Ψ_G , le théorème 4.2.1 devient :

Proposition 4.5.2. *Soit G un graphe contenant un cycle C . Alors,*

$$N(G) = \sum_{\substack{E' \subset HE(C) \\ E' \neq \emptyset}} \left[(-1)^{|E'| - 1} N(G - E') \prod_{e \in E'} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}) \right].$$

D'après le lemme 4.5.1, on a $N(T) = 1$ si T est un arbre et $N(F) = 0$ si F est une forêt non connexe. Ainsi, en itérant cette proposition, nous pouvons calculer $N(G)$. Plus précisément, si après avoir itéré la transformation de type \mathcal{F}_C sur G , nous obtenons une combinaison linéaire formelle $\sum c_F F$ de sous-forêts de G , alors :

$$N(G) = \sum_{T \text{ sous-arbre de } G} c_T \prod_{e \in E_G \setminus E_T} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}).$$

Dans cette formule, $N(G)$ apparaît comme une somme de polynômes. Lorsque nous utilisons cette identité, le calcul de $N(G)$ est plus facile et rapide que l'application directe de la définition de Ψ_G qui donne

$$N(G) = \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} \left(\Psi_w \cdot \prod_{e \in E_G} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}) \right)$$

où chaque terme de la somme peut avoir plusieurs pôles.

Par exemple,

$$N \left(\begin{array}{c} \bullet \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad 1 \quad \bullet \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{c} \bullet \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad 1 \quad \bullet \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right) \cdot (x_1 - x_3) = x_1 - x_3.$$

À l'aide du poinçonnage de Féray et de son algorithme, il est possible de redémontrer de manière indépendante le théorème concernant la contraction et les résultats connexes qui lui sont associés. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser la définition des graphes à arêtes multiples.

Proposition 4.5.3. *Soit G un graphe à arêtes multiples et e une arête de G entre deux sommets v_1 et v_2 . Alors,*

$$N(G/e) = N(G) \Big|_{x_{v_1} = x_{v_2} = x_v}$$

où v est la contraction de v_1 et v_2 dans G/e .

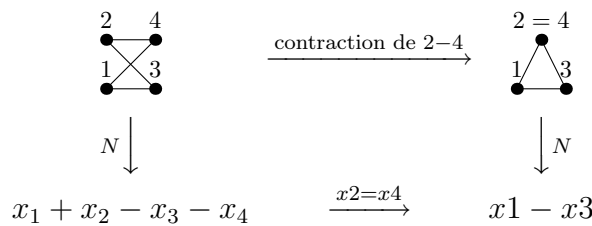


FIG. 4.6 – Contraction et numérateur

Démonstration inductive sur le nombre cyclomatique de G . Si G est une forêt, alors l'égalité est évidente par le corollaire 4.3.2.

Si G/e contient un cycle C_e , alors nous pouvons considérer les cycles C ci-après (la figure 4.7 illustre les différents cas) :

- 1) Si v (contraction de v_1 et de v_2) n'est pas un sommet du cycle C_e de G/e , alors C_e est aussi un cycle C de G .
- 2) Supposons que v est la fin d'une arête e_i et l'origine de l'arête e_{i+1} dans le cycle $C_e = (e_1, \dots, e_l)$ de G/e . Supposons aussi que $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ dans G . Alors, C_e peut toujours être considéré comme un cycle C de G .

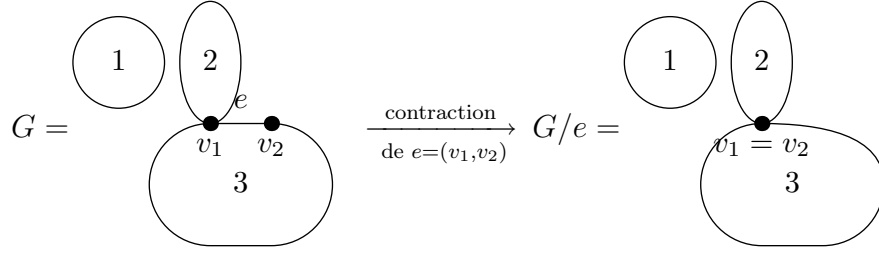


FIG. 4.7 – Les différents cas de la preuve de la proposition 4.5.3

- 3) Supposons que v est la fin de e_i et l'origine de e_{i+1} mais que les extrémités $\omega(e_i)$ et $\alpha(e_{i+1})$ sont différentes dans G . On ajoute alors une arête e ou \bar{e} au cycle C_e (entre e_i et e_{i+1}) pour obtenir un cycle C de G .

En modifiant éventuellement les orientations de C_e et C , on peut supposer que $e \notin HE(C)$. Dès lors $HE(C) = HE(C_e)$. D'après le théorème 4.5.2, il est possible d'écrire :

$$N(G/e) = \sum_{\substack{E' \subset HE(C_e) \\ E' \neq \emptyset}} (-1)^{|E'| - 1} N((G/e) - E'). \prod_{e \in E'} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)})$$

$$N(G) = \sum_{\substack{E' \subset HE(C) \\ E' \neq \emptyset}} (-1)^{|E'| - 1} N(G - E'). \prod_{e \in E'} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}).$$

Comme $e \notin HE(C)$,

$$(G - E')/e = (G/e) - E' \quad \text{et} \quad HE(C_e) = HE(C).$$

On finit la preuve en appliquant l'hypothèse de récurrence aux graphes $G - E'$. \square

Une autre conséquence immédiate de la proposition 4.5.2 est la propriété d'annulation de $N(G)$ ci-dessous :

Corollaire 4.5.4. *Soit G un graphe. Soit C un cycle de G tel que $HE(C) = \{e_1, \dots, e_r\}$. On a*

$$N(G)|_{x_{\alpha(e_i)} = x_{\omega(e_i)}, i=1 \dots r} = 0.$$

Malheureusement, ce corollaire, écrit pour chaque cycle du graphe G , ne permet pas de caractériser $N(G)$ à un facteur multiplicatif près.

4.6 Formule combinatoire pour le numérateur N

L'itération de la transformation \mathcal{F}_C sur le graphe G produit une combinaison linéaire formelle de forêts. Le polynôme N associé au graphe G se calcule à partir de cette combinaison linéaire.

Cependant, il existe beaucoup de choix de cycles possibles à chaque étape de l'itération et la combinaison linéaire ainsi obtenue dépend des choix effectués.

Un moyen d'éviter ce problème consiste à munir G d'une structure de carte et à examiner la décomposition particulière introduite dans l'article [15, section 3]. Avec ces choix particuliers, nous avons une description combinatoire des arbres possédant un coefficient $+1$. Tous les autres arbres ont un coefficient égal à 0 .

Cette section est donc consacrée aux cartes enracinées. Nous avons vu précédemment que les cartes enracinées (section 2.5) étaient caractérisées par l'ordre cyclique autour des arêtes. Dans cette configuration, il n'est pas toujours possible de garder la convention graphique selon laquelle l'extrémité d'une arête est toujours à droite de son origine.

Cartes enracinées et cycles admissibles

Nous rappelons que pour calculer $N(G)$, un algorithme naïf conduirait à poinçonner n'importe quel cycle du graphe (voir proposition 4.5.2). Si le graphe possède une structure de carte enracinée, il est intéressant de choisir les cycles avec des propriétés spécifiques. Le choix que nous allons présenter est indépendant de l'orientation des arêtes du graphe. Il consiste à sélectionner un **cycle admissible** à chaque étape.

On appelle **cycle admissible de type 1** tout cycle tel que :

- 1) Le sommet \star est un sommet du cycle, c'est-à-dire que \star est l'extrémité d'une demi-arête h_i de e_i et d'une demi-arête h_{i+1} de e_{i+1} pour un indice donné i ;
- 2) L'ordre cyclique des demi-arêtes associées à \star et restreint à l'ensemble $\{h_0, h_i, h_{i+1}\}$ est l'ordre cyclique (h_0, h_{i+1}, h_i) .

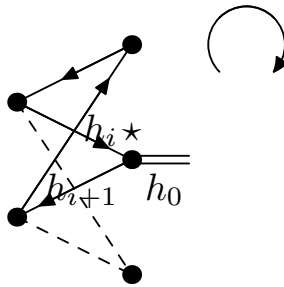


FIG. 4.8 – Exemple de carte enracinée M possédant un cycle admissible de type 1

Si C est un cycle qui satisfait la première condition, alors il existe un unique cycle parmi C et \overleftarrow{C} qui est admissible (\overleftarrow{C} étant le cycle C dont les arêtes ont été inversées).

Si C est un cycle vérifiant (1) alors, soit C est admissible, soit \overleftarrow{C} est admissible.

Si une carte enracinée ne possède pas de cycles de type 1, on construit une famille de nouvelles cartes enracinées M_1, \dots, M_h en supprimant le sommet \star et les demi-arêtes d'extrémité \star . Les demi-arêtes restantes deviennent alors les nouvelles racines des cartes enracinées M_1, \dots, M_h .

Dans ce cas, nous appelons **cycle admissible de type 2** les cycles admissibles de M_1, \dots, M_h (de type 1 ou 2).

La figure 4.9 illustre la construction des cartes enracinées M_1, \dots, M_h . Un exemple de cycle admissible de type 2 est dessiné dans la figure 4.10.

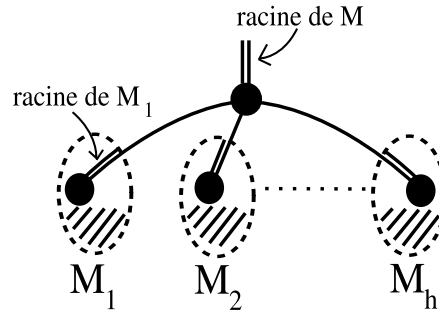


FIG. 4.9 – Une carte enracinée générique M sans cycle admissible de type 1

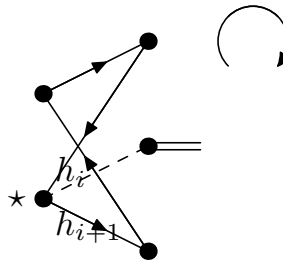


FIG. 4.10 – Exemple de carte enracinée M' possédant un cycle admissible de type 2

Une carte enracinée sans cycle admissible ne possède aucun cycle, il s'agit donc d'un **arbre**.

Décomposition des cartes enracinées

Considérons l'algorithme ci-après :

1. entrée : une carte enracinée M ,
2. variable : S est la combinaison linéaire formelle de sous-cartes de M ,
3. initialisation : $S = M$,
4. étape itérative : choisissez une carte M_0 associée à un coefficient non nul c_{M_0} dans S qui n'est pas une forêt. Sélectionnez un cycle admissible C de M_0 . Appliquez \mathcal{F}_C à M_0 dans S et gardez seulement les graphes connexes dans le membre de droite (ils ont naturellement une structure de carte enracinée). Formellement,

$$S := S - c_{M_0}M_0 + c_{M_0}\delta(\mathcal{F}_C(M_0)),$$

où δ est l'opérateur linéaire défini par :

$$\delta(M') = \begin{cases} M' & \text{si } M' \text{ est connexe,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

5. fin : itérez jusqu'à ce que S soit une combinaison linéaire de sous-arbres de M ,
6. sortie : S .

Définition-Théorème 4.6.1. *Cet algorithme termine toujours et est confluent. Soit $D(M)$ la sortie de l'algorithme.*

Idée de la preuve. Pour une preuve complète, voir [15, définition-théorème 3.1.1 et 3.2.1, avec la remarque 2].

La terminaison est évidente : toutes les cartes dans $\mathcal{F}_C(M_0)$ ont un nombre cyclomatique plus petit que celui de M_0 .

Pour la confluence, les cartes dont les graphes sous-jacents sont considérés dans le paragraphe 4.7 jouent un rôle similaire à des pics critiques en théorie de réécriture. Il suffit de vérifier notre résultat pour ces cartes particulières. Il y a une infinité de cartes de ce type, toutefois un seul calcul est suffisant pour traiter le cas général. \square

Proposition 4.6.2. *Soit M une carte enracinée.*

$$\Psi(D(M)) = \Psi(M)$$

Démonstration. Nous devons vérifier que $\Psi(S)$ est un invariant de notre algorithme. Ce résultat est évident car les opérateurs \mathcal{F}_C et δ laissent Ψ invariant (voir théorème 3.5.1 page 36 et corollaire 4.3.2 page 45). \square

Par exemple, soit le graphe biparti $G_{2,3}$ ($A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$) avec la structure de carte enracinée suivante :

- si on note par $e_{1,i}$ (resp $e_{2,i}$) l'arête entre a_1 (resp. a_2) et b_i , l'ordre cyclique autour du sommet a_1 (resp. a_2) est $(e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3})$ (resp. $(e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2,3})$).
- la racine est b_2 et l'ordre cyclique autour de b_2 est $(h_0, e_{2,2}, e_{2,1})$.

Le cycle $C = (\overline{e_{2,2}}, e_{2,1}, \overline{e_{1,1}}, e_{1,2})$ (dessiné sur la figure 4.8) devient admissible (de type 1). Étant donné que $HE(C) = \{e_{2,1}, e_{1,2}\}$, la première itération de l'étape 1 de notre algorithme de décomposition donne :

$$S = \begin{array}{c} \bullet b_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet a_1 \quad \bullet b_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet a_2 \quad \bullet b_3 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet b_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet a_1 \quad \bullet b_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet a_2 \quad \bullet b_3 \end{array} - \begin{array}{c} \bullet b_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet a_1 \quad \bullet b_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet a_2 \quad \bullet b_3 \end{array}$$

Les deux premiers graphes contiennent chacun un cycle admissible : le premier de type 1 ($C = (\overline{e_{2,2}}, e_{2,3}, \overline{e_{1,3}}, e_{1,2})$ avec $HE(C) = \{e_{2,3}, e_{1,2}\}$), le deuxième de type 2 ($C = (e_{2,3}, \overline{e_{1,3}}, e_{1,1}, \overline{e_{2,1}})$)

et $HE(C) = \{e_{2,3}, e_{1,1}\}$, voir figure 4.10). Ainsi, l'algorithme s'arrête après deux autres itérations, ce qui mène au résultat suivant :

$$D(M) = \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} - \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} \quad (10)$$

$$= \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet & b_1 \\ \diagup & \\ a_1 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_2 \\ \diagup & \\ a_2 & \bullet \\ \diagdown & \\ \bullet & b_3 \end{matrix} \quad (11)$$

De manière surprenante, les coefficients des arbres $D(M)$ valent tous 0 ou +1. Nous verrons dans la prochaine section que cette propriété reste vraie quelle que soit la carte M . En fait, le signe obtenu constitue un cas particulier de [15, Proposition 3.3.1] et caractérise combinatoirement les arbres avec un coefficient +1.

Coefficient de $D(M)$

Pour calculer le polynôme N , il faut déterminer les coefficients des arbres couvrants de $D(M)$. Ici, nous faisons le lien entre ce coefficient et une propriété combinatoire de l'arbre T .

définition 4.6.1. Si T est un sous-arbre couvrant de la carte enracinée M , le **tour de l'arbre** T commençant par h_0 définit un ordre sur les demi-arêtes qui n'appartiennent pas à T . La définition est facile à comprendre sur la figure 4.11 : ce schéma présente le tour $(h_1^1, h_2^1, h_1^2, h_2^2, h_1^3, h_2^3, h_1^4, h_2^4)$ (voir [4] pour une définition précise).

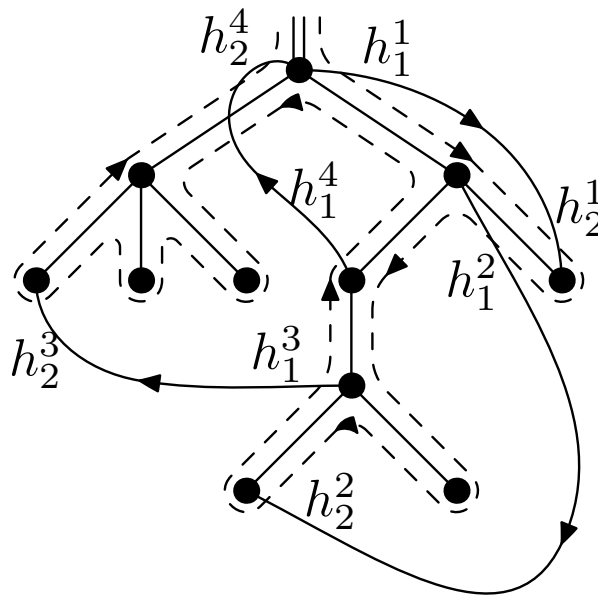


FIG. 4.11 – Tour d'un arbre recouvrant associé à une carte

Nous rappelons que $D(M)$ ne dépend pas du choix du cycle admissible de l'étape 1 de l'algorithme de décomposition. Un bon choix pour calculer les coefficients d'un arbre couvrant $T \subsetneq M$ est formulé par le lemme 4.6.3. Étant donné une arête e de $M - T$, il est bien connu qu'il existe un unique cycle (à une orientation près) noté $C(e)$ tel que $C(e) \subset (E_T \cup \{e\})$.

Lemme 4.6.3. *Il existe une arête $e_0 \in M - T$ telle que $C(e_0)$ ou $\overline{C(e_0)}$ soit admissible. Nous supposons sans perte de généralité que $C(e_0)$ est admissible. De plus,*

$$e_0 \in HE(C(e_0)) \iff \begin{array}{l} \text{la première demi-arête de } e_0 \text{ apparaît dans} \\ \text{le tour de } T \text{ avant la seconde.} \end{array}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait par induction sur la taille de M . Elle peut être divisée en trois cas distincts :

1. s'il existe une arête e de $M - T$ dont l'origine et la fin est \star (l'extrémité de la demi-arête externe), alors \star est un sommet du cycle $C(e)$. De plus, $C(e)$ ou $\overline{C(e)}$ est admissible et de type 1 ;
2. soit T_1, \dots, T_l les composantes connexes de $T - \{\star\}$. S'il existe une arête e dont les extrémités sont dans deux composantes différentes T_i , alors $C(e)$ possède le sommet \star et e convient pour notre lemme ;
3. enfin, si $M - \{\star\}$ possède autant de composantes connexes que $T - \{\star\}$ (nous noterons $M_i \supset T_i (1 \leq i \leq l)$ ces composantes) alors il existe un entier j , tel que $M_j \supsetneq T_j$. Dans ce cas, M ne possède pas de cycle admissible de type 1. Cependant, par induction, il existe $e \in M_j - T_j$ tel que $C_{M_j}(e)$ soit admissible dans M_j . Par définition, ce cycle est admissible et de type 2 dans M . Or $C_{M_j}(e) = C_M(e)$, ce qui clôt la preuve du lemme.

La seconde partie de la preuve est aisée dans les deux premiers cas (voir figure 4.11). Pour le troisième cas, il s'agit à nouveau d'une induction immédiate. \square

Ceci nous permet de calculer tous les coefficients des arbres de $D(M)$:

Proposition 4.6.4. *Soit M une carte enracinée et T un arbre couvrant de M .*

- *S'il existe une arête $e = (h_1, h_2) \in M - T$ telle que h_2 apparaît avant h_1 dans le tour de T , alors, le coefficient de T dans $D(M)$ vaut 0.*
- *Sinon, le coefficient de T dans $D(M)$ vaut +1 (T sera appelé **bon**).*

Par exemple, l'arbre couvrant de la figure 4.11 est bon. Il faut noter que la propriété d'être un bon arbre couvrant ne dépend pas de l'orientation des arêtes de l'arbre, mais seulement de l'orientation de celles qui n'appartiennent pas à l'arbre considéré (ces arêtes sont représentées avec des flèches dans la figure 4.11).

Démonstration. Nous allons prouver cette proposition par induction sur le nombre d'arêtes de $M - T$. Si $M = T$, T est bon et le résultat est évident.

Soit T un arbre couvrant d'une carte enracinée M telle que $M - T$ contient au moins un élément. D'après le lemme 4.6.3 page 54, il existe une arête e_0 telle que $C(e_0)$ est admissible. Deux cas doivent être examinés :

Cas $e_0 \notin HE(C(e_0))$, l'arbre couvrant T ne peut pas être bon. En outre, $HE(C(e_0)) \subset T$, aucune carte apparaissant dans $T_{C(e_0)}(M)$ ne peut contenir T . Or, cela reste vrai lorsque nous appliquons des opérateurs de type \mathcal{F}_C . En particulier, le coefficient de T dans $D(M)$ vaut 0.

Cas $e_0 \in HE(C(e_0))$, dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} T_{C(e_0)}(M) &= M - \{e_0\} + \text{cartes qui ne contiennent pas } T. \\ \text{Ainsi, } D(M) &= D(M - \{e_0\}) + \sum_{M' \not\supset T} D(M'). \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, le second terme de la somme n'apporte aucune contribution au coefficient de T dans $D(M)$. Par l'hypothèse de récurrence, le premier terme a une contribution de +1 si T est un bon arbre couvrant de $M - \{e_0\}$ et 0 sinon. Cependant, par définition des bons arbres couvrants, il est immédiat que :

$$T \text{ est un bon arbre couvrant de } M \iff \begin{array}{l} T \text{ est un bon arbre couvrant de } M - \{e_0\} \\ \text{et la demi-arête de } e_0 \text{ apparaît} \\ \text{avant la seconde dans le tour de } T. \end{array}$$

Cependant comme $e_0 \in HE(C(e_0))$, la seconde condition du membre de droite est vraie grâce au lemme 4.6.3. Finalement, le coefficient de T est +1 si T est un bon sous-arbre couvrant de M et 0 sinon.

□

Nous pouvons maintenant donner une formule combinatoire pour $N(G)$.

Théorème 4.6.5. *Le polynôme N associé au graphe sous-jacent G de la carte enracinée M est donné par la formule combinatoire suivante :*

$$N(G) = \sum_{\substack{T \text{ bon arbre} \\ \text{couvrant de } M}} \left[\prod_{\substack{e \in HE(G) \\ e \notin T}} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}) \right]. \quad (12)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 4.5.2 et de la proposition 4.6.4. □

Bien sûr, les bons arbres couvrants dépendent de la structure de la carte choisie dans le graphe G . Cependant, l'évaluation de la formule combinatoire du théorème 4.6.5 n'est pas liée au choix de la carte enracinée.

4.7 Quelques calculs explicites de numérateurs

Graphes possédant un seul cycle

Dans ce paragraphe, nous considérerons les graphes connexes G possédant un seul cycle. En utilisant le lemme d'émondage 4.4.5, nous pouvons supposer que chaque sommet de G

a pour valence 2. Nous notons par $sources(G)$ (resp. $puits(G)$) l'ensemble des puits (resp. source) de G .

Proposition 4.7.1. *Si G est un graphe connexe dont chaque sommet est de valence 2, alors*

$$N(G) = \sum_{v \in sources(G)} x_v - \sum_{v' \in puits(G)} x_{v'}.$$

Démonstration. G possède seulement un cycle C (dont nous choisirons une orientation arbitraire). Dans le côté droit de l'équation (3) page 40, deux types de termes se présentent :

- Si $|E'| = 1$, $G - E'$ est un arbre et $N(G - E') = 1$.
- Si $|E'| > 1$, $G - E'$ n'est pas connexe et $N(G - E') = 0$.

Ainsi,

$$N(G) = \sum_{e \in HE(C)} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}).$$

La somme ci-dessus peut être simplifiée et est égale à $\sum_{v \in sources(G)} x_v - \sum_{v' \in puits(G)} x_{v'}$. \square

$$\begin{aligned} N \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) &= (x_1 - x_3) N \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) + (x_2 - x_4) N \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \\ &+ (x_4 - x_5) N \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \pm N \left(\begin{array}{c} \text{graphes non} \\ \text{connexes} \end{array} \right) \\ &= (x_1 - x_3) + (x_2 - x_4) + (x_4 - x_5) \\ &= x_1 + x_2 - x_3 - x_5. \end{aligned}$$

Deuxième démonstration (utilisant la décontraction). Considérons le graphe $G' = \overline{G}$ obtenu à l'aide de la construction donnée au théorème 3.4.1 sur G .

Depuis que G' est biparti avec un seul cycle, et d'après le corollaire 4.4.2, nous obtenons que $Num(\Psi_{G'}) = \sum_a \beta_a x_a$, où $\beta_a \in \mathbb{Z}$. Soit a une source de G' . Comme $G' \setminus \{a\}$ est acyclique et connexe, $Num(\Psi_{G' \setminus \{a\}}) = 1$. Étant donné que a est de valence 2, le degré en x_a du dénominateur de la fraction réduite $\Psi_{G'}$ vaut 2. Le théorème 4.2.5 implique que $\beta_a = 1$ si a est un puits et $\beta_a = -1$ si a est une source. Ainsi, nous avons :

$$Num(\Psi_{G'}) = \sum_{a \in sources(G')} x_a - \sum_{a \in puits(G')} x_a.$$

D'après la proposition 4.2.4, on sait que :

$$Num(\Psi_G) = \lim_{\substack{x_{\bar{a}} \rightarrow x_a \\ a \in In(G')}} Num(\Psi_{G'}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} Num(\Psi_G) &= \sum_{a \in sources(G)} x_a - \sum_{a \in puits(G)} x_a + \sum_{a \in In(G)} \lim_{\substack{x_{\bar{a}} \rightarrow x_a \\ a \in In(G')}} (x_a - x_{\bar{a}}) \\ &= \sum_{a \in sources(G)} x_a - \sum_{a \in puits(G)} x_a. \end{aligned}$$

□

Le numérateur du graphe à 1 cycle de la figure 4.12 est égal à

$$Num(\Psi_G) = x_1 + x_2 - x_4 - x_7.$$

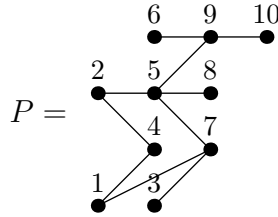


FIG. 4.12 – Graphe à 1 cycle

Graphes possédant un nombre cyclomatique égal à deux

Soit G un graphe connexe de nombre cyclomatique 2. Grâce au lemme d'émondage 4.4.5, nous pouvons supposer que G n'a pas de sommet de valence 1. Comme $|E_G| = |V_G| + 1$, le graphe possède, en plus des sommets de valence 2, soit deux sommets de valence 3, soit un seul sommet de valence 4. Ce paragraphe se rapporte uniquement au cas des graphes possédant deux sommets v et v' de valence 3. Le cas du graphe avec un seul sommet de valence 4 est un cas dégénéré du cas à deux sommets de valence 3. Dans ce cadre, l'ensemble des arêtes peuvent être partitionnées en trois chemins p_0 , p_1 et p_2 d'origine v et de fin v' .

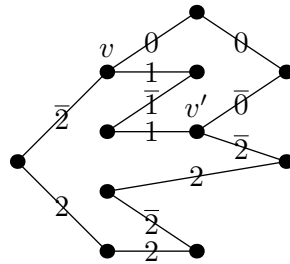


FIG. 4.13 – Exemple de graphe G ayant pour nombre cyclomatique 2

Pour $i = 0, 1, 2$, nous noterons par E_i (resp. par E_i^-) l'ensemble des arêtes du chemin p_i qui apparaissent avec une orientation identique (resp. opposées) à celle du graphe. Un exemple est donné dans la figure 4.13 où nous avons noté sur chaque arête l'indice de l'ensemble auquel l'arête appartient. Si $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \{0, 1, 2, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, nous considérons la somme alternée des graphes :

$$G_I = \sum_{\emptyset \neq E'_1 \subset E_{i_1}, \dots, \emptyset \neq E'_l \subset E_{i_l}} (-1)^{|E'_1|-1} \dots (-1)^{|E'_l|-1} G - (E'_1 \cup \dots \cup E'_l). \quad (13)$$

Analysons le cycle $C = \bar{p}_1 \cdot p_2$: on a $HE(C) = E_{\bar{1}} \cup E_2$. Les sous-ensembles de $HE(C)$ peuvent être partitionnés en trois familles :

- celle des sous-ensembles inclus dans $E_{\bar{1}}$,
- celle des sous-ensembles inclus dans E_2 ,
- les unions de sous-ensembles non vides de $E_{\bar{1}}$ et de E_2 .

Ainsi, si on applique le théorème 3.5.1 sur le cycle C , nous obtenons

$$\varphi(G) = \varphi(G_{\bar{1}}) + \varphi(G_2) - \varphi(G_{2,\bar{1}})$$

où $G_{\bar{1}}, G_2$ et $G_{2,\bar{1}}$ sont définis par l'équation (13).

Chaque graphe de $G_{\bar{1}}$ contient le cycle $\bar{p}_0 \cdot p_2$, car seules des arêtes de p_1 ont été supprimées. Si on applique le théorème 3.5.1 selon ce cycle, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(G_{\bar{1}}) &= \sum_{E' \subset E_{\bar{1}}} (-1)^{|E'| - 1} \varphi(G \setminus E') \\ &= \sum_{E' \subset E_{\bar{1}}} (-1)^{|E'| - 1} \left(\sum_{E'' \subset E_{\bar{0}}} (-1)^{|E''| - 1} \varphi((G \setminus E') \setminus E'') \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E'' \subset E_2} (-1)^{|E''| - 1} \varphi((G \setminus E') \setminus E'') \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{E'' \subset E_2 \\ E''' \subset E_{\bar{0}}} } (-1)^{|E''| - 1} (-1)^{|E'''| - 1} \varphi((G \setminus E') \setminus (E'' \cup E''')) \right) \\ &= \varphi(G_{\bar{0},\bar{1}}) + \varphi(G_{2,\bar{1}}) - \varphi(G_{2,\bar{0},\bar{1}}). \end{aligned}$$

De façon similaire, tous les graphes de G_2 contiennent le cycle $p_1 \cdot \bar{p}_0$, ce qui permet d'écrire $\varphi(G_2) = +\varphi(G_{2,\bar{0}}) + \varphi(G_{1,2}) - \varphi(G_{1,2,\bar{0}})$. Les graphes de $G_{2,\bar{1}}$ n'ont pas de cycles, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \varphi(G) &= \varphi(G_{\bar{0},\bar{1}}) + \varphi(G_{2,\bar{1}}) - \varphi(G_{2,\bar{0},\bar{1}}) \\ &\quad + \varphi(G_{2,\bar{0}}) + \varphi(G_{1,2}) - \varphi(G_{1,2,\bar{0}}) - \varphi(G_{2,\bar{1}}) \\ &= \varphi(G_{\bar{0},\bar{1}}) - \varphi(G_{2,\bar{0},\bar{1}}) + \varphi(G_{2,\bar{0}}) + \varphi(G_{1,2}) - \varphi(G_{1,2,\bar{0}}). \end{aligned}$$

Si nous appliquons Ψ à cette égalité, les graphes non connexes sont supprimés et nous trouvons

$$\Psi(G) = \Psi(G'_{\bar{0},\bar{1}}) + \Psi(G'_{2,\bar{0}}) + \Psi(G'_{1,2})$$

où $G'_I = \sum_{e_1 \in E_{i_1}, \dots, e_l \in E_{i_l}} G - \{e_1, \dots, e_l\}$. Comme tous les graphes de l'expression de G'_I sont

des arbres, le calcul devient (en utilisant X_e au lieu de $x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}$) :

$$\begin{aligned} N(G) &= \sum_{e_{\bar{0}} \in E_{\bar{0}}, e_{\bar{1}} \in E_{\bar{1}}} X_{e_{\bar{0}}} \cdot X_{e_{\bar{1}}} + \sum_{e_{\bar{0}} \in E_{\bar{0}}, e_2 \in E_2} X_{e_{\bar{0}}} \cdot X_{e_2} + \sum_{e_1 \in E_1, e_2 \in E_2} X_{e_1} \cdot X_{e_2} \\ &= \left(\sum_{e_{\bar{0}} \in E_{\bar{0}}} X_{e_{\bar{0}}} \right) \left(\sum_{e_{\bar{1}} \in E_{\bar{1}}} X_{e_{\bar{1}}} \right) + \left(\sum_{e_{\bar{0}} \in E_{\bar{0}}} X_{e_{\bar{0}}} \right) \left(\sum_{e_2 \in E_2} X_{e_2} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{e_1 \in E_1} X_{e_1} \right) \left(\sum_{e_2 \in E_2} X_{e_2} \right). \end{aligned}$$

On peut remarquer que, si $E_{\bar{0}}$ est vide (ce qui revient à dire qu'il existe une chaîne d'origine v et de fin v'), le polynôme $N(G)$ est le produit de deux polynômes de degré 1. C'est un cas particulier du théorème 5.1.1 qui est expliqué au chapitre 5.

Graphes λ -complets et polynômes de Schubert

Nous avons vu (théorème 3.4.1) que les graphes bipartis contiennent toute l'information pour décrire les fractions Ψ_G . Dans ce paragraphe, nous nous proposons de calculer Ψ_G pour un cas spécial de graphes bipartis.

Soit λ une partition, nous appelons **graphe λ -complet** le graphe biparti dont les sommets sont $\{a_1, \dots, a_{l(\lambda)}, b_1, \dots, b_{\lambda_1}\}$ et les arêtes (a_i, b_j) où $j \leq \lambda_i$. Nous noterons par G^λ ce graphe.

Par exemple, la figure 4.14 représente le graphe 54331-complet.

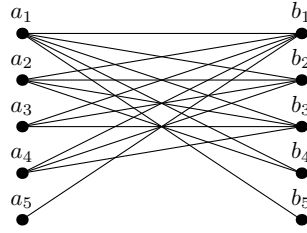


FIG. 4.14 – Le graphe 54331-complet

Soit $f(a_1, \dots, a_n)$ un polynôme sur l'alphabet $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. La **différence divisée** ∂_i (voir [32]) est l'opérateur défini par

$$f \cdot \partial_i = \frac{f - f^{s_i}}{a_i - a_{i+1}}$$

où f^{s_i} est la fonction $f(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n)$.

Nous rappelons la définition des polynômes de Schubert référencée dans le livre [32].

Les **polynômes de Schubert** $\mathbb{Y}_v(A, B)$ sont des polynômes sur l'alphabet $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ et $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ indexés par les vecteurs de $v \in \mathbb{N}^\infty$ ayant un nombre fini $l(v)$ de composantes non nulles. Ces vecteurs sont caractérisés par :

1. si v est décroissant alors,

$$\mathbb{Y}_v(A, B) := \prod_{i=1}^{l(v)} \prod_{j=1}^{v_i} (a_i - b_j),$$

2. s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $v_i < v_{i+1}$ alors,

$$\mathbb{Y}_{v.\partial_i} := \mathbb{Y}_v.\partial_i$$

où $v.\partial_i = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i - 1, v_{i+2}, \dots)$.

Proposition 4.7.2. Soit $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$ une partition avec $\lambda_n > 0$. Pour tout graphe λ -complet G^λ , le numérateur de Ψ_{G^λ} est le polynôme de Schubert

$$\text{Num}(\Psi_{G^\lambda}) = \mathbb{Y}_{0, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1}(A, B).$$

Démonstration. Soit A et B deux alphabets et X un sous-alphabet de A . Soit λ une partition et k un entier vérifiant $\lambda_k > 1$ et $\lambda_{k+1} \leq 1$. Soit $(A^i)_{i \in [1, k-1]}$ une famille d'alphabets définie par $A^i = \{a_i, \dots, a_k\}$. Soit $(\beta^i)_{i \in [1, k-1]}$ une famille de partitions définie par $\beta^i = [\lambda_{i+1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k]$. Nous noterons par $G^\lambda(X)$ le graphe λ -complet de X et B :

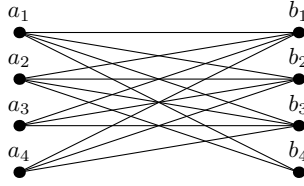


FIG. 4.15 – Le graphe G^{β^1} pour $\lambda = 54331$ ($\beta^1 = 4433$)

$$\mathcal{G}^\lambda(X) := \mathcal{G}^\lambda(X, B).$$

Nous allons d'abord prouver récursivement la formule suivante :

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\beta^i}(A^i)}) = (\mathbb{Y}_{\lambda_{i+1}}(a_i) \cdot \text{Num}(\Psi_{G^{\beta^{i+1}}}(A^{i+1}))) \partial_i. \quad (14)$$

On note par G' l'expression $G^{\beta^i}(A^i)$. D'après le lemme 3.3.1, si on linéarise partiellement le graphe induit par les sommets a_i et a_{i+1} , on trouve

$$\Psi_{G'} = \Psi_{P'_{a_i a_{i+1}}} + \Psi_{P'_{a_{i+1} a_i}}.$$

Le diagramme de Hasse de $G'_{a_i a_{i+1}}$ se construit à partir du diagramme de Hasse de G' en supprimant toutes les arêtes ayant a_i comme sommet et en ajoutant l'arête (a_i, a_{i+1}) . De façon identique, le diagramme de Hasse de $G'_{a_{i+1} a_i}$ peut être obtenu en appliquant la transposition s_i sur $G'_{a_i a_{i+1}}$.

Le sommet a_i (resp. a_{i+1}) est libre dans $G'_{a_i a_{i+1}}$ (resp. $G'_{a_{i+1} a_i}$) et peut être émondé. La proposition 4.4.4 et le corollaire 4.4.1 se traduisent par

$$\Psi_{G'} = \frac{1}{x_{a_i} - x_{a_{i+1}}} \cdot (\Psi_{G^{[\beta_2^i \dots \beta_k^i]}(A_i \setminus \{a_i\})} - \Psi_{G^{[\beta_2^i \dots \beta_k^i]}(A_i \setminus \{a_{i+1}\})}). \quad (15)$$

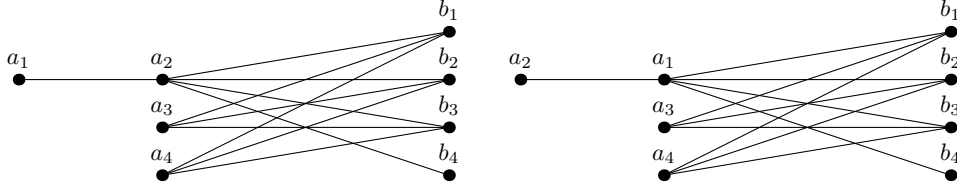


FIG. 4.16 – Linéarisation partielle du graphe induit par a_1 et a_2 dans le graphe β^1 -complet, où $\lambda = 54331$ ($\beta^1 = 4433$)

En constatant que

$$\mathbb{Y}_{\lambda_{i+1}}(x) = \prod_{j=1}^{\lambda_{i+1}} x - b_j$$

et par l'utilisation du corollaire 4.4.1 sur l'équation 15 nous avons :

$$\Psi_{G'} = \frac{1}{a_i - a_{i+1}} \cdot \frac{\mathbb{Y}_{\lambda_{i+1}}(a_i) \cdot \text{Num}(\Psi_{G^{[\beta_2^i \dots \beta_k^i]}(A \setminus \{a_i\})}) - \mathbb{Y}_{\lambda_{i+1}}(a_{i+1}) \cdot \text{Num}(\Psi_{G^{[\beta_2^i \dots \beta_k^i]}(A \setminus \{a_{i+1}\})})}{\prod_{c \leq d} (c - d)}.$$

Ainsi,

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\beta^i}(A^i)}) = \left(\mathbb{Y}_{\lambda_{i+1}}(a_i) \cdot \text{Num}(\Psi_{G^{[\beta_2^i \dots \beta_k^i]}(A^{i+1})}) \right) \partial_i. \quad (16)$$

Si on émonde le graphe $G^{[\beta_2^i \dots \beta_k^i]}(A^{i+1})$, on obtient le graphe $G^{\beta^{i+1}}(A^{i+1})$ et on peut conclure que

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\beta^i}(A^i)}) = \left(\mathbb{Y}_{\lambda_{i+1}}(a_i) \cdot \text{Num}(\Psi_{G^{\beta^{i+1}}(A^{i+1})}) \right) \partial_i. \quad (17)$$

Grâce à l'équation (17) nous trouvons

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\beta^1}}) = \left(\mathbb{Y}_{\lambda_2}(a_1) \dots \mathbb{Y}_{\lambda_{k-1}}(a_{k-2}) \text{Num}(\Psi_{G^{\lambda_k \lambda_k}(\{a_{k-1}, a_k\})}) \right) \partial_{k-2} \dots \partial_1.$$

Au moyen de l'équation (16), nous déduisons que

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\lambda_k \lambda_k}(\{a_{k-1}, a_k\})}) = \left(\mathbb{Y}_{\lambda_k}(a_{k-1}) \text{Num}(\Psi_{G^{\lambda_k}(\{a_k\})}) \right) \partial_{k-1}.$$

Comme $G^{\lambda_k}(\{a_k\})$ n'a pas de cycle, $\text{Num}(\Psi_{G^{\lambda_k}(\{a_k\})}) = 1$ et

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\beta^1}}) = \left(\mathbb{Y}_{\lambda_2}(a_1) \dots \mathbb{Y}_{\lambda_k}(a_{k-1}) \right) \partial_{k-1} \dots \partial_1.$$

Finalement, nous arrivons au résultat

$$\text{Num}(\Psi_{G^{\beta^1}}) = \mathbb{Y}_{0, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_k - 1}.$$

Il est facile d'observer que $\mathbf{Emond}(G^\lambda) = G^{\beta^1}$, ce qui donne

$$\text{Num}(\Psi_{G^\lambda}) = \mathbb{Y}_{0, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_k - 1} = \mathbb{Y}_{0, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1}.$$

□

Nous remarquons que les graphes λ -complets sont des graphes très particuliers. En effet, pour une partition donnée, à une renumérotation près des sommets $\{a_1, \dots, a_{l(\lambda)}, b_1, \dots, b_{\lambda_1}\}$, l'ensemble des extensions linéaires de G_λ est un intervalle $[Id, \sigma_\lambda]$ du permutoèdre de $\mathfrak{S}_{l(\lambda)+\lambda_1}$. Pour déterminer la permutation σ_λ , il suffit de réaliser la construction décrite ci-après. Sur le diagramme de Ferrer λ , nous numérotions les cotés nord-est des boîtes situées les plus au nord-est du diagramme. Il y a exactement $l(\lambda) + \lambda_1$ côtés, nous les numérotions de 1 à $l(\lambda) + \lambda_1$ en partant du sud-ouest et en finissant au nord-ouest.

Par exemple, pour $\lambda = 554221$, nous obtenons la numérotation de la figure 4.17. Le mot

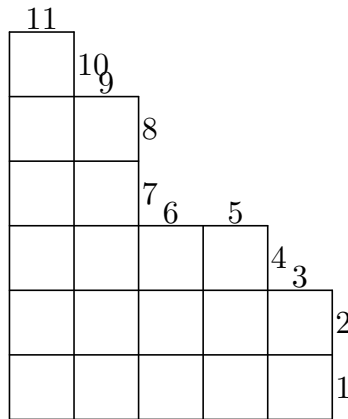


FIG. 4.17 – Numérotation d’une partition

σ_λ est obtenu en lisant les numéros de tous les côtés verticaux du nord au sud, suivi de tous les côté horizontal de l’ouest vers l’est.

Sur le précédent exemple ($\lambda = 554221$) la figure 4.19 illustre la construction du mot σ_λ .

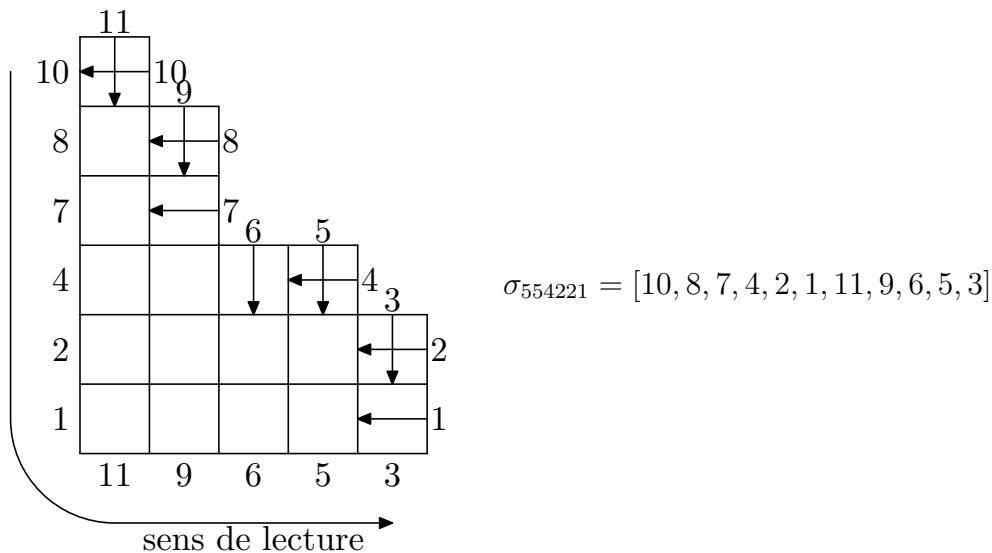


FIG. 4.18 – Construction de la permutation σ_{554221}

À une renumérotation près des sommets, le graphe de permutation de σ_λ est identique à G_λ .

Proposition 4.7.3. *Soit λ une partition, alors*

$$\mathbb{G}_{\sigma_\lambda} = G_\lambda|_{[\sigma_\lambda(1), \dots, \sigma_\lambda(n)] \rightarrow [a_{l(\lambda)}, \dots, a_1, b_1, \dots, b_{\lambda_1}]}$$

Par exemple, si nous reprenons la permutation $\lambda = 554221$, pour laquelle

$$\sigma_\lambda = [10, 8, 7, 4, 2, 1, 11, 9, 6, 5, 3],$$

nous obtenons les graphes de la figure 4.18.

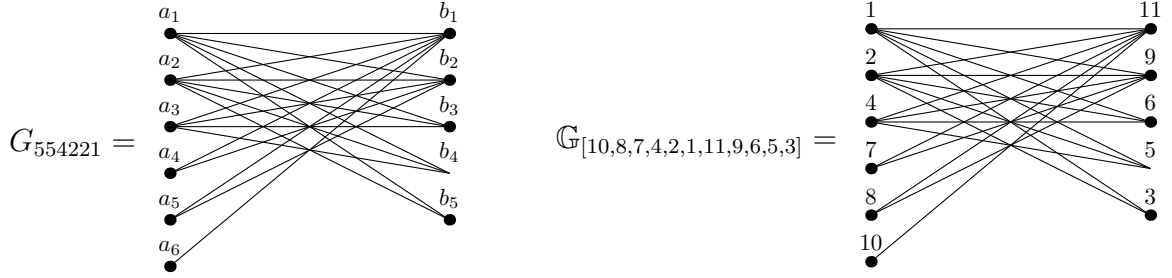


FIG. 4.19 – Graphes de partition et de permutation

Cas particulier du graphe biparti complet

Un cas particulier de graphe λ -complet est le graphe biparti complet. Ce paragraphe donne une formule pour le numérateur des graphes bipartis complets.

Soit G le graphe construit à partir des deux ensembles de sommets $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ de sorte que les arêtes de G soient les couples $X \times Y$.

Soit $G' = G_{y_1 y_2 \dots y_m}$ le graphe construit en linéarisant G avec l'ordre total $y_1 < \dots < y_m$ dans Y . Les fractions rationnelles Ψ_G et $\Psi_{G'}$ sont reliées par l'identité suivante :

$$\Psi_G = \Psi_{G'} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma^Y$$

où σ^Y est l'action de la permutation σ sur l'alphabet Y . Le graphe G' est fortement planaire. D'après le théorème de Greene (théorème 4.3.1), nous avons

$$\Psi_{G'} = \frac{1}{(x_1 - y_1) \cdots (x_n - y_1)} \frac{1}{(y_1 - y_2) \cdots (y_{m-1} - y_m)} = \frac{1}{R(X, Y)} \frac{R(X, Y \setminus y_1)}{\prod_{i=1}^{m-1} y_i - y_{i+1}}$$

où $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \prod_{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}} (x - y)$ est le **résultant** sur les alphabets \mathbb{X} et \mathbb{Y} .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi_G &= \left(\frac{1}{R(X, Y)} \frac{R(X, Y \setminus y_1)}{\prod_{i=1}^{m-1} y_i - y_{i+1}} \right) \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma^Y \\ &= \left(\frac{1}{R(X, Y)} \frac{S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1))}{\prod_{i=1}^{m-1} y_i - y_{i+1}} \right) \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma^Y \\ &= \left(\frac{1}{R(X, Y)} \prod_{i < j-1} (y_i - y_j) S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1)) \right) \cdot \frac{1}{\Delta(Y)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma^Y \end{aligned}$$

où S_λ est la fonction de Schur (voir par exemple [32]) et $\Delta(Y)$ le déterminant de Vandermonde sur l'alphabet Y . Soit ∂_i^Y la différence divisée appliquée à l'alphabet Y :

$$\partial_i^Y = \frac{1}{y_i - y_{i+1}}(1 - s_i)$$

où s_i est la i^e transposition élémentaire. L'opérateur $\frac{1}{\Delta(Y)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma^Y$ admet une expression en termes de différences divisées (voir proposition 7.6.2 dans [32]) :

$$\frac{1}{\Delta(Y)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma^Y = \partial_\omega^Y := (\partial_{m-1}^Y)(\partial_{m-2}^Y \partial_{m-1}^Y) \cdots (\partial_1^Y \cdots \partial_{m-1}^Y).$$

Étant donné que le polynôme $S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1))$ est symétrique en y_2, \dots, y_m , nous déduisons que

$$\prod_{i < j-1} (y_i - y_j) S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1)) \partial_\omega^Y = \prod_{i < j-1} (y_i - y_j) (\partial_{m-1}^Y)(\partial_{m-2}^Y \partial_{m-1}^Y) \cdots (\partial_2^Y \cdots \partial_{m-1}^Y) \times \\ \times S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1)) (\partial_1^Y \cdots \partial_{m-1}^Y).$$

Le polynôme de Vandermonde $\prod_{i < j-1} (y_i - y_j)$ est de degré $\binom{n-1}{2}$. Si nous appliquons $(\partial_{m-1}^Y)(\partial_{m-2}^Y \partial_{m-1}^Y) \cdots (\partial_2^Y \cdots \partial_{m-1}^Y)$ nous obtenons un terme constant. Plus précisément, le seul monôme qui n'a pas de contribution nulle est $(-1)^{\binom{n-1}{2}} y_m^{m-2} y_{m-1}^{m-3} \cdots y_3$. De cette manière, un calcul direct établit

$$\prod_{i < j-1} (y_i - y_j) (\partial_{m-1}^Y)(\partial_{m-2}^Y \partial_{m-1}^Y) \cdots (\partial_2^Y \cdots \partial_{m-1}^Y) = 1.$$

Nous parvenons à une écriture compacte pour Ψ_G :

$$\Psi_G = \frac{1}{R(X, Y)} S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1)) \partial_1^Y \cdots \partial_{m-1}^Y.$$

Le polynôme $S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1)) \partial_1^Y \cdots \partial_{m-1}^Y$ est l'interpolation de Lagrange de $S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1))$ considérée comme une fonction $f(y_1, Y \setminus y_1)$ (voir [32, 18]). Sachant que la fonction $S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1))$ est égale à la fonction multi-Schur ¹

$$S_{(m-1)^{n-1}, m-1}(X - Y; X - (Y \setminus y_1)) := \begin{vmatrix} S_{m-1}(X - Y) & \cdots & S_{m-n}(X - Y) & S_{m-n-1}(X - (Y \setminus y_1)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{m+n-2}(X - Y) & \cdots & S_{m-3}(X - Y) & S_{m-2}(X - (Y \setminus y_1)) \\ S_{m+n-1}(X - Y) & \cdots & S_{m-2}(X - Y) & S_{m-1}(X - (Y \setminus y_1)) \end{vmatrix}$$

nous trouvons que

$$S_{(m-1)^n}(X - (Y \setminus y_1)) \partial_1^Y \cdots \partial_{m-1}^Y = S_{(m-1)^{n-1}, m-1}(X - Y; X - (Y \setminus y_1)) \partial_1^Y \cdots \partial_{m-1}^Y \\ = S_{(m-1)^{n-1}}(X - Y).$$

¹Voir Chapitre 1 dans [32] pour une définition plus générale et une liste plus complète de propriétés.

L'expression de Ψ_G devient :

Proposition 4.7.4.

$$\Psi_G = \frac{1}{R(X, Y)} S_{(m-1)^{n-1}}(X - Y).$$

Dans ce chapitre, nous avons établi plusieurs formules récursives pour Ψ_G en utilisant les différentes opérations sur les graphes définies au chapitre 4.

Le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite de Ψ_G ont été caractérisés pour tous les graphes (et donc pour tous les posets).

Enfin, nous avons proposé quelques exemples concrets de calcul du numérateur et du dénominateur pour les graphes déconnectés, pour les graphes possédant un nombre cyclomatique égal à 0, 1 et 2, pour les graphes λ -complets et les graphes bipartis complets.

Si le numérateur et le dénominateur de Ψ_G sont maintenant entièrement connus, la factorisation du numérateur demeure mal élucidée. Le chapitre suivant donne une condition qui explique certaines de ces factorisations.

5

Factorisation du numérateur

Précédemment (paragraphe 4.5 et 4.6), nous avons trouvé une formule additive du numérateur de la fraction réduite Ψ_G . La formule de Greene pour les posets planaires (voir sous-section 4.3) et l'exemple de la figure 5.1 montrent que le numérateur peut être écrit, dans certains cas, comme un produit de facteurs non triviaux.

$$N \left(\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \bullet & \bullet \\ 2 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \bullet & \bullet \\ 2 & 5 \\ \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

FIG. 5.1 – Exemple de factorisation du numérateur

Dans ce chapitre, nous donnons une condition simple sur le graphe G qui implique une factorisation de $N(G)$: la factorisation par chaîne.

Puis, nous utilisons cette factorisation pour prouver et étendre le théorème de Greene (théorème 4.3.1) à une classe plus large de graphes (théorème 5.2.4).

5.1 Factorisation par chaîne

Sachant que $N(G)$ est nul pour les graphes non connexes, nous supposons par la suite que tous les graphes sont connexes.

De même, sachant que le numérateur de la fraction réduite Ψ_G est égal à $N(\mathcal{H}(G))$, l'étude de $N(G)$ sur les graphes est équivalente à celle de $N(G)$ sur les graphes sans circuits et sans relations transitives (une arête ayant même origine et même fin qu'une autre chaîne).

Soit G un graphe, c une chaîne de G , V_c l'ensemble des sommets de c (incluant l'origine et la fin de la chaîne) et G_1, \dots, G_k tous les graphes connexes de $G \setminus V_c$. Le sous-graphe

\overline{G}_i induit sur $V_{G_i} \cup V_c$ (pour $1 \leq i \leq k$) sera appelé région de G . Considérons, par exemple le graphe de la figure 5.2 et la chaîne $c = (1, 2, 13, 3, 4, 5, 6, 14)$. Sous cette forme, le graphe $G \setminus V_c$ possède quatre composantes connexes.

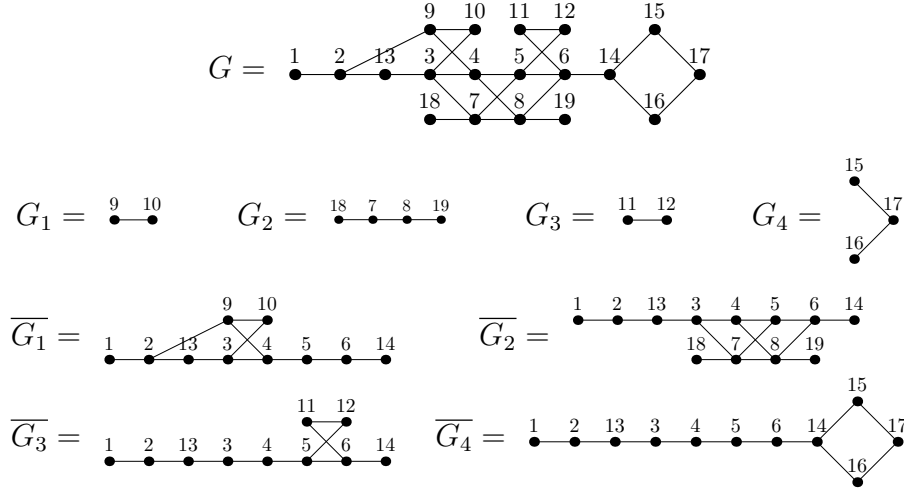


FIG. 5.2 – Un graphe G avec une chaîne c , les composantes G_i de $G \setminus c$ et les régions correspondantes \overline{G}_i

Le théorème de factorisation par chaîne s'énonce de la façon suivante :

Théorème 5.1.1. *Soit G un graphe, c une chaîne de G et $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_k$ les régions correspondant à G . Alors nous avons*

$$N(G) = \prod_{j=1}^k N(\overline{G}_j).$$

Par exemple, le numérateur de la fraction rationnelle associée au graphe de la figure 5.2 peut être exprimé comme un produit de quatre facteurs non triviaux.

Preuve. L'idée centrale est d'appliquer le théorème 3.5.1 sur les cycles C contenus dans une seule région et telle que $HE(C) \cap c = \emptyset$. Cela signifie que les arêtes de c peuvent apparaître dans C , mais uniquement avec la **mauvaise orientation**. Ainsi, quand nous appliquons la proposition 4.5.2, nous ne modifions pas la chaîne c .

Une illustration de la preuve est disponible dans la figure 5.3.

La première étape, réalisée par le lemme 5.1.2 et illustrée par la figure 5.4, consiste à prouver l'existence de tels cycles.

Lemme 5.1.2. *Soit G un graphe et c une chaîne de G . On note par $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_k$ les régions correspondantes. Si \overline{G}_1 n'est pas un arbre, il existe un cycle C de \overline{G}_1 tel que $HE(C) \cap c = \emptyset$.*

Démonstration. Choisissons un cycle C_0 de \overline{G}_1 . Deux cas doivent être examinés :

1) Le cycle C_0 n'a pas de sommet en commun avec c . Rien ne doit être fait.

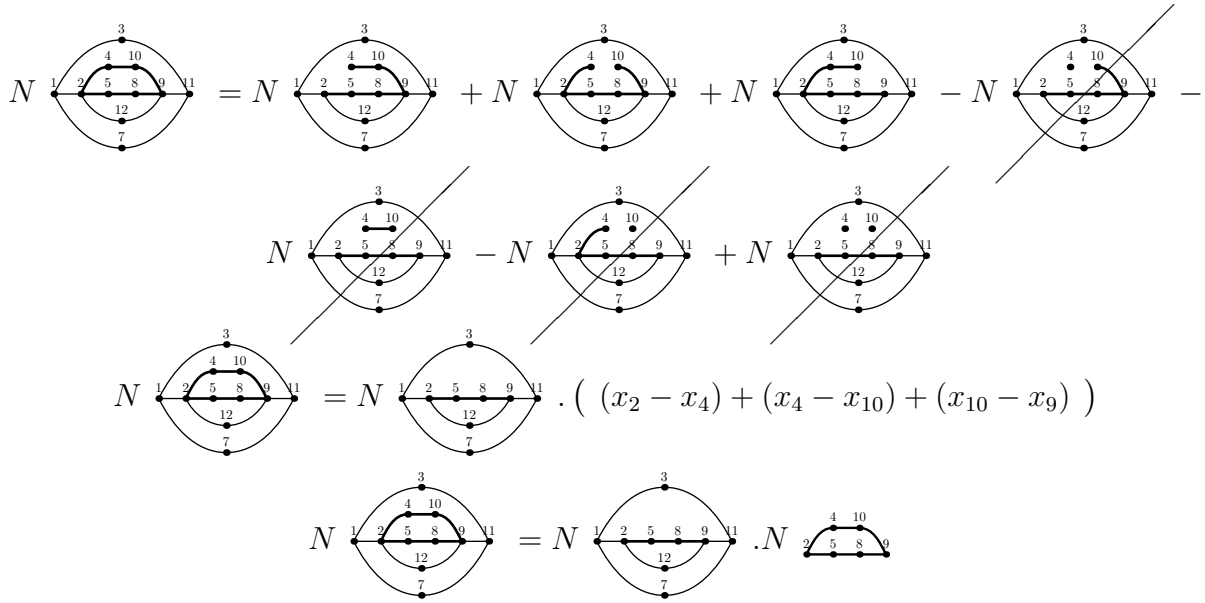


FIG. 5.3 – Illustration de la preuve du théorème 5.1.1 (factorisation par chaîne)

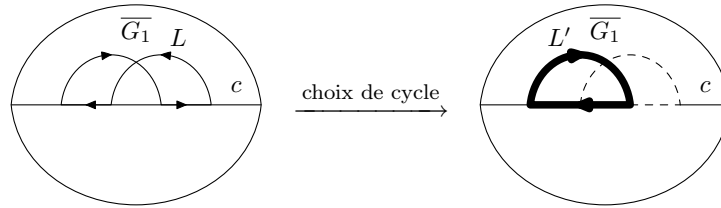


FIG. 5.4 – Bon choix de cycle

2) Le cycle $C_0 = (e_1, \dots, e_l)$ possède au moins un sommet en commun avec c . Comme les cycles restent invariants par permutation cyclique de leurs arêtes, on peut assurer que $v' = \alpha(e_1)$ est un sommet de c . Soit h le plus petit indice tel que $v'' = \omega(e_h)$ devienne aussi un sommet de c . L'indice h existe car $\omega(e_l) = \alpha(e_1)$ est un sommet de c . Étant donné que nous pouvons trouver une sous-chaîne (éventuellement vide) c' de c allant de v' à v'' si $v' \leq v''$ ou allant de v'' à v' si $v'' \leq v'$, le cycle C se construit de la façon suivante :

$$C = \begin{cases} (e_1, \dots, e_h) \cdot \bar{c}' & \text{si } v' \leq v'' \\ (e_h, \dots, e_1) \cdot \bar{c}' & \text{si } v'' \leq v' \end{cases}$$

où \bar{c}' représente la chaîne c' dans l'autre orientation. On remarque que toutes les arêtes de c' sont dans le *mauvais* sens dans C et que $HE(C) \cap c = \emptyset$.

□

Revenons à la preuve du théorème 5.1.1. Nous allons réaliser la démonstration par induction sur k . Si $k = 1$, alors le résultat est évident.

Supposons que notre proposition soit vraie pour $k = n - 1$. Soit G un graphe, et c une chaîne de G telle qu'il existe n régions $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_n$ associées à G .

Si \overline{G}_1 est un arbre, il est possible d'appliquer un émondage pour obtenir la chaîne c . Nous pouvons émonder les mêmes sommets dans le graphe G car les sommets supprimés ne sont pas reliés aux sous-graphes G_i . En effet, les sous-graphes G_i sont des composantes connexes différentes de $G \setminus V_c$. Grâce au lemme d'émondage 4.4.5, on obtient :

$$N(G) = N\left(\bigcup_{i=2}^n \overline{G}_i\right) = \prod_{i=2}^k N(\overline{G}_i),$$

où la seconde égalité est due à l'hypothèse de récurrence. Le théorème est prouvé dans ce cas.

Si \overline{G}_1 n'est pas un arbre, nous procédons par induction sur le nombre cyclomatique de \overline{G}_1 .

Le lemme 5.1.2 nous donne un cycle C_1 de \overline{G}_1 tel que $HE(C_1) \cap V_c = \emptyset$. Lorsque nous appliquons la proposition 4.5.2 sur C_1 , nous avons

$$N(G) = \sum_{\substack{E_1 \subset HE(C_1) \\ E_1 \neq \emptyset}} \pm N(G \setminus E_1) \left(\prod_{e \in E_1} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}) \right).$$

Quelques uns des graphes $G \setminus E_1$ sont non connexes (si et seulement si $\overline{G}_1 \setminus E_1$ n'est pas connexe). La valeur de N sur ces graphes vaut 0. Ainsi, ils n'apparaissent pas dans les formules (18) et (19).

Chaque graphe connexe $G \setminus E_1$ contient la chaîne c (grâce à l'assertion $HE(C_1) \cap c = \emptyset$). Les régions associées à c sont $\overline{G}_2, \dots, \overline{G}_n$ et $\overline{G}_1 \setminus E_1$ (la dernière région peut être une union de certaines régions, ce qui n'entrave pas la suite du raisonnement). Cependant, $\overline{G}_1 \setminus E_1$ possède un nombre cyclomatique moins grand que \overline{G}_1 . Dans ce cas, nous pouvons utiliser l'hypothèse de récurrence et déduire :

$$N(G \setminus E_1) = N(\overline{G}_1 \setminus E_1) \cdot N(\overline{G}_2) \cdot \dots \cdot N(\overline{G}_n).$$

Finalement,

$$N(G) = \left(\sum_{\substack{E_1 \subset HE(C_1) \\ E_1 \neq \emptyset}} \pm \prod_{e \in E_1} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}) N(\overline{G}_1 \setminus E_1) \right) \cdot N(\overline{G}_2) \cdot \dots \cdot N(\overline{G}_n) \quad (18)$$

où la somme est restreinte aux ensembles E_1 tels que $G \setminus E_1$ est connexe. Cependant, la proposition 4.5.2 appliquée au cycle C_1 de G_1 montre que :

$$N(\overline{G}_1) = \sum_{\substack{E_1 \subset HE(C_1) \\ E_1 \neq \emptyset}} \pm \prod_{e \in E_1} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)}) N(\overline{G}_1 \setminus E_1) \quad (19)$$

où la somme est restreinte aux ensembles E_1 vérifiant que $\overline{G}_1 \setminus E_1$ est connexe, ce qui revient à vérifier que $G \setminus E_1$ est connexe.

Ceci finit la preuve du théorème 5.1.1.

5.2 Factorisations complètes des posets planaires

Dans l'article [23], C. Greene a proposé une formule close pour la somme $\Psi(G)$ où G est le graphe minimal (diagramme de Hasse) d'un **poset planaire** (voir la section 4.3 et le théorème 4.3.1). Dans ce cas, le numérateur $N(G)$ peut être écrit comme un produit de termes de degré 1 (théorème 4.3.1). Nous verrons que la propriété de factorisation est une conséquence du théorème 5.1.1. Mieux encore, ce dernier permet d'étendre le théorème de Greene (théorème 4.3.1) qui peut s'appliquer sur un ensemble plus important de graphes.

Il est à noter que le graphe induit d'un graphe fortement planaire est fortement planaire (la définition des graphes fortement planaires a été donnée à la section 4.3). Même si on supprime quelques arêtes, on ne peut pas obtenir un graphe non planaire. En particulier, les régions d'un graphe planaire sont, elles aussi, des graphes planaires.

De plus, un graphe avec un seul cycle et sans sommet de valence 1 est fortement planaire si et seulement s'il possède une unique source et un unique puits. Dans ce cas, nous appellerons ce graphe un **diamant**. Un exemple de diamant est reproduit dans la figure 5.5.

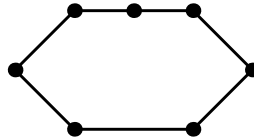


FIG. 5.5 – Un diamant

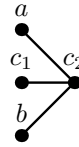
Quand le graphe est fortement planaire, nous allons montrer qu'il est toujours possible de trouver une chaîne qui déconnecte le graphe. Ce qui explique le fait que la fonction $N(G)$ peut être factorisée en facteur de degré 1.

Proposition 5.2.1. *Soit G un graphe orienté, fortement planaire, possédant un nombre de cycles plus grand que 1, alors il existe une chaîne de G , séparant G en deux régions non triviales (chaque région contient au moins un cycle).*

Démonstration. En appliquant un émondage sur le graphe G , on peut supposer le fait que G n'a pas de sommet de valence 1. Dans ce contexte, comme G possède au moins 2 cycles, il possède au moins un sommet c_2 de valence 3 ou plus. Ainsi, à une symétrie verticale près, nous avons l'un des deux cas suivants (dans le second cas, on supposera que c_2 constitue la fin d'exactly 2 arêtes) :



Dans le premier cas, choisissons les étiquettes des sommets selon ce schéma :



Dans le second cas, nous définissons par induction c_i pour $i \geq 3$. Nous choisissons pour c_i n'importe quel sommet tel qu'il existe une arête d'origine c_{i-1} et de fin c_i . Pour $k \geq 3$, on ne peut pas définir c_{k+1} si c_k n'est l'origine d'aucune arête. Alors, comme c_k n'est pas un sommet de valence 1, il est nécessairement la fin d'une arête dont l'origine est le sommet $b \neq c_{k-1}$. En dernier lieu, on appelle c_1 et a les origines des deux arêtes dont la fin est c_2 . Pour distinguer le sommet c_1 du sommet a , il faut savoir si b est au-dessus ou en dessous de c_{k-1} (voir la figure ci-après).



Dans tout les cas, les c_i sont des sommets d'une chaîne c de G . Cette chaîne c peut être prolongée en une chaîne maximale c_{\max} . Nous rappelons qu'avec la définition de C. Greene concernant les graphes planaires, le graphe $G_{0,\infty}$, peut toujours être plongé dans le plan sans arêtes qui se croisent. Il existe alors une chaîne de $G_{0,\infty}$ contenant v_0 , c_{\max} et v_∞ . Cette chaîne coupe $G_{0,\infty}$ en au moins deux régions. La première région contient a et l'autre contient b . Cette propriété reste vraie pour la chaîne c_{\max} de G . Comme G n'a pas de sommet de valence 1, les régions correspondantes possèdent un cycle ou plus. \square

Corollaire 5.2.2. *Soit G un poset planaire fortement connexe. En itérant la factorisation par chaîne, on peut écrire $N(G)$ comme un produit de numérateurs de fonctions rationnelles associées aux diamants.*

Démonstration. La proposition 5.2.1 et le théorème 5.1.1 impliquent que $N(G)$ peut être factorisé en un produit de numérateurs de sous-graphes avec un seul cycle. Comme les sous-graphes sont fortement planaires, l'opération d'émondage transforme les sous-graphes en diamants, ce qui finit la preuve. \square

Il est à noter que pour un diamant, la fonction N possède une formule explicite (proposition 4.7.1) :

$$N(D) = x_{\min(D)} - x_{\max(D)},$$

soit de manière équivalente,

$$\Psi(D) = \prod_{y,z \in P} (x_y - x_z)^{\mu_D(y,z)}$$

où μ_D est la fonction de Möbius du poset associé au diamant D .

La dernière propriété peut être étendue à n'importe quel poset planaire grâce à la compatibilité suivante entre les chaînes déconnectant le graphe et la fonction de Möbius :

Proposition 5.2.3. *Soit P un poset, c une chaîne du diagramme de Hasse de P (i.e. le graphe minimal représentant P), P_1, \dots, P_n les n régions associées à c , et i, j deux éléments de P , alors*

$$\mu_P(i, j) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \preceq j, \\ \sum_{k=1}^n \mu_{P_k}(i, j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous supposons que $\mu_Q(i, j) = 0$ si $i \notin Q$ ou $j \notin Q$.

La preuve est réalisée au paragraphe 5.3.

Cette proposition associée au corollaire 5.2.2 prouve le théorème de Greene. En fait, cette preuve fonctionne aussi pour quelques posets non planaires et la formule de Greene reste vraie pour ces posets. Par exemple, le poset de la figure 5.6 n'est pas planaire mais peut être factorisé et le numérateur peut être exprimé avec la fonction de Möbius. C'est le cas de n'importe quel agrégat de diamants.

$$\begin{aligned} N \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme de Hasse avec 9 nœuds (1-6 en ligne, 7-8 au-dessus, 9 en dessous)} \end{array} \right) &= N \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme de Hasse avec 4 nœuds (1-4 en ligne, 7 au-dessus)} \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme de Hasse avec 5 nœuds (2-5 en ligne, 8 au-dessus)} \end{array} \right) \\ &\quad \cdot N \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme de Hasse avec 6 nœuds (3-6 en ligne, 9 en dessous)} \end{array} \right) \\ &= (x_1 - x_4) \cdot (x_2 - x_5) \cdot (x_3 - x_6) \end{aligned}$$

FIG. 5.6 – Un poset non planaire pour lequel la formule de Greene reste vraie

Cette remarque permet d'étendre le théorème de Greene aux agrégats de diamants.

Un graphe G est un **agrégat de diamants** si et seulement s'il existe une succession de factorisations par chaîne qui transforme le graphe G en un ensemble de diamants.

Théorème 5.2.4 (théorème de Greene étendu). *Soit G un agrégat de diamants, alors*

$$\Psi_G = \begin{cases} 0 & \text{si } G \text{ n'est pas connexe,} \\ \prod_{a,b \in V_G} (x_a - x_b)^{\mu(a,b)} & \text{si } G \text{ est connexe.} \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème 5.1.1 et de la proposition 5.2.3. \square

5.3 Chaînes et fonction de Möbius

Ce paragraphe est une preuve de la proposition technique 5.2.3.

Démonstration. Quand $i \preceq j$ (il existe une arête de i vers j dans le diagramme de Hasse du poset), on a toujours $\mu_P(i, j) = -1$.

Quand $i \leq j$, mais que $i \not\leq_c j$, quatre cas doivent être examinés :

premier cas i, j n'appartiennent pas à V_c et sont dans deux régions différentes du poset,

deuxième cas i, j n'appartiennent pas à V_c , et sont dans la même région du poset,

troisième cas i est un élément de V_c , mais j ne l'est pas,

quatrième cas i et j sont deux éléments de V_c .

Les figures 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10 résument les quatre cas. La configuration où i n'appartient pas à V_c , mais où j appartient à V_c a été volontairement omise puisqu'elle est obtenue à partir du troisième cas en considérant le poset opposé.

Soit P_1, \dots, P_n les n régions associées à P .

On note par $[a, b]_P$ l'ensemble

$$[a, b]_P = \{k \mid a \leq_P k \leq_P b\},$$

par $[a, b[_P$ l'ensemble

$$[a, b[_P = \{k \mid a \leq_P k <_P b\}.$$

On remarque que $[i, j]_{P_1} = [i, j]_P \cap P_1$ car P_1 est une région définie par une chaîne qui déconnecte le graphe. Cette propriété n'est pas vraie pour n'importe quel poset associé à un sous-graphe complet de G .

Si $[i, j]_P$ n'a pas une intersection vide avec V_c , nous désignerons par L l'élément maximal de cette intersection.

- 1) Supposons que $i \in P_2 \setminus V_c$ et $j \in P_1 \setminus V_c$. Nous voulons prouver que $\mu_P(i, j) = 0$ et faisons l'hypothèse (preuve par récurrence) que la propriété est vraie pour tout $j' \in P_1 \setminus V_c$ tel que $j' < j$.

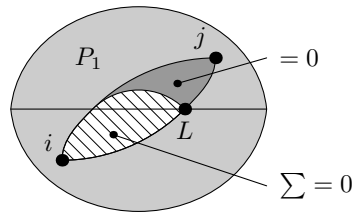


FIG. 5.7 – Cas 1 : $i \notin V_c$ et j n'est pas dans la même région que i

Comme $i \leq j$, il existe une chaîne dans le diagramme de Hasse de P allant de i à j . Comme c est une chaîne séparant P_1 et P_2 , n'importe quelle chaîne d'origine i et de fin j intersecte V_c . Ainsi, L existe et n'importe quel élément entre i et j qui n'est pas dans P_1 , est inférieur ou égal à L . Nous en déduisons donc

$$[i, j]_P \cap (P_2 \cup \dots \cup P_m) \subseteq [i, L]_P \subseteq [i, j]_P.$$

Par définition de la fonction de Möbius,

$$\mu_P(i, j) = - \sum_{k \in [i, L]_P} \mu_P(i, k) - \sum_{k \in [i, j]_P \cap P_1 \setminus [i, L]_P} \mu_P(i, k).$$

Comme

$$\sum_{k \in [i, L]_P} \mu_P(i, k) = 0,$$

il apparaît que

$$\mu_P(i, j) = - \sum_{k \in [i, j]_{P \cap P_1 \setminus [i, L]_P}} \mu_P(i, k). \quad (20)$$

Par hypothèse de récurrence, $\mu_P(i, j) = 0$.

2) Supposons maintenant que $i, j \in P_1 \setminus V_c$. Nous voulons prouver que $\mu_P(i, j) = \mu_{P_1}(i, j)$.

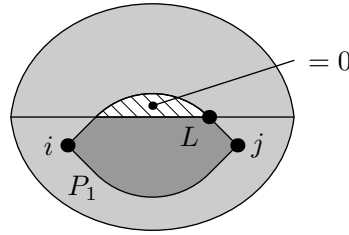


FIG. 5.8 – Cas 2 : $i \notin V_c$ et j est dans la même région que i

Par définition de la fonction de Möbius, nous déduisons :

$$\mu_P(i, j) = - \sum_{k \in [i, j]_{P \cap (P_2 \cup \dots \cup P_m \setminus V_c)}} \mu_P(i, k) - \sum_{k \in [i, j]_{P_1}} \mu_P(i, k).$$

Le cas 1 donne : $\sum_{k \in [i, j]_{P \cap (P_2 \cup \dots \cup P_m \setminus V_c)}} \mu_P(i, k) = 0$. Donc,

$$\mu_P(i, j) = - \sum_{k \in [i, j]_{P_1}} \mu_P(i, k). \quad (21)$$

et une récurrence immédiate prouve que $\mu_P(i, j) = \mu_{P_1}(i, j)$.

3) Supposons que $i \in V_c$ et $j \in P_1 \setminus V_c$. Comme $i \in V_c \cap [i, j]_P$, l'ensemble n'est pas vide et L existe.

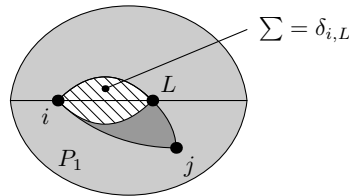


FIG. 5.9 – Cas 3 : $i \in V_c$ et $j \notin V_c$

Nous allons prouver maintenant que $\mu_P(i, j) = \mu_{P_1}(i, j)$ par récurrence sur j . Comme

$$\sum_{k \in [i, L]_P} \mu_P(i, k) = \delta_{i, L}$$

on a :

$$\mu_P(i, j) = - \sum_{k \in [i, j]_P \setminus [i, L]_P} \mu_P(i, k) - \delta_{i, L}.$$

De manière similaire,

$$\mu_{P_1}(i, j) = - \sum_{k \in [i, j]_{P_1} \setminus [i, L]_P} \mu_{P_1}(i, k) - \delta_{i, L}.$$

Cependant $[i, j]_P \setminus [i, L]_P = [i, j]_{P_1} \setminus [i, L]_P$ (voir la preuve du cas 1), ainsi un récurrence immédiate sur j finit la preuve de ce cas.

- 4) Supposons que $i \in V_c$ et $j \in V_c$. Nous voulons prouver par récurrence sur j ($i \not\leq j$) que $\mu_P(i, j) = \sum_{l=1}^n \mu_{P_l}(i, j)$.

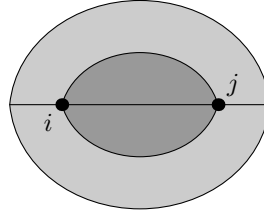


FIG. 5.10 – Cas 4 : i et j appartiennent à V_c

Par définition de la fonction de Möbius, la relation suivante existe :

$$\mu_P(i, j) = - \sum_{k \in [i, j]_P} \mu_P(i, k).$$

Avec le cas 3 de cette preuve et avec l'hypothèse de récurrence, nous savons que $\mu_P(i, k) = \sum_{l=1}^n \mu_{P_l}(i, k)$ si $k \in [i, j]_P$ à l'exception de :

pour $k = \mathbf{i}$, $\mu_P(i, i) = \mu_{P_l}(i, i) = 1$, et donc $\mu_P(i, i) = \sum_{l=1}^n \mu_{P_l}(i, i) - (n - 1)$,

pour $k = \mathbf{i}_1$ où i_1 est défini par $i_1 \in V_c$ et $i \preceq i_1$, on a $\mu_P(i, i_1) = \mu_{P_l}(i, i_1) = -1$, et donc $\mu_P(i, i_1) = \sum_{l=1}^n \mu_{P_l}(i, i_1) + (n - 1)$.

Finalement, on obtient :

$$\mu_P(i, j) = \sum_{l=1}^n \left(- \sum_{k \in [i, j]_P \setminus c} \mu_{P_l}(i, k) \right) - (n - 1) + (n - 1).$$

En utilisant la définition de la fonction de Möbius pour P_l , nous finissons la preuve de la proposition.

□

Dans ce chapitre, nous avons donné une condition suffisante sur le diagramme de Hasse de G pour que le numérateur de la fraction réduite de Ψ_G se factorise.

Cependant, elle ne caractérise pas toutes les factorisations (voir par exemple le cas de la figure 5.11).

$$N \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \end{array} \right)$$

FIG. 5.11 – Un exemple de factorisation non expliqué par le théorème 5.1.1

Toutefois, cette factorisation nous a permis de prouver et étendre le théorème de Greene.

Avec le poinçonnage de Féray et la linéarisation partielle, la factorisation par chaîne fait partie des outils nécessaires pour développer, au chapitre suivant, l'algorithme de décomposition en éléments simples.

6

Application de la fonction de Greene à la décomposition en éléments simples

La décomposition en éléments simples est l'opération qui remplace toute fraction rationnelle à une variable par une somme d'un polynôme et de fractions élémentaires. Une fraction élémentaire est une fraction de la forme $\frac{a}{(x-r)^\mu}$ où a et r sont des constantes et μ un entier.

Par exemple,

$$\frac{x^4}{(x-1)^2(x-2)} = x + 4 + \frac{-5}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{16}{(x-2)}.$$

Cette opération fondamentale est un résultat connu depuis les travaux de Lagrange.

L'objectif de ce paragraphe est de donner une interprétation de la décomposition en éléments simples à l'aide des graphes. Cette interprétation permettra de mettre en évidence une nouvelle preuve de la décomposition en éléments simples ainsi qu'une nouvelle méthode de décomposition qui utilise exclusivement des dessins (les graphes associés à leurs posets).

Théorème 6.0.1. Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle où P et Q sont des polynômes à une variable x et avec coefficient dans un corps \mathbb{K} algébriquement clos. Soit r_i les racines distinctes deux à deux de Q , on note par $\alpha_i \in \mathbb{N}$ la multiplicité de r_i dans Q . Il existe un polynôme R et des coefficients $a_{i,j}$ de \mathbb{K} tels que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_i \sum_{j \in [1, \alpha_i]} \frac{a_{i,j}}{(x-r_i)^j}.$$

Démonstration. Soit R et P' deux polynômes tels que P' est le reste de la division euclidienne de P par Q et R le quotient de P par Q . Alors $\frac{P}{Q} = R + \frac{P'}{Q}$ et le degré de P' est plus petit que le degré de Q . Ce problème est équivalent au problème de la décomposition en éléments simples d'une fraction dont le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du

dénominateur. Nous supposons donc, dans la suite de la preuve, que le degré de P est plus petit que celui de Q . De même, pour alléger les formules, nous choisissons P et Q de manière à ce que leur coefficient dominant soit égal à 1. Comme \mathbb{K} est algébriquement clos, P et Q peuvent être scindés en produits de facteurs de degré 1. On obtient alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\prod_i (x - s_i)^{\beta_i}}{\prod_j (x - r_j)^{\alpha_j}}.$$

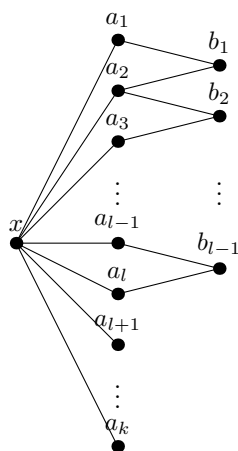
Si on cherche à distinguer les racines multiples, on définit formellement $r_{i,j}$ et $s_{i,j}$ de façon à ce que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\prod_{j \in [1, \beta_i]} (x - s_{i,j})}{\prod_{j \in [1, \alpha_i]} (x - r_{i,j})} \Bigg|_{r_{i,j} \leftarrow r_i, s_{i,j} \leftarrow s_i}.$$

En utilisant

- le théorème de factorisation par chaîne,
- la formule explicite trouvée pour les diamants,
- les dénominateurs des fractions rationnelles,

nous établissons :

$$\frac{\prod_{j \in [1, \beta_i]} (x - s_{i,j})}{\prod_{j \in [1, \alpha_i]} (x - r_{i,j})} = \prod_{i=1}^l (a_i - b_i)(a_{i+1} - b_i) \cdot$$


où $[a_1, \dots, a_k] = [r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{1,\alpha_1}, r_{2,1}, r_{2,2}, \dots, r_{2,\alpha_2}, \dots, r_{d,1}, r_{d,2}, \dots, r_{d,\alpha_d}]$ et $[b_1, \dots, b_l] = [s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,\alpha_1}, s_{2,1}, s_{2,2}, \dots, s_{2,\alpha_2}, \dots, s_{d,1}, s_{d,2}, \dots, s_{d,\alpha_d}]$. Nous notons G le graphe ainsi construit.

On applique maintenant le poinçonnage de Féray sur chaque cycle afin d'obtenir une somme d'arbres.

Cette somme représente une somme de fractions rationnelles telles que la spécialisation $s_{i,j} \leftarrow s_i$ et $r_{i,j} \leftarrow r_i$ ne donne pas une fraction élémentaire.

Considérons l'algorithme suivant :

1. variable : S est une combinaison formelle d'arbres de racine x ,
2. initialisation : S est la somme formelle déterminée précédemment en appliquant des poinçonnages de Féray,

3. étape itérative : choisissez un arbre G associé à un coefficient non nul de façon à ce qu'il existe deux éléments $a_{i,j}$ et $a_{k,l}$ tels que $i \neq k$ et tels que les arêtes $(x, a_{i,j})$ et $(x, a_{k,l})$ existent. Soit $A' = \{a_{i,j}\}$ un sous-ensemble maximal tel que la substitution $s_{i,j} \leftarrow s_i$ et $r_{i,j} \leftarrow r_i$ soit injective (d'après le choix du graphe effectué en début d'étape, cet ensemble existe). Réalisez une linéarisation partielle dans G du sous-ensemble A' ,
4. fin : itérez jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de trouver des arbres vérifiant les conditions pré-requises à l'étape itérative,
5. sortie : S .

Dans l'étape itérative, les tailles des différents sous-ensembles maximaux éligibles sont identiques.

Cet algorithme est confluent. En effet, à chaque linéarisation partielle d'un graphe noté G de l'étape itérative, la taille du sous-ensemble maximal A' des graphes résultants est strictement inférieure à la taille du sous-ensemble maximal A' du graphe G . \square

Par souci de clarté, dans les exemples qui vont suivre, nous utiliserons l'alphabet a, b, c, d, \dots pour noter les différents pôles et racines deux à deux distincts. Des indices seront éventuellement utilisés afin de distinguer les pôles ou racines identiques.

Ainsi, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ est traduite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ x \\ \bullet \\ a \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \quad a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} x \quad b \quad a \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \\
 &= \frac{1}{(x-a)(a-b)} + \frac{1}{(x-b)(b-a)} \\
 &= \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}.
 \end{aligned}$$

De même, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}$ se détermine comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(x-a)^2(x-b)} &= \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ x \\ \bullet \\ a_2 \\ \bullet \\ a_1 \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \quad a_2 \quad b \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \\ a_1 \end{array} + \begin{array}{c} x \quad b \quad a_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \\ a_1 \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \quad a_2 \quad b \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \\ a_1 \end{array} + \begin{array}{c} x \quad a_1 \quad b \quad a_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} x \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \\ a_2 \\ \bullet \\ a_1 \end{array} \\
 &= \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{-1}{(b-a)^2} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{(b-a)^2} \frac{1}{x-b}.
 \end{aligned}$$

Enfin, la décomposition de la fraction $\frac{x-c}{(x-a)^2(x-b)}$ se conçoit ainsi :

$$\frac{x-c}{(x-a)^2(x-b)} = (a-c)(b-c) \cdot \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} &= \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} + \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} - \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} \\ &= \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} + \begin{array}{c} a_2 \quad c \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad b \end{array} + \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} \\ &= \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} + \begin{array}{c} a_2 \quad c \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad b \end{array} + \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad a_1 \quad c \\ \downarrow \\ b \end{array} \\ &= \frac{1}{(a-c)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(a-b)} + \frac{-1}{(b-a)^2(a-c)} + \frac{1}{(b-a)^2(a-c)}. \end{aligned}$$

La décomposition calculée par l'algorithme dépend des choix des cycles et des choix des sous-ensembles maximaux. C'est pourquoi, le nombre d'itérations et la taille du résultat ne sont pas uniques et dépendent fortement des choix effectués.

Il est cependant possible d'améliorer l'algorithme en remplaçant la linéarisation partielle de A' par l'opération subséquente. Soit G un graphe et A un sous-ensemble de sommets de G tel que pour chaque couple a, b de sommets de G , les arêtes (a, b) et (b, a) n'appartiennent pas au graphe. On appelle **arborification** de G selon A noté $\mathcal{A}(G)$ la combinaison linéaire formelle de graphes :

$$\mathcal{A}(G) = \sum_{a \in A} \mathcal{A}_a(G)$$

où $\mathcal{A}_a(G)$ est le graphe de sommets V_G , et d'arêtes $E_G \cup \bigcup_{\substack{b \in A \\ a \neq b}} (a, b)$. En effet, nous avons la propriété proposée ci-après :

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}(G)) = \sum_{a \in A} \mathcal{L}(\mathcal{A}_a(G))$$

et donc

$$\Psi(\mathcal{A}(G)) = \sum_{a \in A} \Psi(\mathcal{A}_a(G)).$$

De plus, dans le cadre de l'algorithme, les tailles des sous-ensembles maximaux A' des graphes qui apparaissent après arborification, sont strictement inférieures à la taille de A' pour le graphe initial.

Par exemple,

$$\mathcal{A} \left(\begin{array}{c} c \\ \bullet \\ b \\ \bullet \\ a \end{array} \right) = \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ a \quad \bullet \\ \bullet \quad b \end{array} + \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ b \quad \bullet \\ \bullet \quad a \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ c \quad \bullet \\ \bullet \quad a \end{array}.$$

Ainsi, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} &= \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ x \\ \bullet \\ b \\ \bullet \\ a \\ \bullet \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ x \quad a \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ b \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ x \quad b \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ a \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ x \quad c \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ a \\ \bullet \end{array} \\
 &= \frac{1}{x-a} \frac{1}{(a-c)(a-b)} + \frac{1}{x-b} \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{x-c} \frac{1}{(c-b)(c-a)}.
 \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous avons trouvé une interprétation purement combinatoire de la décomposition en éléments simples à l'aide des graphes (ou des posets).

Ce travail a permis d'exposer un nouvel algorithme de décomposition en éléments simples ne faisant intervenir que des opérations sur les graphes.

Cependant, cet algorithme est largement moins performant que les algorithmes classiques. En effet, la taille du résultat obtenu et le temps d'exécution est bien plus important. De surcroît, cet algorithme nécessite un numérateur factorisé.

7

Conclusion

Dans cette partie de notre étude, nous avons présenté un algorithme inductif utilisant le poinçonnage de Féray pour calculer Ψ . Cet outil nous a permis de trouver une formule combinatoire explicite pour le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite Ψ_G . Ce résultat analyse le diagramme de Hasse de G en le complétant par une structure de carte. Cependant, le numérateur de Ψ_G ne dépend pas de cette carte. Nous pouvons donc nous demander s'il existe une expression qui ne ferait intervenir aucune carte pour le numérateur de Ψ_G .

Grâce à l'opération de contraction, nous avons montré que la fraction réduite de tout graphe peut se déduire de celle des graphes bipartis. Pour ces graphes bipartis, le poinçonnage de Féray fait apparaître un ensemble de spécialisations annulant Ψ_G . Cet ensemble d'annulations ne permet pas de caractériser le numérateur de Ψ_G comme le font les annulations appliquées aux polynômes de Schubert. Dans des travaux futurs, nous envisageons l'étude des annulations manquantes ainsi que leur interprétation à l'aide du graphe G .

Nous avons proposé une condition suffisante sur le diagramme de Hasse de G pour que le numérateur de Ψ_G factorise. Elle est définie par l'existence d'une chaîne particulière dans le diagramme de Hasse de G (voir théorème 5.1.1). Cette condition n'est pas une condition nécessaire comme l'indique la figure 5.1. Il est donc naturel de s'interroger sur l'existence

$$N \left(\begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 2 & 5 & 8 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & 3 & 6 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 4 \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{ccc} & 2 & 5 \\ & \cdot & \cdot \\ & 1 & 3 \\ & \cdot & \cdot \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{cccc} & & 7 & \\ & 5 & 8 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 3 & 6 & 9 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 4 \end{array} \right)$$

FIG. 7.1 – Un exemple de factorisation non expliqué par le théorème 5.1.1

d'un énoncé qui mettrait en évidence une condition nécessaire pour la factorisation de ce

numérateur.

Dans le cas de la figure 7.1, il est facile de prouver que la factorisation est une conséquence de la factorisation par chaîne. Il suffit pour cela de linéariser partiellement la composante induite par les sommets $\{8, 9\}$. Nous pouvons légitimement nous demander si toutes les factorisations sont des conséquences de la factorisation par chaîne. En ce qui concerne le théorème de Greene étendu, il semblerait que les graphes constitués d'un agrégat de diamants soient les seuls graphes pouvant être exprimés grâce à la fonction de Möbius. Nous conjecturons donc que la réciproque du théorème de Greene étendu est vraie.

Enfin nous avons présenté un nouvel algorithme de décomposition en éléments simples n'utilisant que des opérations sur les graphes.

D'autres variantes intéressantes existent comme :

$$\Phi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_n)}.$$

La combinatoire de ces fractions rationnelles est bien connue et décrite dans l'article [10]. La similitude des objets fait penser qu'il existe un lien entre Ψ et Φ , mais il n'a pas encore été mis à jour.

Deuxième partie

Puissances paires du Vandermonde

8

Introduction

Le **déterminant de Vandermonde** est un polynôme antisymétrique défini par

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \det \left((x_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} \right).$$

Bien que sa formulation soit simple, ses puissances paires sont des polynômes symétriques dont le développement sur les différentes bases n'est pas, pour le moment, bien connu. Par exemple, l'expression des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur [17, 13, 29, 41] constitue un problème difficile qui apparaît en physique dans la théorie de l'effet de Hall quantique. En effet, cet énoncé équivaut à l'énoncé décrit par P. Di Francesco et al. [17] qui ont analysé la décomposition des fonctions d'ondes de Laughlin ([36])

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{Laughlin}}^{n,k}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \Delta(x_1, \dots, x_n)^{2k+1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i|^2\right\} \\ &= \Delta(x_1, \dots, x_n)^{2k} \Psi_{\text{Laughlin}}^0(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

en **fonctions d'ondes de Slater** pour n particules, i.e.

$$\Psi_{\text{Slater}}^\lambda := \frac{1}{\pi^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i|^2\right\} \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_1^{\lambda_2} & \dots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_2} & \dots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1} & x_n^{\lambda_2} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Dans cette deuxième partie, nous allons relier Δ^{2k} à différentes bases de fonctions symétriques.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'une classe de partitions, dites admissibles, définies par P. Di Francesco et al. [17].

Nous donnons une méthode d'énumération des partitions qui interviennent dans le développement des puissances paires du Vandermonde sur les fonctions de Schur. Ce procédé s'appuie sur un calcul de termes positifs dans une série de Laurent.

À l'origine, P. Di Francesco avait conjecturé que ces partitions, définies initialement comme étant un intervalle du permutoèdre, caractérisaient les coefficients non nuls apparaissant lors du développement de Δ^{2k} dans les fonctions de Schur. Cette conjecture a été invalidée par Scharf et *al.* [41] à partir de $n = 8$ et $k = 1$. Nous verrons un peu plus loin qu'elle devient vraie si l'on considère certaines q -déformations du problème.

Nous consacrons le deuxième chapitre au calcul hyperdéterminantal appliqué aux coefficients du développement de Δ^{2k} dans la base des fonctions de Schur. Pour obtenir ce résultat, nous utilisons trois outils : la substitution \int_{\bullet} (opération linéaire qui envoie les monômes sur des produits de fonctions complètes), le produit scalaire \langle, \rangle usuel sur les fonctions symétriques dans sa version intégrale, et une généralisation de la formule de Heine permettant d'exprimer l'intégrale d'un produit de déterminants comme un hyperdéterminant.

Dans le troisième chapitre, nous montrons que Δ^{2k} est un polynôme de Jack rectangle, pour une certaine spécialisation du paramètre α . Ce résultat est obtenu, d'une part, en faisant le lien entre hyperdéterminants et puissances paires du Vandermonde Δ^{2k} et d'autre part, entre hyperdéterminants et polynômes de Jack sur l'alphabet $-\mathbb{X}$.

Dans le chapitre quatre, nous q -déformons les puissances paires du Vandermonde en des puissances polarisées du q -discriminant.

Lorsque nous étudions les propriétés spectrales de l'opérateur de Sekiguchi-Debiard-Macdonald, pour une spécialisation particulière de (q, t) , nous montrons que cette polarisation est aussi un polynôme de Macdonald escalier.

L'utilité de cette q -déformation est double. En faisant tendre q vers 1, nous obtenons une égalité entre Δ^{2k} et un polynôme de Jack escalier (avec des marches de hauteur paire) dont le paramètre α a été spécialisé. De surcroît, la conjecture de Di-francesco et *al.* devient vraie pour cette déformation, ce qui généralise un résultat de R.C. King, F. Toumazet et B.G. Wybourne, énoncé lorsque $k = 1$ dans l'article [29].

9

Les partitions admissibles

Ce chapitre est dédié à l'étude des partitions dites admissibles introduites par P. Di Francesco et *al.* dans l'article [17]. Il s'agit des partitions qui apparaissent lors du développement des puissances paires du Vandermonde dans les fonctions de Schur. Ces auteurs ont postulé que le coefficient de S_λ du développement de Δ^{2K} dans la base des fonctions de Schur n'était pas nul si et seulement si λ était admissible. Cette conjecture est fautive à partir de $n = 8$ (voir article de Scharf, Thibon et Wybourne [41]). Par contre, il est utile de connaître ces partitions pour optimiser les développements.

Dans les pages qui vont suivre, nous présentons diverses définitions équivalentes de partitions admissibles et divers algorithmes pour compter et énumérer ces partitions.

9.1 Développement des puissances paires du Vandermonde sur la base des fonctions de Schur

Le polynôme de Vandermonde est un polynôme antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n)$$

où σ est une permutation de taille n .

Soit \mathbb{X} un alphabet et \langle, \rangle le **produit scalaire** défini par

$$\langle \Psi_\lambda(\mathbb{X}), \Psi_\mu(\mathbb{X}) \rangle := z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}$$

où λ et μ sont deux partitions et où $\Psi_\lambda(\mathbb{X})$ est la base multiplicative des **sommes des puissances**, c'est-à-dire :

$$\Psi_\lambda(\mathbb{X}) := \prod_i \Psi_{\lambda_i}(\mathbb{X})$$

avec

$$\Psi_k(\mathbb{X}) := \sum_{x \in \mathbb{X}} x^k$$

et z_λ le nombre de permutations de type cyclique λ dont la formule est donnée par

$$z_\lambda = \prod_{1 \leq i} i^{r_i} \cdot r_i!$$

où r_i est la multiplicité de i dans λ .

La famille des **fonctions de Schur** constitue l'unique base orthogonale des fonctions symétriques pour le produit scalaire \langle, \rangle et qui vérifie :

$$S_\lambda = m_\lambda + \dots$$

où m_λ sont les **fonctions monomiales** définies par

$$m_\lambda(\mathbb{X}) := \sum_{\text{ord}(v)=\lambda} x^v$$

et où ord est l'opération qui ordonne les composantes de v par ordre décroissant (exemple : $w(67225612) = 76652221$). Lorsque $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini, il est connu que (voir [32])

$$S_\lambda := \frac{\det(x_i^{\lambda_j + n - j})}{\Delta}.$$

Les puissances paires du Vandermonde sont symétriques et peuvent donc être écrites dans la base des fonctions de Schur.

Le produit d'une fonction de Schur de partition λ et du polynôme de Vandermonde est un déterminant. Ce déterminant se développe en une somme de monômes dont les exposants sont des permutations de $\lambda + \rho$ (ρ est la partition $[n-1, n-2, \dots, 1, 0]$). Pour deux partitions λ et μ distinctes et de même poids n , il n'y a pas de monômes en commun entre $S_\lambda \Delta$ et $S_\mu \Delta$. Ainsi, lorsque nous calculons explicitement un polynôme symétrique P homogène, dans la base des polynômes de Schur, il suffit de regarder les coefficients de $P \Delta$ dans les monômes dont les exposants sont des partitions.

À titre d'exemple, quand on détermine $\Delta(x_1, x_2, x_3)^2$ dans la base polynômes de Schur, il suffit de développer $\Delta(x_1, x_2, x_3)^3$ dans les monômes. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, x_3)^3 &= ((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3))^3 \\ &= 1 (x_1^6 x_2^3 - x_1^3 x_2^6 - x_1^6 x_3^3 + x_2^6 x_3^3 + x_1^3 x_3^6 - x_2^3 x_3^6) \\ &\quad - 3 (x_1^5 x_2^4 - x_1^4 x_2^5 - x_1^5 x_3^4 + x_2^5 x_3^4 + x_1^4 x_3^5 - x_2^4 x_3^5) \\ &\quad - 3 (x_1^6 x_2^2 x_3 - x_1^2 x_2^6 x_3 - x_1^6 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^6 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^6 - x_1 x_2^2 x_3^6) \\ &\quad + 6 (x_1^5 x_2^3 x_3 - x_1^3 x_2^5 x_3 - x_1^5 x_2 x_3^3 + x_1 x_2^5 x_3^3 + x_1^3 x_2 x_3^5 - x_1 x_2^3 x_3^5) \\ &\quad - 15 (x_1^4 x_2^3 x_3^2 - x_1^3 x_2^4 x_3^2 - x_1^4 x_2^2 x_3^3 + x_1^2 x_2^4 x_3^3 + x_1^3 x_2^2 x_3^4 - x_1^2 x_2^3 x_3^4). \end{aligned}$$

Une lecture des coefficients des monômes dominants permet de déduire que

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, x_3)^2 &= ((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3))^2 \\ &= S_{420} - 3S_{411} - 3S_{330} + 6S_{321} - 15S_{222}. \end{aligned}$$

9.2 Définition des partitions admissibles

Au paragraphe précédent, nous avons vu comment exprimer les puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur. Nous souhaitons maintenant caractériser les partitions qui apparaissent après ce développement.

Le signe négatif du Vandermonde Δ introduit de nombreuses annulations ce qui complique la détermination de ces partitions. Un problème plus simple consiste à remplacer ce signe négatif par un signe positif. Nous obtenons ainsi la définition des partitions admissibles.

Une **partition admissible** est une partition λ dont le monôme $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ apparaît avec un coefficient non nul lors du développement de $\prod_{i < j} (x_i + x_j)^{2k+1}$:

$$\prod_{i < j} (x_i + x_j)^{2k+1} = \dots + \alpha_\lambda x^\lambda + \dots$$

P. Di Francesco *et al.* définissent (article [17]) les partitions admissibles en utilisant l'ordre de dominance.

L'**ordre de dominance** est un ordre sur les partitions pour lequel une partition λ est plus petite qu'une partition μ si et seulement si, pour tout $i \in [0, n]$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$.

D'après l'article [17], pour une paire d'entiers (n, k) , l'ensemble des partitions admissibles est l'intervalle (pour l'**ordre de dominance**) de plus petit élément $[2k(n-1), \dots, 2k, 0]$ et de plus grand élément $[k(n-1), \dots, k(n-1)]$. Cette définition est équivalente à notre définition.

Les auteurs P. Di Francesco *et al.* ont conjecturé (article [17]) que toutes les partitions admissibles apparaissent avec un coefficient non nul dans le développement des puissances paires du Vandermonde Δ^{2k} sur la base des fonctions de Schur. Cette conjecture a été invalidée par T. Scharf, J-Y. Thibon et B.G. Wybourne dans l'article [41], leurs calculs ayant exhibé des coefficients nuls pour $k = 1$ et $n = 8$.

Dans les chapitres suivants, nous introduisons une q -déformation du Vandermonde : le q -discriminant. Pour cet objet, nous montrerons (théorème 12.4.1) que la conjecture de P. Di Francesco est vraie. Elle fait apparaître les partitions (n, m) -admissibles qui sont une généralisation des partitions admissibles.

Nous appelons **partition (n, m) -admissible** toute partition qui apparaît dans le développement de

$$m_\rho(\mathbb{X})^{m-1} \prod_{i < j} (x_i + x_j) = \sum_{\lambda} b_\lambda^{n,m} m_\lambda(\mathbb{X}) \quad (23)$$

où \mathbb{X} est un alphabet de taille n . Quand $m = 2k$ est pair, les partitions $(n, 2k)$ -admissibles sont celles de l'intervalle $[(k(n-1))^n, [2k(n-1), \dots, 2k, 0]$.

Remarque : lorsque $m = 2$, cette définition coïncide avec celle de P. Di Francesco *et al.* [17].

Soit $A_{n,m}$ l'ensemble défini récursivement par

$$\begin{aligned} A_{n,1} &:= \{\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \mid \rho \geq \lambda\} \\ A_{n,m} &:= \{((\lambda_1 + \sigma(1) - 1, \dots, \lambda_n + \sigma(n) - 1)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \lambda \in A_{n,m-1}\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Lemme 9.2.1. *Soit λ une partition. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. La partition λ appartient à l'ensemble $A_{n,m}$.

2. La partition λ est (n, m) -admissible.
3. λ est une partition de longueur n plus petite ou égale à $m\rho$ pour l'ordre de dominance.

Démonstration. L'équivalence entre les assertions 1 et 2 est une conséquence des équations (23) et (24). De plus, d'après l'équation (24), la partition maximale de $A_{n,m}$ est $m\rho$. Il ne reste donc plus qu'à prouver que 3 implique 1. Nous allons procéder par induction sur m , si $m = 1$ alors le résultat est trivial. Supposons que $m > 1$. Soit λ une partition de taille n moins grande que $m\rho$ par l'ordre de dominance. Alors $(\lambda - \rho)$ est une partition plus petite ou égale à $(m - 1)\rho$. En effet, si on choisit μ de façon à ce que $(\lambda - \rho) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, pour une permutation σ de \mathfrak{S}_n , on obtient $\mu_i = \lambda_{\sigma(i)} + n - \sigma(i)$. Ainsi, pour chaque i

$$\begin{aligned} \mu_1 + \dots + \mu_i &\leq \lambda_{\sigma(1)} + \dots + \lambda_{\sigma(i)} + n - \sigma(1) + \dots + n - \sigma(i) \\ &\leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i + n - 1 + \dots + n - i \\ &\leq (m - 1)(n - \frac{1}{2}i(i + 1)) \end{aligned}$$

implique $((\lambda - \rho)) \leq (m - 1)\rho$ pour l'ordre de dominance.

Par induction, $((\lambda - \rho))$ appartient à $A_{n,m-1}$. De plus, il existe une permutation σ telle que $((\lambda - \rho)) + \rho^\sigma = \lambda$. Ainsi, d'après l'équation (24), $\lambda \in A_{n,m}$. \square

9.3 Série génératrice des partitions admissibles

On considère le monoïde commutatif libre \mathfrak{T} engendré par les symboles $T = \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ agissant sur les vecteurs de taille n de la façon suivante :

$$\tau_i[v_1, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_{i-1}, v_i - 1, v_{i+1} + 1, v_{i+1}, \dots, v_n].$$

Pour un vecteur donné $v \in \mathbb{Z}^n$, $\mathfrak{T}.v$ est l'ensemble des vecteurs $w = [w_1, \dots, w_n] \in \mathbb{Z}^n$ de même poids (*c.a.d.* $v_1 + \dots + v_n = w_1 + \dots + w_n$) qui sont plus petits que v ou égaux à v pour l'ordre de dominance. En particulier, si $v = \lambda$ est une partition, alors $\mathfrak{T}.\lambda$ contient toutes les partitions de taille n qui sont plus petites que λ ou égales à λ . Quel que soit le vecteur $v \in \mathbb{Z}^n$, on associe le monôme $z^v = z_1^{v_1 - v_2} \dots z_{n-1}^{v_{n-1} - v_n}$. Pour un poids donné, le monôme z^v caractérise complètement v . De plus, v est une partition (décroissante) si et seulement si son poids n'est pas négatif et si le degré du monôme z^v dans chaque variable z_i n'est pas négatif.

La figure 9.1 montre comment sont engendrés les vecteurs qui sont plus petits que le vecteur $[4, 1, 1]$ pour l'ordre de dominance.

Agir sur v en utilisant τ_i est équivalent à multiplier z^v par

$$t_i = \begin{cases} \frac{z_{i-1}z_{i+1}}{z_i^2} & \text{si } 1 < i < n - 1 \\ \frac{z_2}{z_1^2} & \text{si } i = 1 \\ \frac{z_{n-2}}{z_{n-1}^2} & \text{si } i = n - 1. \end{cases}$$

Étant donné qu'il y n'a pas de relations algébriques entre les t_i , chaque vecteur apparaît dans $\mathfrak{T}.v$ avec une multiplicité 0 ou 1. Autrement dit,

$$\sigma_q(T).z^v := \prod_{t \in T} \frac{1}{1 - tq} .z^v = \sum_{w \leq v} q^{\alpha_{v,w}} z^w. \quad (25)$$

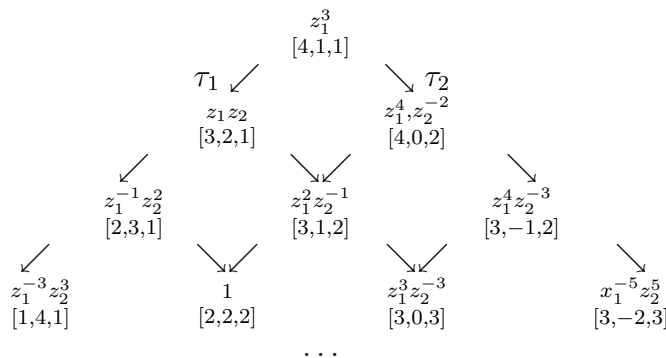


FIG. 9.1 – Ordre de dominance

où $\alpha_{v,w}$ est le degré du monôme agissant sur v pour obtenir w . Extraire le monôme qui encode une partition équivaut à extraire la part de la série (25) constituée seulement d'exposants positifs. Cette opération est réalisée par l'opérateur **Oméga de MacMahon** noté Ω et défini comme suit (voir e.g [1]) :

$$\Omega_{x_1, \dots, x_p} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n_1, \dots, n_p} x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p} = \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}} \alpha_{n_1, \dots, n_p} x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p}.$$

Par exemple,

$$\Omega_{z_1, z_2} \frac{z_1^3}{(1 - \frac{z_1}{z_2} q)(1 - \frac{z_2}{z_1} q)} = \underbrace{z_1^3}_{[411]} + q \underbrace{z_1 z_2}_{[321]} + \underbrace{q^2}_{[222]}$$

code l'ensemble $\{[411], [321], [222]\}$ des partitions de taille 3 plus petites que 411. Ainsi,

Proposition 9.3.1. *La taille $n \geq 2$ de l'alphabet étant fixée, la série génératrice des partitions (n, k) -admissibles est la fraction rationnelle $\mathfrak{A}_n(q, t; z_1, \dots, z_{n-1})$:*

$$\mathfrak{A}_n(q, t; z_1, \dots, z_{n-1}) = \Omega_{z_1, \dots, z_{n-1}} \left((1 - tz_1 \dots z_{n-1})(1 - \frac{z_0 z_2}{z_1^2} q)(1 - \frac{z_1 z_3}{z_2^2} q) \dots (1 - \frac{z_{n-2} z_n}{z_{n-1}^2} q) \right)^{-1},$$

où $z_0 = z_n = 1$.

Par exemple, calculons les premières valeurs de $\mathfrak{A}_n(q, t; z_1, \dots, z_{n-1})$.

1. Pour $n = 2$ la fonction génératrice des partitions admissibles est donnée par

$$\mathfrak{A}_1(q, t; z_1) = \Omega_{z_1} \left(\frac{1}{(1 - tz_1)(1 - \frac{q}{z_1^2})} \right).$$

Une décomposition en éléments simples selon la variable z_1 entraîne :

$$\mathfrak{A}_1(q, t; z_1) = \Omega_{z_1} \left(\frac{1}{(1 - tz_1)(1 - qt^2)} + \frac{qz_1^{-2}(tz_1 + 1)}{(1 - \frac{q}{z_1^2})(1 - qt^2)} \right).$$

L'opérateur Oméga de MacMahon laisse invariant le terme de gauche et supprime le terme de droite. On obtient en dernier lieu

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1(q, t; z_1) &= \frac{1}{(1-qt^2)(1-z_1t)} \\ &= 1 + z_1t + (q + z_1^2)t^2 + (qz_1 + z_1^3)t^3 + (q^2 + qz_1^2 + z_1^4)t^4 + \dots\end{aligned}$$

Cela signifie que, pour $k = 1$ la seule partition admissible est [21], pour $k = 2$, il y a seulement deux partitions [42] et [33], pour $k = 3$ les partitions admissibles sont [63] et [54] etc...

2. Si $n = 3$,

$$\mathfrak{A}_3(q, t; z_1, z_2) = \Omega_{z_1, z_2} \frac{1}{(1-t.z_1.z_2)(1-\frac{z_2.q}{z_1^2})(1-\frac{z_1.q}{z_2^2})}.$$

Comme précédemment, nous allons réaliser une décomposition en éléments simples selon z_1 afin d'obtenir des séries dont leur contribution en z_1 sont à exposant strictement négatif ou bien à exposant positif.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_3(q, t; z_1, z_2) &= \Omega_{z_1, z_2} \left(\frac{qz_2^2(tz_2^3z_1 + q^2z_2^2t + z_1q + z_2^2)}{(z_1^2 - z_2q)(-1 + z_2^3qt^2)(q - z_2)(q^2 + z_2q + z_2^2)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{z_2^5q}{(q - tz_2^3)(-z_2^3 + q^3)(-z_2^2 + z_1q)} + \frac{-tz_2^3}{(-1 + z_2^3qt^2)(q - tz_2^3)(-1 + tz_1z_2)} \right).\end{aligned}$$

L'opérateur Oméga de MacMahon réduit le deuxième terme à zéro. Nous obtenons ainsi

$$\mathfrak{A}_3(q, t; z_1, z_2) = \Omega_{z_1, z_2} \left(\frac{-(tz_1q^3 + q^2z_1z_2^3t^2 - q^2z_2^2t - z_2^2)z_2^3}{(-1 + tz_1z_2)(-1 + z_2^3qt^2)(-z_2^2 + z_1q)(q - z_2)(q^2 + z_2q + z_2^2)} \right).$$

Nous décomposons maintenant \mathfrak{A}_3 en éléments simples selon z_2 puis on rassemble les termes dont leur contribution en z_2 est à exposant positif ou nul. Nous concluons par :

$$\frac{1 - z_1^3z_2^3q^2t^4}{(1 - tz_1z_2)(1 - qz_2^3t^2)(1 - z_1^3qt^2)(1 - q^2t)}.$$

3. Si $n = 4$, $\mathfrak{A}_4(1, t; 1, 1) = \frac{t^4 + 5t^3 + 7t^2 + 2t + 1}{(1+t)^2(1-t)^4}$.

4. Si $n = 5$, $\mathfrak{A}_5(1, t; 1, 1) = \frac{3t^6 + 21t^5 + 61t^4 + 68t^3 + 39t^2 + 7t + 1}{(1-t)^5(t+1)^3}$.

Dans ce chapitre, nous avons donné plusieurs algorithmes d'énumération des partitions admissibles. Lorsque nous développons Δ^{2k} dans la base des fonctions de Schur, ces algorithmes permettent de restreindre le nombre de partitions dont il faut calculer le coefficient.

10

Expression hyperdéterminantale des coefficients dans le développement de Δ^{2k} sur les fonctions de Schur

Le chapitre 9 nous a permis d'établir que le développement des puissances paires du Vandermonde sur les fonctions de Schur était un problème équivalent au développement des puissances impaires du Vandermonde sur les monomiales.

Il est possible de mettre en valeur cette propriété à l'aide des hyperdéterminants de Hankel.

Nous présentons ici les hyperdéterminants de Hankel et nous proposons un algorithme permettant de calculer tous les coefficients $g_\lambda^{n,k}$ du développement des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur :

$$\Delta^{2k} = \sum_{\lambda \text{ partition admissible}} g_\lambda^{n,k} S_\lambda.$$

Enfin, nous analysons quelques propriétés qui découlent de cet algorithme.

10.1 Hyperdéterminants de Hankel

Les hyperdéterminants sont des objets inventés par Cayley en 1843.

Ils regroupent plusieurs généralisations du déterminant pour les hypermatrices de plus de deux indices.

L'hyperdéterminant que nous utilisons dans ce chapitre est le plus simple des hyperdéterminants car il généralise de façon naturelle les formules des déterminants considérés comme des sommes multi-alternées :

Soit $M = (M_{i_1, \dots, i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}$ un tenseur à p indices, l'*hyperdéterminant* de M est la somme alternée sur les p copies du groupe symétrique \mathfrak{S}_n ,

$$\text{Det}(M) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma_1 \dots \sigma_p) \prod_{i=1}^n M_{\sigma_1(i) \dots \sigma_p(i)}. \quad (26)$$

Si $p = 2$, on retrouve la définition des déterminants.

Par exemple, si $p = 4$ et $n = 2$,

$$\begin{aligned} \text{Det}(M) = & -M_{2,1,1,1}M_{1,2,2,2} + M_{2,1,1,2}M_{1,2,2,1} + M_{2,1,2,1}M_{1,2,1,2} \\ & - M_{2,1,2,2}M_{1,2,1,1} + M_{2,2,1,1}M_{1,1,2,2} - M_{2,2,1,2}M_{1,1,2,1} - M_{2,2,2,1}M_{1,1,1,2} + M_{2,2,2,2}M_{1,1,1,1}. \end{aligned}$$

Remarque : l'hyperdéterminant Det est nul lorsque p est impair. Dans la suite du chapitre, on supposera que $p = 2k$ est pair.

Nous allons analyser le cas particulier de l'**hyperdéterminant de Hankel**. Il s'agit d'un hyperdéterminant dont les entrées dépendent seulement de la somme des indices. Cet hyperdéterminant s'écrit :

$$H^f := (f(i_1 + \dots + i_{2k}))_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}. \quad (27)$$

Plus généralement, on définit l'**hyperdéterminant de Hankel décalé** par des vecteurs décroissants $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)} \in \mathbb{Z}^n$ comme l'hyperdéterminant du **tenseur de Hankel décalé**

$$H_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}^f := (f(\lambda_{i_1}^{(1)} + \dots + \lambda_{i_{2k}}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k}))_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}. \quad (28)$$

10.2 Hyperdéterminants et intégrales

Certains hyperdéterminants peuvent être obtenus à l'aide d'intégrales multiples de produits de déterminants.

Proposition 10.2.1. (*Identité de Heine généralisée*)

Soit $(f_j^{(i)})_{\substack{1 \leq i \leq 2k \\ 1 \leq j \leq n}}$ une famille de fonctions et μ une mesure sur \mathbb{C} telle que les intégrales apparaissant dans l'équation (29) soient définies. Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int \dots \int \det(f_j^{(1)}(z_i)) \dots \det(f_j^{(2k)}(z_i)) d\mu(z_1) \dots d\mu(z_n) = \\ \text{Det} \left(\int f_{i_1}^{(1)}(z) \dots f_{i_{2k}}^{(2k)}(z) d\mu(z) \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}. \quad (29) \end{aligned}$$

Démonstration. Le résultat s'obtient en développant les termes situés de part et d'autre de l'égalité (29). \square

Remarque : ici, seule la linéarité de l'opération $\int d\mu(z)$ intervient. L'intégrale peut donc être remplacée par n'importe quel opérateur linéaire.

Si nous appliquons la proposition 10.2.1 au produit d'une fonction de Schur et d'une puissance du discriminant, nous obtenons un hyperdéterminant de Hankel décalé dont les entrées sont des sommes associées à la mesure μ .

Corollaire 10.2.2. Soit μ une mesure sur \mathbb{C} telle que l'intégrale apparaissant dans l'équation (30) soit définie, on a

$$\frac{1}{n!} \int \dots \int S_\lambda(z_1, \dots, z_n) \Delta^{2k} d\mu(z_1) \dots d\mu(z_n) = \text{Det}(c_{\lambda_{n-i_1+1}+i_1+\dots+i_{2k}-2k}) \quad (30)$$

où $c_n = \int z^n d\mu(z)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$S_\lambda(z_1, \dots, z_n) \Delta^{2k} = \det(z_i^{\lambda_{n-j+1}+j-1}) \det(z_i^{j-1})^{2k-1}$$

et d'appliquer (29). □

10.3 Algorithme pour obtenir les coefficients

Dans la section précédente, nous avons vu que (équation 30)

$$\frac{1}{n!} \int \dots \int S_\lambda(z_1, \dots, z_n) \Delta^{2k} d\mu(z_1) \dots d\mu(z_n) = \text{Det}(c_{\lambda_{n-i_1+1}+i_1+\dots+i_{2k}-2k}). \quad (31)$$

Cette formule nous donne une expression hyperdéterminantale des coefficients $g_\lambda^{n,k}$ décrite dans le corollaire 10.3.1.

Soit $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}$ $2k$ vecteurs décroissants de \mathbb{Z}^n . Nous définissons le tenseur à $2k$ indices

$$\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} := \left(\delta_{\lambda_{n-i_1+1}+\dots+\lambda_{n-i_{2k}+1}+i_1+\dots+i_{2k}, (2k-1)n+1} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}$$

et

$$\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} := \text{Det} \left(\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \right)$$

son hyperdéterminant.

Corollaire 10.3.1.

$$g_\lambda^{n,k} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathfrak{D}_{\lambda, \underbrace{[0^n], \dots, [0^n]}_{2k+1}} \quad (32)$$

Démonstration. Dans cette preuve, nous fixons la mesure de sorte que

$$\int z^m d\mu(z) = \delta_{m,0}$$

et nous utilisons le produit scalaire sur les fonctions symétriques ci-après :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{n!} \int \dots \int f(\mathbb{Z}) g(\mathbb{Z}^\vee) \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{z_i}{z_j} \right) d\mu(z_1) \dots d\mu(z_n)$$

où \mathbb{Z}^\vee représente l'alphabet $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}$.

Il est prouvé que (voir [39] VI.9 p.370)

$$\langle S_\lambda, S_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$$

ainsi

$$g_\lambda^{n,k} = \langle S_\lambda, \Delta^{2k} \rangle$$

et

$$g_\lambda^{n,k} = \frac{1}{n!} \int \dots \int S_\lambda(\mathbb{Z}) \Delta^{2k}(\mathbb{Z}^\vee) \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right) d\mu(z_1) \dots d\mu(z_n)$$

or

$$S_\lambda(\mathbb{Z}) \Delta^{2k}(\mathbb{Z}^\vee) \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(z_i^{\lambda_{n-j+1} + j - 1}) \det(z_i^{j-1})^{2k+1}$$

En conséquence, d'après la proposition 10.2.1

$$\begin{aligned} g_\lambda^{n,k} &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{Det}(c_{\lambda_{n-i_1+1} + i_1 + \dots + i_{2k} - 2k}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathfrak{D}_{\lambda, \underbrace{[0^n], \dots, [0^n]}_{2k+1}} \end{aligned}$$

□

Nous souhaitons calculer explicitement $g_\lambda^{n,k}$. Dans ce but, nous allons étudier les symétries et opérations qui laissent $\mathfrak{D}_{\lambda, \underbrace{[0^n], \dots, [0^n]}_{2k+1}}$ invariant. En utilisant une généralisation du

développement de Laplace appliquée aux hyperdéterminants, nous obtenons une formule de calcul récursive pour $\mathfrak{D}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}}$, d'où nous déduisons un algorithme afin de calculer $\mathfrak{D}_{\lambda, \underbrace{[0^n], \dots, [0^n]}_{2k+1}}$.

Les propriétés d'invariance de l'hyperdéterminant $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$

Proposition 10.3.2. *Soit σ une permutation de \mathfrak{S}_{2k} , il apparaît que*

$$\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \mathfrak{D}_{\lambda^{(\sigma(1))}, \dots, \lambda^{(\sigma(2k))}}.$$

Démonstration. Par définition du tenseur $\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$, on obtient $\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \Delta_{\lambda^{(\sigma(1))}, \dots, \lambda^{(\sigma(2k))}}$. L'hyperdéterminant $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$ vérifie la même propriété. □

Proposition 10.3.3. *Soient $m_1, m_2, \dots, m_{2k-1} \in \mathbb{Z}$, $2k - 1$ entiers. Dans ces conditions,*

$$\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \mathfrak{D}_{[\lambda_1^{(1)} + m_1, \dots, \lambda_n^{(1)} + m_1], \dots, [\lambda_1^{(2k)} + m_{2k}, \dots, \lambda_n^{(2k)} + m_{2k}]}$$

où $m_{2k} = -m_1 - \dots - m_{2k-1}$.

Démonstration. Par définition du tenseur $\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$, si $m_{2k} = -m_1 - \dots - m_{2k-1}$, nous avons $\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \Delta_{[\lambda_1^{(1)} + m_1, \dots, \lambda_n^{(1)} + m_1], \dots, [\lambda_1^{(2k)} + m_{2k}, \dots, \lambda_n^{(2k)} + m_{2k}]}$. Il en est de même pour $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$. □

Proposition 10.3.4. *Si $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \neq 0$ alors*

$$\sum_{i,j} \lambda_i^{(j)} = (k-1)n(n-1).$$

Démonstration. Si $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \neq 0$ alors il existe $2k$ permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathfrak{S}_n$ telles que

$$\prod_{i=1}^n \delta_{\lambda_{n-\sigma_1(i)+1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n-\sigma_{2k}(i)+1}^{(2k)} + \sigma_1(i) + \dots + \sigma_{2k}(i), (2k-1)n+1} \neq 0.$$

On en déduit donc

$$\sum_i \lambda_{n-\sigma_1(i)+1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n-\sigma_{2k}(i)+1}^{(2k)} + \sigma_1(i) + \dots + \sigma_{2k}(i) = n((2k-1)n+1).$$

Or le terme de gauche vaut $\sum_{i,j} \lambda_j^{(i)} + kn(n+1)$, ce qui finit la preuve. \square

Mineurs et hypermatrices

Nous notons par $M \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{2k} \end{bmatrix}$ le mineur du tenseur $M = (M_{i_1, \dots, i_{2k}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}$ obtenu en choisissant des éléments indexés par les m -vecteurs croissants ($1 \leq m \leq n$) de taille $2k$: I_1, \dots, I_{2k} , c'est-à-dire :

$$M \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{2k} \end{bmatrix} := \left(M_{j_{i_1}^{(1)}, \dots, j_{i_{2k}}^{(2k)}} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq m}$$

où $I_1 = (j_1^{(1)} < \dots < j_m^{(1)})$, \dots , $I_{2k} = (j_1^{(2k)} < \dots < j_m^{(2k)})$.

Un tenseur de Hankel décalé est un mineur du tenseur de Hankel infini

$$H_\infty^f := (f(i_1 + \dots + i_{2k}))_{-\infty < i_1, \dots, i_{2k} < \infty}.$$

Plus généralement, considérons le tenseur générique et infini suivant :

$$M_\infty := (M_{i_1, \dots, i_{2k}})_{-\infty < i_1, \dots, i_{2k} < \infty}$$

et choisissons le mineur indexé par le $2k$ -tuple de vecteurs décroissants $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)} \in \mathbb{Z}^n$,

$$M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \left(M_{\lambda_{n-i_1+1}^{(1)} + i_1, \dots, \lambda_{n-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_{2k}} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}.$$

Le tenseur $M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$ est, de manière évidente, un mineur de M_∞ , et réciproquement,

chaque mineur $M_\infty \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{2k} \end{bmatrix}$ de M_∞ est égal à un mineur $M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$. Ainsi, chaque mineur de $M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$ est de nouveau un mineur de M_∞ et peut être écrit sous la forme $M_{\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(2k)}}$.

Dans la proposition suivante, nous décrivons explicitement les partitions $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(2k)}$.

Proposition 10.3.5. (*Composition de mineurs*)

Soient $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)} \in \mathbb{Z}^n$, $2k$ vecteurs décroissants et $J_1, \dots, J_{2k} \subset \{1, \dots, n\}$, $2k$ sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ayant tous le même nombre d'éléments m , $0 \leq m \leq n$. Alors nous avons l'égalité

$$M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J_{2k} \end{bmatrix} = M_{\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(2k)}}$$

où

$$\nu^{(p)} := [\lambda_1^{(p)} + m, \dots, \lambda_{n-j_m}^{(p)} + m, \lambda_{n-j_m+2}^{(p)} + m - 1, \dots, \lambda_{n-j_{m-1}}^{(p)} + m - 1, \lambda_{n-j_{m-1}+2}^{(p)} + m - 2, \dots, \lambda_{n-j_1}^{(p)} + 1, \lambda_{n-j_1+2}^{(p)}, \dots, \lambda_n^{(p)}]$$

si $J_p = \{j_1 < \dots < j_m\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. On démontre la propriété par induction sur la taille m de J_p . En fait, le cas où $m = 0$ est trivial et il suffit de comprendre le cas $m = 1$ pour prouver le résultat. Considérons le tenseur suivant :

$$M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus j_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus j_{2k} \end{bmatrix} = (M_{f_1(i_1), \dots, f_{2k}(i_{2k})})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}$$

où

$$f_p(i) = \begin{cases} \lambda_{n-i+1}^{(p)} + i & \text{si } i < j_p \\ \lambda_{n-i}^{(p)} + i + 1 & \text{si } i \geq j_p. \end{cases}$$

Par définition, on a

$$(M_{f_1(i_1), \dots, f_{2k}(i_{2k})})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1} = M_{\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(2k)}}.$$

Cela prouve le résultat pour $m = 1$. Si $m > 1$, on pose pour tout p , $m_p = \min J_p$ et $J'_p = J_p \setminus j_p$. Plus simplement,

$$M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J_{2k} \end{bmatrix} = M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J'_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J'_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n - m + 1\} \setminus m_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n - m + 1\} \setminus m_{2k} \end{bmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$M_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J'_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J'_{2k} \end{bmatrix} = M_{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n - m + 1\} \setminus m_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n - m + 1\} \setminus m_{2k} \end{bmatrix}$$

où

$$\mu^{(p)} = [\lambda_1^{(p)} + m - 1, \dots, \lambda_{n-j_m}^{(p)} + m - 1, \lambda_{n-j_m+2}^{(p)} + m - 2, \dots, \lambda_{n-j_{m-1}}^{(p)} + m - 2, \lambda_{n-j_{m-1}+2}^{(p)} + m - 2, \dots, \lambda_{n-j_2}^{(p)} + 1, \lambda_{n-j_2+2}^{(p)}, \dots, \lambda_n^{(p)}]$$

si $J_p = \{j_1 \leq \dots \leq j_m\} \subset \{1, \dots, n\}$. En appliquant de nouveau $m = 1$, on trouve le résultat. \square

Mineurs des hypermatrices $\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$

Soient les ensembles définis par

$$\Gamma_{k,n} := \{\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \mid \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)} \text{ sont des vecteurs décroissants de } \mathbb{Z}^n\}.$$

Proposition 10.3.6. Soient $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)} \in \mathbb{Z}^n$ $2k$ vecteurs décroissants et $J_1, \dots, J_{2k} \subset \{1, \dots, n\}$ $2k$ sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ayant tous le même nombre d'éléments m , $0 \leq m \leq n$. Alors, le mineur

$$\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J_{2k} \end{bmatrix}$$

reste dans $\Gamma_{k,n-m}$.

Démonstration. D'après la proposition 10.3.5, on obtient

$$\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J_{2k} \end{bmatrix} = \left(\delta_{\nu_{n-m-i_1+1}^{(1)} + \dots + \nu_{n-m-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k}, (2k-1)n+1} \right)_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-m}$$

où

$$\nu^{(p)} := [\lambda_1^{(p)} + m, \dots, \lambda_{n-j_m}^{(p)} + m, \lambda_{n-j_m+2}^{(p)} + m - 1, \dots, \lambda_{n-j_{m-1}}^{(p)} + m - 1, \lambda_{n-j_{m-1}+2}^{(p)} + m - 2, \dots, \lambda_{n-j_1}^{(p)} + 1, \lambda_{n-j_1+2}^{(p)}, \dots, \lambda_n^{(p)}]$$

si $J_p = \{j_1 \leq \dots \leq j_m\} \subset \{1, \dots, n\}$. De plus,

$$\delta_{\nu_{n-m-i_1+1}^{(1)} + \dots + \nu_{n-m-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k}, (2k-1)n+1} = \delta_{\nu'_{n-m-i_1+1}^{(1)} + \dots + \nu'_{n-m-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k}, (2k-1)(n-m)+1},$$

où $\nu'^{(1)}$ est la suite décroissante

$$\nu'^{(1)} := [\nu_1^{(1)} - m(2k-1), \dots, \nu_{n-m}^{(1)} - m(2k-1)]. \quad (33)$$

Ainsi,

$$\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus J_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus J_{2k} \end{bmatrix} = \Delta_{\nu'^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(2k)}} \in \Gamma_{k,n-m}.$$

Cela finit la preuve. \square

Une généralisation du développement de Laplace

Dans le cas général, il n'existe pas d'algorithme efficace pour calculer un hyperdéterminant. Cependant, nous utiliserons une généralisation du développement de Laplace pour les hyperdéterminants. Ce résultat est dû à W. Zajaczkowski [46]¹.

Théorème 10.3.7. (*Généralisation du développement de Laplace*) [46],

Soit un tenseur $M = (M_{i_1, \dots, i_{2k}})_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}$, $0 \leq m \leq n$ et $I_1 = \{j_1^{(1)} < \dots < j_m^{(1)}\} \subset \{1 \dots n\}$. L'hyperdéterminant de M peut être développé comme une somme alternée de $\binom{n}{m}^{2k-1}$ produits de deux mineurs,

$$\text{Det}(M) = \sum_{I_2, \dots, I_{2k}} \pm \text{Det} \left(M \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{2k} \end{bmatrix} \right) \text{Det} \left(M \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus I_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus I_{2k} \end{bmatrix} \right) \quad (34)$$

où la somme porte sur les m -uplets

$$I_2 = [j_1^{(2)}, \dots, j_m^{(2)}], \dots, I_{2k} = [j_1^{(2k)}, \dots, j_m^{(2k)}] \in \{1, \dots, n\}^m$$

et où \pm désigne le signe du produit des permutations σ_i qui convertissent les concaténations des indices ordonnés de I_i avec ceux de $\{1, \dots, n\} \setminus I_i$ en l'identité.

Par exemple, lorsque nous appliquons le théorème 10.3.7 pour une matrice de dimension 4 et pour $I_1 = \{1, 3\}$, l'hyperdéterminant se calcule de la façon suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} |M| &= \text{sign}(1324.1234) \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g & h \\ o & p \end{vmatrix} + \\ &\text{sign}(1324.1324) \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & h \\ n & p \end{vmatrix} + \\ &\text{sign}(1324.1423) \begin{vmatrix} a & d \\ i & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & g \\ n & o \end{vmatrix} + \\ &\text{sign}(1324.2314) \begin{vmatrix} b & c \\ j & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & h \\ m & p \end{vmatrix} + \\ &\text{sign}(1324.2413) \begin{vmatrix} b & d \\ j & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & g \\ m & o \end{vmatrix} + \\ &\text{sign}(1324.3412) \begin{vmatrix} c & d \\ k & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ m & n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pour les hypermatrices générales, l'algorithme induit par le théorème précédent n'est pas plus rapide que le développement direct. Cependant, il est adapté pour le calcul d'hyperdéterminants creux.

¹A. Armenante [2] a donné la première généralisation de la formule de Laplace pour les hyperdéterminants cubiques dont le premier indice n'est pas alternant. Quelques années après, W. Zajaczkowski et L. Gegenbauer [19] ont établi une formule de Laplace pour les hyperdéterminants plus généraux dont chaque indice peut ou non alterner.

Une formule récursive pour $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$

Nous allons appliquer le théorème 10.3.7 afin de trouver une formule récursive pour $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$. Dans cette perspective, nous réalisons le développement de Laplace généralisé (théorème 10.3.7) en fixant le premier indice à $I_1 = \{i_1\}$.

Corollaire 10.3.8. *Soit $1 \leq p \leq m$ et $i_1 \in [1..n]$, alors*

$$\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \sum_I (-1)^{i_1 + \dots + i_{2k}} \mathfrak{D}_{\mu_I^{(1)}, \dots, \mu_I^{(2k)}} \tag{35}$$

où la somme varie sur les $2k$ -tuples, $I = [i_1, i_2, \dots, i_{2k}] \in \{i_1\} \times \{1, \dots, n\}^{2k-1}$ vérifiant

$$\lambda_{n-i_1+1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k} = (2k - 1)n + 1.$$

Les vecteurs décroissants $\mu_I^{(1)}, \dots, \mu_I^{(2k)}$ sont définis par

$$\begin{aligned} \mu_I^{(1)} &= [\lambda_1^{(1)} - 2(k-1), \dots, \lambda_{n-i_1}^{(1)} - 2(k-1), \lambda_{n-i_1+2}^{(1)} - 2(k-1) - 1, \dots, \lambda_n^{(1)} - 2(k-1) - 1] \\ \mu_I^{(2)} &= [\lambda_1^{(2)} + 1, \dots, \lambda_{n-i_2}^{(2)} + 1, \lambda_{n-i_2+2}^{(2)}, \dots, \lambda_n^{(2)}] \\ &\vdots \\ \mu_I^{(2k)} &= [\lambda_1^{(2k)} + 1, \dots, \lambda_{n-i_{2k}}^{(2k)} + 1, \lambda_{n-i_{2k}+2}^{(2k)}, \dots, \lambda_n^{(2k)}]. \end{aligned} \tag{36}$$

Démonstration. En choisissant $I_1 = \{i_1\}$ dans le théorème 10.3.7, d'après la définition de $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$, il en résulte que

$$\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \sum_I (-1)^{i_1 + \dots + i_{2k}} \text{Det} \left(\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus i_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus i_{2k} \end{bmatrix} \right)$$

où la somme est effectuée sur les $2k$ -tuples, $I = [i_1, i_2, \dots, i_{2k}] \in \{i_1\} \times \{1, \dots, n\}^{2k-1}$ vérifiant

$$\lambda_{n-i_1+1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n-i_{2k}+1}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k} = (2k - 1)n + 1.$$

De plus, on a

$$\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, n\} \setminus i_1 \\ \vdots \\ \{1, \dots, n\} \setminus i_{2k} \end{bmatrix} = \Delta_{\mu_I^{(1)}, \dots, \mu_I^{(2k)}}$$

où les partitions $\mu_I^{(i)}$ sont déterminées par (36). Le résultat souhaité est démontré. □

Par exemple, si nous calculons $\mathfrak{D}_{[211][100][100][000]}$. Il faut analyser l'hyperdéterminant de

$$\Delta_{[211][100][100][000]} = \begin{array}{c|cccccccc} i_3, i_4 \setminus i^1, i^2 & 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 & 31 & 32 & 33 \\ \hline 11 & & & & & & & & & \\ 12 & & & & & & & 1 & & 1 \\ 13 & & & 1 & & & & & 1 & \\ 21 & & & & & & & 1 & & 1 \\ 22 & & & 1 & & & & & 1 & \\ 23 & & & & & & 1 & & & \\ 31 & & & & & & 1 & & & \\ 32 & & 1 & & & & & & & \\ 33 & 1 & & & 1 & & & & & \end{array}.$$

Si nous posons $i_1 = 1$, les indices $(1, 3, 2, 2)$, $(1, 2, 3, 2)$, $(1, 1, 3, 3)$ et $(1, 3, 1, 3)$ sont les seuls indices tels que les entrées correspondantes de $\Delta_{[211][100][100][000]}$ ne s'annulent pas. De plus,

$$\Delta_{[211][100][100][000]} \begin{bmatrix} \{2, 3\} \\ \{1, 2\} \\ \{1, 3\} \\ \{1, 3\} \end{bmatrix} = \frac{i_{3,i4} \setminus i^{1,i2}}{\begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \\ & & 1 & 1 \\ & & & & \end{array} \right| = \Delta_{[0-1][00][20][10]}.$$

De la même façon, nous constatons que

$$\Delta_{[211][100][100][000]} \begin{bmatrix} \{2, 3\} \\ \{1, 3\} \\ \{1, 2\} \\ \{1, 3\} \end{bmatrix} = \Delta_{[0-1][20][00][10]},$$

$$\Delta_{[211][100][100][000]} \begin{bmatrix} \{2, 3\} \\ \{2, 3\} \\ \{1, 2\} \\ \{1, 2\} \end{bmatrix} = \Delta_{[0-1][21][00][00]}$$

et

$$\Delta_{[211][100][100][000]} \begin{bmatrix} \{2, 3\} \\ \{1, 2\} \\ \{2, 3\} \\ \{1, 2\} \end{bmatrix} = \Delta_{[0-1][00][21][00]}.$$

Ainsi,

$$\mathfrak{D}_{[211][100][100][000]} = \mathfrak{D}_{[0-1][00][20][10]} + \mathfrak{D}_{[0-1][20][00][10]} + \mathfrak{D}_{[0-1][21][00][00]} + \mathfrak{D}_{[0-1][00][21][00]}.$$

Un rapide calcul établit que

$$\mathfrak{D}_{[0-1][20][00][10]} = \mathfrak{D}_{[0-1][00][20][10]} = 1$$

et

$$\mathfrak{D}_{[0-1][21][00][00]} = \mathfrak{D}_{[0-1][00][21][00]} = 2.$$

Nous parvenons à

$$\mathfrak{D}_{[211][100][100][000]} = 6.$$

Nous allons maintenant illustrer comment la récurrence (35) produit un algorithme permettant de calculer le coefficient $g_\lambda^{n,k}$. Nous choisissons de calculer le coefficient de S_{411} dans le carré du déterminant du Vandermonde pour un alphabet de taille 3. Nous avons besoin de déterminer la valeur de $\mathfrak{D}_{[4,1,1],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]}$. Quand on applique le développement de Laplace généralisé, $\mathfrak{D}_{[4,1,1],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]}$ s'écrit à l'aide d'une somme faisant intervenir 27 hyperdéterminants.

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{[4,1,1],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]} = & \alpha_{3111} \mathfrak{D}_{[2,-1],[0,0],[0,0],[0,0]} + \alpha_{3112} \mathfrak{D}_{[2,-1],[0,0],[0,0],[1,0]} + \\ & \cdots + \alpha_{3333} \mathfrak{D}_{[2,-1],[1,1],[1,1],[1,1]}. \end{aligned}$$

Cependant, seulement trois des coefficients α_I ne s'annulent pas :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{[4,1,1],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]} &= \alpha_{3211} \mathfrak{D}_{[2,-1],[1,0],[0,0],[0,0]} + \alpha_{3112} \mathfrak{D}_{[2,-1],[0,0],[0,0],[1,0]} \\ &\quad + \alpha_{3121} \mathfrak{D}_{[2,-1],[0,0],[1,0],[0,0]}. \end{aligned}$$

On obtient $\alpha_{3112} = \alpha_{3121} = \alpha_{3211} = -1$ et pour des raisons de symétrie

$$\mathfrak{D}_{[2,-1],[1,0],[0,0],[0,0]} = \mathfrak{D}_{[2,-1],[0,0],[0,0],[1,0]} = \mathfrak{D}_{[2,-1],[0,0],[1,0],[0,0]}.$$

Il reste donc à déterminer $\mathfrak{D}_{[2,-1],[1,0],[0,0],[0,0]}$. En utilisant une nouvelle fois le développement de Laplace, la somme est réduite à 8 hyperdéterminants. Parmi ces hyperdéterminants, un seul donne un α_I qui ne s'annule pas :

$$\mathfrak{D}_{[2,-1],[1,0],[0,0],[0,0]} = \alpha_{2111} \mathfrak{D}_{[0],[0],[0],[0]} = -1.$$

Ainsi, $g_{411}^{3,1} = 3$.

10.4 Conséquences

A l'aide de l'expression hyperdéterminantale de $g_{\lambda}^{n,k}$, il est possible de donner des expressions factorisées pour certains coefficients $g_{\lambda}^{n,k}$.

Proposition 10.4.1. *Soient $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}$ tels qu'il existe un entier $0 < m < n$ vérifiant*

$$(\lambda_{n-m+1}^{(1)} + \dots + \lambda_n^{(1)}) + [(\lambda_1^{(2)} + \dots + \lambda_m^{(2)}) + \dots + (\lambda_1^{(2k)} + \dots + \lambda_m^{(2k)})] = (k-1)m(m-1)$$

alors $\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}$ factorise :

$$\mathfrak{D}_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} = \pm \mathfrak{D}_{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(2k)}} \mathfrak{D}_{\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(2k)}}$$

où

$$\mu^{(1)} := [\lambda_{n-m+1}^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}], \nu^{(1)} := [\lambda_1^{(1)} - 2(k-1)m, \dots, \lambda_{n-m}^{(1)} - 2(k-1)m]$$

$$\mu^{(2)} := [\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}], \nu^{(2)} := [\lambda_{m+1}^{(2)}, \dots, \lambda_n^{(2)}]$$

⋮

$$\mu^{(2k)} := [\lambda_1^{(2k)}, \dots, \lambda_m^{(2k)}], \nu^{(2k)} := [\lambda_{m+1}^{(2k)}, \dots, \lambda_n^{(2k)}].$$

Démonstration. Avec les conditions du théorème, lorsque nous fixons le premier indice à $I_1 = \{1, 2, \dots, m\}$, il n'existe qu'un seul mineur d'hyperdéterminant non nul :

$$\Delta_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}} \begin{bmatrix} \{1, \dots, m\} \\ \{n-m+1, \dots, n\} \\ \dots \\ \{n-m+1, \dots, n\} \end{bmatrix}.$$

D'après le développement de Laplace généralisé, nous en déduisons la factorisation recherchée. \square

Corollaire 10.4.2. Soit λ une partition telle qu'il existe un entier $0 < m < n$ vérifiant

$$\lambda_{n-m+1} + \cdots + \lambda_n = km(m-1)$$

alors

$$g_\lambda^{n,k} = g_\mu^{m,k} g_\nu^{n-m,k}$$

où

$$\mu := [\lambda_{n-m+1}, \dots, \lambda_n], \text{ et } \nu := [\lambda_1 - 2km, \dots, \lambda_{n-m} - 2km].$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 10.4.1. \square

Notons que le corollaire 10.4.2 est aussi une conséquence directe de la factorisation

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=1}^m \prod_{j=m+1}^n (x_i - x_j) \Delta(x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Par exemple, pour calculer le coefficient $g_{77420}^{5,1}$, on peut calculer l'hyperdéterminant

$$\mathfrak{D}_{[77420],[0000],[0000],[0000]}.$$

D'après la proposition 10.4.1, pour $m = 3$, il factorise en

$$\pm \mathfrak{D}_{[420],[000],[000],[000]} \mathfrak{D}_{[11],[00],[00],[00]}.$$

Ainsi,

$$g_{77420}^{5,1} = g_{420}^{3,1} g_{11}^{2,1}.$$

Dans ce chapitre, nous avons donné une formule hyperdéterminantale des coefficients apparaissant lors du développement des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur. L'étude des propriétés d'invariances de la formule hyperdéterminantale ainsi que l'étude de son développement de Laplace généralisé ont permis d'établir un algorithme récursif pour déterminer ces coefficients.

Le résultat obtenu est utile car les coefficients peuvent se calculer indépendamment les uns des autres.

Une implémentation en C nous a aidé à engendrer le développement de Δ^{2k} dans la base des fonctions de Schur pour de nombreuses valeurs de k et de n résumées dans le tableau ci-dessous.

k	$n \text{ max}$
1	up to 11
2	up to 7
3	up to 6
4	up to 5
5	up to 5

L'ensemble des résultats peut être téléchargé sur le site :

<http://www-igm.univ-mlv.fr/~luque/Vandermonde.html>.

11

Polynômes de Jack rectangles et hyperdéterminants de Hankel

Dans ce chapitre, nous montrons que les puissances paires du Vandermonde sont des polynômes de Jack sur l'alphabet $-\mathbb{X}$.

Pour cela, nous introduisons un opérateur de substitution $\int_{\mathbb{Y}}$ à l'aide duquel nous démontrons que le produit scalaire des polynômes de Jack rectangle $P_{(p+1)^l p^{n-l}}^{(1/k)}(\mathbb{X}^\vee)$ avec son noyau reproducteur $\prod(1 + x_i y_j)$ est exactement un hyperdéterminant. L'identité s'obtient à l'aide de l'opérateur $\int_{\mathbb{Y}}$ pour $\mathbb{Y} = -\mathbb{X}$, en reliant les puissances paires du Vandermonde à l'hyperdéterminant précédent.

Dans un second temps, nous introduisons les fonctions de Jack gauches pour donner une relation surprenante entre les polynômes de Jack sur les alphabets $-\mathbb{X}$ et \mathbb{X}^\vee .

11.1 Les polynômes de Jack

Soit λ une partition, nous notons par $l(\lambda)$ sa longueur et par z_λ le nombre de permutations de type cyclique λ . Le coefficient z_λ se calcule et vaut :

$$z_\lambda = \prod_{1 \leq i} i^{r_i} \cdot r_i!$$

où r_i est la multiplicité de i dans λ .

Nous allons considérer la généralisation à un paramètre du produit scalaire défini par $\langle \Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle_\alpha = \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \alpha^{l(\lambda)}$, pour $l(\lambda) = n$. Les **polynômes de Jack** $P_\lambda^{(\alpha)}$ sont les seuls polynômes symétriques orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ tels que $P_\lambda^{(\alpha)} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu}^{(\alpha)} m_\mu$. Dans le cas où $\alpha = 1$, la définition coïncide avec celle des polynômes de Schur, se traduisant par $P_\lambda^{(1)} = S_\lambda$. Soit $(Q_\lambda^{(\alpha)})$ la base duale de $(P_\lambda^{(\alpha)})$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ (c'est-à-dire

$\langle P_\lambda, Q_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$). Les polynômes $P_\lambda^{(\alpha)}$ et $Q_\lambda^{(\alpha)}$ sont égaux à un scalaire multiplicatif près et le coefficient de proportionnalité est calculé explicitement dans [39] VI. :

$$b_\lambda^{(\alpha)} := \frac{Q_\lambda^{(\alpha)}}{P_\lambda^{(\alpha)}} = \langle P_\lambda^{(\alpha)}, P_\lambda^{(\alpha)} \rangle^{-1} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + 1}{\alpha(\lambda_i - j + 1) + \lambda'_j - i} \quad (37)$$

où λ' est la partition conjuguée de λ ($\lambda'_j = \text{card}(\{j | \lambda_j \geq i\})$).

Soit $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ un alphabet fini, on note \mathbb{X}^\vee l'alphabet des inverses $\{x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$.

Nous introduisons un second produit scalaire de la façon suivante (voir [39] VI. 10) :

$$\langle f, g \rangle'_{n,\alpha} = \frac{1}{n!} \text{C.T.} \{ f(\mathbb{X}) g(\mathbb{X}^\vee) \prod_{i \neq j} (1 - x_i x_j^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} \}.$$

Les polynômes $P_\lambda^{(\alpha)}$ et $Q_\lambda^{(\alpha)}$ sont aussi orthogonaux pour ce produit scalaire. De plus, les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle'_{n,\alpha}$ coïncident lorsque $\alpha = 1$.

De même, nous considérons une nouvelle normalisation définie par

$$R_\lambda^{(\alpha),n}(\mathbb{Y}) := \langle P_{\lambda'}^{(1/\alpha)}, Q_{\lambda'}^{(1/\alpha)} \rangle'_{n,\frac{1}{\alpha}} Q_\lambda^{(\alpha)}(\mathbb{Y}).$$

Il est à noter que le polynôme $R_\lambda^{(\alpha),n}$ est non nul uniquement lorsque $l(\lambda) \leq n$. Dans ce cas, la valeur du coefficient $\langle P_{\lambda'}^{(1/\alpha)}, Q_{\lambda'}^{(1/\alpha)} \rangle'_{n,\frac{1}{\alpha}}$ est connue et est égale à (voir [39] VI 10)

$$\langle P_{\lambda'}^{(1/\alpha)}, Q_{\lambda'}^{(1/\alpha)} \rangle'_{n,\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{n!} \prod_{(i,j) \in \lambda'} \frac{n + \frac{1}{\alpha}(j-1) - i + 1}{n + \frac{j}{\alpha} - i} \text{C.T.} \left\{ \prod_{i \neq j} (1 - x_i x_j^{-1})^\alpha \right\}. \quad (38)$$

11.2 La substitution $x^n \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{Y})$

Soit $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ un alphabet fini et \mathbb{Y} un alphabet distinct (qui peut être infini). Nous noterons $\int_{\mathbb{Y}}$ la **substitution** :

$$\int_{\mathbb{Y}} x^p = \Lambda^p(\mathbb{Y}),$$

pour tout $x \in \mathbb{X}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$. Si $p < 0$, alors $\Lambda^p(\mathbb{Y}) = 0$.

Dans le chapitre 10, nous avons défini les hyperdéterminants de Hankel par

$$H^f := (f(i_1 + \dots + i_{2k}))_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}$$

et leurs versions décalées par

$$H_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2k)}}^f := \left(f(\lambda_{i_1}^{(1)} + \dots + \lambda_{i_{2k}}^{(2k)} + i_1 + \dots + i_{2k}) \right)_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}.$$

Sans perte de généralité, nous allons nous intéresser à cet hyperdéterminant de Hankel particulier :

$$\mathfrak{H}_n^k(\mathbb{X}) = \text{Det} \left(\Lambda^{i_1 + \dots + i_{2k}}(\mathbb{X}) \right)_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1}. \quad (39)$$

Sa version décalée s'énonce :

$$\mathfrak{H}_v^k(\mathbb{X}) = \text{Det} \left(\Lambda^{i_1 + \dots + i_{2k} + v_{i_1}}(\mathbb{X}) \right)_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1} \quad (40)$$

où v est un vecteur d'entiers relatifs.

De manière analogue, nous définissons l'hyperdéterminant de Toeplitz décalé par

$$\mathfrak{T}_v^k(\mathbb{X}) = \text{Det} \left(\Lambda^{i_1 + \dots + i_k - (i_{k+1} + \dots + i_{2k}) + v_{i_1}}(\mathbb{X}) \right)_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1} \quad (41)$$

Les hyperdéterminants de Hankel et de Toeplitz sont liés par la formule suivante :

Proposition 11.2.1. 1. $\mathfrak{H}_v^k(\mathbb{X}) = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \mathfrak{T}_{v+(k(n-1))n}^k(\mathbb{X})$

2. $\mathfrak{T}_v^k(\mathbb{X}) = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \mathfrak{H}_{v+(k(1-n))n}^k(\mathbb{X})$.

Démonstration. Les égalités (1) et (2) sont équivalentes et issues des définitions (40) et (41),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_v^k(\mathbb{X}) &= \text{Det} \left(\Lambda^{i_1 + \dots + i_k + (n-1-i_{k+1}) + \dots + (n-1-i_{2k}) - k(n-1) + v_{i_1}}(\mathbb{X}) \right) \\ &= (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \mathfrak{H}_{v+(k(1-n))n}^k(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

□

La proposition ci-après constitue l'outil principal de ce chapitre.

Proposition 11.2.2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N} - \{0\}$,

$$\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} \Delta(\mathbb{X})^{2k} = \mathfrak{H}_n^k(\mathbb{Y})$$

où $\Delta(\mathbb{X}) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$.

Démonstration. Nous commençons par développer les puissances paires du déterminant de la matrice de Vandermonde :

$$\Delta(\mathbb{X})^{2k} = \det(x_i^{j-1})^{2k} = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma_1 \dots \sigma_{2k}) \prod_i x_i^{\sigma_1(i) + \dots + \sigma_{2k}(i) - 2k}.$$

En appliquant la substitution, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} \Delta(\mathbb{X})^{2k} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma_1 \dots \sigma_{2k}) \prod_i \Lambda^{\sigma_1(i) + \dots + \sigma_{2k}(i) - 2k}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathfrak{H}_n^k(\mathbb{Y}). \end{aligned}$$

Ce qui clôt la preuve. □

De manière générale, nous observons

Proposition 11.2.3. Soit λ une partition,

$$\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} S_\lambda(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2k} = \mathfrak{H}_{\text{inverse}_n(\lambda)}^k(\mathbb{Y}),$$

où $\text{inverse}_n(v) = (v_n, \dots, v_1)$ si $v = (v_1, \dots, v_p)$ est une composition avec $p \leq n$ et $v_{p+i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n - p$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$S_\lambda(\mathbb{X})\Delta(\mathbb{X})^{2k} = \det(x_i^{\lambda_{n-j+1}+j-1}) \det(x_i^{j-1})^{2k-1}$$

et d'appliquer le même calcul apparaissant dans la preuve de la proposition 11.2.2. \square

Lorsqu'on utilise la formule de Jacobi-Trudi :

$$S_\lambda = \det(\Lambda^{\lambda'_{n-i}-i+j}) \quad (42)$$

où λ' est la partition conjuguée de λ , la proposition 11.2.3 pour $k = 1$ implique

$$\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} S_\lambda(\mathbb{X})\Delta(\mathbb{X})^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S_{(\lambda+(n-1)^n)' }(\mathbb{Y}).$$

11.3 Polynômes de Jack quasi-rectangles et hyperdéterminants

L'opérateur $\int_{\mathbb{Y}}$ et les polynômes de Jack quasi-rectangles

Supposons que $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un alphabet fini. Soit $\mathbb{Y} = \{y_1, \dots\}$ un autre alphabet (potentiellement infini) et considérons l'intégrale

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{n!} \text{C.T.} \{ \Lambda^n(\mathbb{X}^\vee)^{p+k(n-1)} \Lambda^l(\mathbb{X}^\vee) \prod (1 + x_i y_j) \Delta(\mathbb{X})^{2k} \}. \quad (43)$$

Notons que

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}) = \frac{(-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}}}{n!} \text{C.T.} \{ \Lambda^n(\mathbb{X}^\vee)^p \Lambda^l(\mathbb{X}^\vee) \prod (1 + x_i y_j) \prod_{i \neq j} (1 - \frac{x_i}{x_j})^k \} \quad (44)$$

et

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}) = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \langle \Lambda^n(\mathbb{X}^\vee)^p \Lambda^l(\mathbb{X}^\vee), \prod (1 + x_i y_j) \rangle'_{n, \frac{1}{k}}.$$

Cependant,

$$\Lambda^n(\mathbb{X}^\vee)^p \Lambda^l(\mathbb{X}^\vee) = P_{(p+1)^l p^{n-l}}^{(1/k)}(\mathbb{X}^\vee) \quad (45)$$

et

$$\prod (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} Q_{\lambda}^{(1/k)}(\mathbb{X}) Q_{\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Y}). \quad (46)$$

Ainsi, d'après l'orthogonalité de $P_{\lambda}^{(\alpha)}$ et de $Q_{\lambda}^{(\alpha)}$, les égalités (44), (45) et (46) impliquent

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}) = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} R_{npl}^{(k),n}(\mathbb{Y}). \quad (47)$$

De surcroît,

$$\int_{\mathbb{Y}} x^m = \Lambda^m(\mathbb{Y}) = \text{C.T.} \{ x^{-m} \prod_i (1 + x y_i) \}.$$

En remarquant que $\Delta(\mathbb{X}^\vee) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Delta(\mathbb{X})}{\Lambda^n(\mathbb{X})^{n-1}}$ et $\Lambda^n(\mathbb{X})^m \Lambda^l(\mathbb{X}) = S_{(m^n)_{+}(1^l)}(\mathbb{X})$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'égalité (43) peut être réécrite sous la forme :

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} S_{((p-k(n-1))^n)_{+}(1^l)}(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2k} = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \mathfrak{F}_{p^{n-l}(p+1)^l}^k(\mathbb{X}). \quad (48)$$

On en déduit une expression hyperdéterminantale d'un polynôme de Jack indexé par une partition de la forme $n^p l$.

Proposition 11.3.1. *Pour tout entier positif n, p, l et k ,*

$$R_{n^p l}^{(k),n} = \mathfrak{F}_{p^{n-l}(p+1)^l}^k.$$

Le terme constant apparaissant dans (38) correspond à un cas particulier de la conjecture de F. J. Dyson [14]. La conjecture de F. J. Dyson a été prouvée de manière indépendante par J. Gunson [24] et K. G. Wilson [45] (I. J. Good [22] a donné une preuve élémentaire en utilisant l'interpolation de Lagrange) :

$$\text{C.T.} \prod_{i \neq j} (1 - x_i x_j^{-1})^{a_i} = \binom{a_1 + \dots + a_n}{a_1, \dots, a_n}$$

pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a

$$Q_{n^p l}^{(k)}(\mathbb{Y}) = n! \binom{kn}{k, \dots, k}^{-1} \kappa(n, p, l; k) \mathfrak{F}_{p^{n-l}(p+1)^l}^k(\mathbb{Y})$$

où

$$\kappa(n, p, l; k) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^p \frac{j+k(i-1)}{j-1+ki} \prod_{i=1}^l \frac{p+1+k(n-i)}{p+k(n-i+1)}.$$

Notamment, quand $l = 0$, nous retrouvons le théorème de Matsumoto.

Théorème 11.3.2. (Matsumoto [40])

$$P_{n^p}^{(k)}(\mathbb{Y}) = n! \binom{kn}{k, \dots, k}^{-1} \mathfrak{F}_{p^n}^k(\mathbb{Y}).$$

Démonstration. D'après l'égalité (37) et (38),

$$\langle P_{p^n}^{(1/k)}, Q_{p^n}^{(1/k)} \rangle_{1/k, n} = \frac{1}{n!} \binom{kn}{k, \dots, k} \langle P_{n^p l}^{(k)}, P_{n^p l}^{(k)} \rangle_k.$$

La proposition 11.3.1 permet de conclure. □

Si nous effectuons la spécialisation $p = k(n-1)$, nous obtenons une expression de l'hyperdéterminant de Hankel comme un polynôme de Jack.

Corollaire 11.3.3.

$$\mathfrak{H}_n^k(\mathbb{Y}) = \frac{(-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}}}{n!} \binom{kn}{k, \dots, k} P_{n^{k(n-1)}}^{(k)}(\mathbb{Y}).$$

Polynômes de Jack avec le paramètre $\alpha = \frac{1}{k}$

Soit $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}$ un alphabet (potentiellement infini). On considère l'endomorphisme défini sur les fonctions symétriques somme de puissance $\Psi_p(\mathbb{Y})$ par $\omega_\alpha(\Psi_p(\mathbb{Y})) := \Psi_p(-\alpha\bar{\mathbb{Y}}) = (-1)^{p-1}\alpha\Psi_p(\mathbb{Y})$ (voir [39] VI 10), où $\bar{\mathbb{Y}} = \{-y_1, -y_2, \dots\}$. Cette application est connue pour satisfaire les identités

$$\omega_\alpha P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbb{Y}) = Q_{\lambda'}^{(\frac{1}{\alpha})}(\mathbb{Y})$$

et

$$\omega_\alpha \Lambda^n(\mathbb{Y}) = g_{(\frac{1}{\alpha})}^n(\mathbb{Y}) := \Lambda^n(-\alpha\bar{\mathbb{Y}}).$$

En appliquant ω_k sur la proposition 11.3.1, on obtient l'expression du polynôme de Jack avec le paramètre $\alpha = \frac{1}{k}$ pour un quasi-rectangle de forme $\lambda = (p+1)^l p^{n-l}$ en un hyperdéterminant de Toplitz décalé dont les entrées sont

$$M_{i_1 \dots i_{2k}} = g_{\frac{1}{k}}^{i_1 + \dots + i_k - i_{k+1} - \dots - i_{2k} + \lambda_{n-i_1+1}}.$$

Proposition 11.3.4. *La relation suivante existe*

$$P_{(p+1)^l p^{n-l}}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{Y}) = n! \binom{kn}{k, \dots, k}^{-1} \kappa(n, p, l; k) \mathfrak{F}_{p^{n-l}(p+1)^l}^{(k)}(-k\bar{\mathbb{Y}}).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 11.3.1 sur l'alphabet $-k\mathbb{Y}$ pour obtenir

$$Q_{npl}^{(k)}(-k\mathbb{Y}) = n! \binom{kn}{k, \dots, k}^{-1} \kappa(n, p, l; k) \mathfrak{F}_{p^{n-l}(p+1)^l}^{(k)}(-k\bar{\mathbb{Y}}).$$

Le résultat se déduit à partir de

$$Q_{npl}^{(k)}(-k\bar{\mathbb{Y}}) = \omega_k Q_{npl}^{(k)}(\mathbb{Y}) = P_{(p+1)^l p^{n-l}}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{Y}).$$

□

11.4 Puissances paires du Vandermonde et polynômes de Jack rectangles sur l'alphabet $-\mathbb{X}$

Dans ce paragraphe, nous travaillons avec les polynômes de Laurent sur l'alphabet $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. L'espace des polynômes symétriques de Laurent est engendré à l'aide d'une base indexée par des vecteurs décroissants $(\tilde{S}_\lambda(\mathbb{X}))_{(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n}$ et définie de la façon suivante :

$$\tilde{S}_\lambda(\mathbb{X}) := \frac{\det(x_i^{\lambda_j + n - j})}{\Delta(\mathbb{X})}.$$

En effet, chaque polynôme de Laurent f peut être écrit comme

$$f(\mathbb{X}) = \Lambda^n(\mathbb{X})^{-m} g(\mathbb{X})$$

où $g(\mathbb{X})$ est un polynôme symétrique en \mathbb{X} . Étant donné que $g(\mathbb{X})$ est une combinaison linéaire des fonctions de Schur, $f(\mathbb{X})$ est aussi une combinaison linéaire de \tilde{S}_λ . Soit $\bar{\mathbb{X}} = \{-x_1, \dots, -x_n\}$ l'alphabet des opposés de \mathbb{X} . Nous considérons la substitution $\int_{-\bar{\mathbb{X}}}$ qui remplace x^p pour $x \in \mathbb{X}$ et $p \in \mathbb{Z}$ par les fonctions symétriques complètes $S^n(\mathbb{X})$.

Considérons l'alternant

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbb{X}) &:= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) x^{\sigma\lambda} \\ &= \det(x_i^{\lambda_j}) \\ &= \tilde{S}_{\lambda-\delta}(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X}) \end{aligned}$$

où $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$. D'après cette définition, l'opérateur $\frac{1}{n!} \int_{-\bar{\mathbb{X}}}$ transforme le produit des $2k$ alternants $a_\lambda, a_\mu, \dots, a_\rho$ en l'hyperdéterminant :

$$\frac{1}{n!} \int_{-\bar{\mathbb{X}}} a_\lambda(\mathbb{X}) a_\mu(\mathbb{X}) \cdots a_\rho(\mathbb{X}) = \text{Det}(S^{\lambda_{i_1} + \mu_{i_2} + \cdots + \rho_{i_{2k}}}(\mathbb{X}))_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n}. \quad (49)$$

Soit l'opérateur linéaire Ω^+ défini par

$$\Omega^+ \tilde{S}_\lambda(\mathbb{X}) := S_\lambda(\mathbb{X}) := \det(S^{\lambda_i + i - j}(\mathbb{X})). \quad (50)$$

Les polynômes symétriques sont invariants pour cet opérateur.

De plus, Ω^+ s'exprime à l'aide de $\int_{-\bar{\mathbb{X}}}$.

Lemme 11.4.1. *On a*

$$\Omega^+ = \frac{1}{n!} \int_{-\bar{\mathbb{X}}} a_\delta(\mathbb{X}) a_{-\delta}(\mathbb{X}).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n!} \int_{-\bar{\mathbb{X}}} a_\delta(\mathbb{X}) a_{-\delta}(\mathbb{X}) \tilde{S}_\lambda(\mathbb{X}) = S_\lambda(\mathbb{X}).$$

Cependant

$$a_\delta(\mathbb{X}) a_{-\delta}(\mathbb{X}) \tilde{S}_\lambda(\mathbb{X}) = a_{\lambda+\delta}(\mathbb{X}) a_{-\delta}(\mathbb{X})$$

et d'après (49), nous obtenons le résultat souhaité. \square

Proposition 11.4.2. *Soit $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ un alphabet fini et $0 \leq l \leq p \in \mathbb{N}$.*

$$R_{n^{p+(k-1)(n-1)l}}^{(k),n}(-\mathbb{X}) = (-1)^{\frac{(k-1)n(n-1)}{2} + np+l} S_{(p+1)^l p^{n-l}}(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)}. \quad (51)$$

Démonstration. D'après le lemme 11.4.1, on a

$$\begin{aligned} S_\lambda(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)} &= \Omega^+ S_\lambda(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)} \\ &= \frac{1}{n!} \int_{-\bar{\mathbb{X}}} a_{\lambda+\delta}(\mathbb{X}) a_\delta(\mathbb{X})^{2(k-1)} a_{-\delta}(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Selon l'égalité (49), nous montrons que

$$\begin{aligned} S_\lambda(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)} &= \text{Det}(S^{\lambda_{i_1} + n - i_1 + \cdots + n - i_{2k-1} + i_{2k} - n}(\mathbb{X}))_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n} \\ &= \text{Det}(S^{\lambda_{n-i_1} + i_1 + \cdots + i_{2k-1} - i_{2k}}(\mathbb{X}))_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{Det}(S^{\lambda_{n-i_1} + 1 - n + i_1 + \cdots + i_{2k}}(\mathbb{X}))_{0 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n-1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathfrak{S}_{\text{reverse}_n(\lambda) - [(n-1)n]}(-\bar{\mathbb{X}}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)(k-1)}{2}} \mathfrak{T}_{\text{reverse}_n(\lambda) - [(k-1)(n-1)n]}(-\bar{\mathbb{X}}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 11.3.1

$$\begin{aligned} R_{[n^{p+(k-1)(n-1)}l]}^{(k),n}(-\overline{\mathbb{X}}) &= \mathfrak{Z}_{[((k-1)(n-1))^n + [p^{n-l}(p+1)^l]}^{(k)}(-\overline{\mathbb{X}}) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)(k-1)}{2}} S_{[(p+1)^l p^{n-l}]}(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)}. \end{aligned}$$

Toutefois, le polynôme de Jack $R_\lambda^{(\alpha),n}$ étant homogène, nous établissons que

$$R_\lambda^{(\alpha),n}(-\overline{\mathbb{X}}) = (-1)^{|\lambda|} R_\lambda^{(\alpha),n}(-\mathbb{X}).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Nous remarquons les propriétés suivantes :

- un cas spécial de la proposition 11.4.2 apparaît dans [37],
- la proposition 11.4.2 peut être formulée ainsi :

Les polynômes $P_{n^{p+(k-1)(n-1)}l}^{(k)}(-\mathbb{X})$ et $P_{(p^n)_{+(1^l)}}^{(k)}(\mathbb{X}) \Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)}$ sont proportionnels.

Ce type d'identité, qui relie les polynômes de Jack en \mathbb{X} et les polynômes de Jack en $-\mathbb{X}$, peut être déduit d'un cas plus général faisant intervenir les polynômes de Macdonald où t est spécialisé à une puissance de q . Nous verrons cela plus en détail dans le chapitre 12.

Un cas particulier de la proposition 11.4.2 correspond aux puissances paires du déterminant de Vandermonde $\Delta(\mathbb{X})^{2k}$. Le polynôme de Vandermonde est un polynôme de Jack sur l'alphabet $-\mathbb{X}$.

Corollaire 11.4.3. *Posons $l = p = 0$ dans l'équation (51), on obtient*

$$\Delta(\mathbb{X})^{2k} = \frac{(-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}}}{n!} \binom{(k+1)n}{k+1, \dots, k+1} P_{n^{(n-1)k}}^{(k+1)}(-\mathbb{X}).$$

Nous allons maintenant établir une identité particulière reliant les polynômes de Jack sur les alphabets $-\mathbb{X}$ et \mathbb{X}^\vee . Cette identité est formulée dans la section 11.6 et nécessite une présentation des polynômes de Jack gauches dans la section qui suit.

11.5 Polynômes de Jack gauches

Soient les fonctions gauches Q définies par (voir [39] VI 10)

$$\langle Q_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}, P_\nu^{(\alpha)} \rangle := \langle Q_\lambda^{(\alpha)}, P_\mu^{(\alpha)} P_\nu^{(\alpha)} \rangle,$$

ce qui revient à écrire

$$Q_{\lambda/\mu}^{(\alpha)} = \sum_{\nu} \langle Q_\lambda^{(\alpha)}, P_\nu^{(\alpha)} P_\mu^{(\alpha)} \rangle Q_\nu^{(\alpha)}. \quad (52)$$

Généralement, les polynômes de Jack gauches apparaissent lorsque l'on développe les polynômes de Jack sur une somme d'alphabets.

Proposition 11.5.1. Soit \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux alphabets, on a

$$Q_\lambda^{(\alpha)}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \sum_{\mu} Q_\mu^{(\alpha)}(\mathbb{X}) Q_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}(\mathbb{Y})$$

ou, de manière équivalente,

$$P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \sum_{\mu} P_\mu^{(\alpha)}(\mathbb{X}) P_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}(\mathbb{Y}).$$

Démonstration. Voir [39] VI.7 pour une courte preuve de cette identité. \square

Une autre normalisation importante est donnée par

$$J_\lambda^{(\alpha)} = c_\lambda(\alpha) P_\lambda^{(\alpha)} = c'_\lambda(\alpha) Q_\lambda^{(\alpha)}$$

où

$$c_\lambda(\alpha) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + 1)$$

et

$$c'_\lambda(\alpha) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (\alpha(\lambda_i - j + 1) + \lambda'_j - i)$$

quand λ' code la partition conjuguée de λ .

Si nous définissons les fonctions gauches J par

$$J_{\lambda/\mu}^{(\alpha)} := \sum_{\nu} \frac{\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\mu^{(\alpha)} J_\nu^{(\alpha)} \rangle_\alpha}{\langle J_\nu^{(\alpha)}, J_\nu^{(\alpha)} \rangle_\alpha} J_\nu^{(\alpha)}$$

alors $J_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}$ est de nouveau proportionnel à $P_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}$ et $Q_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}$:

$$J_{\lambda/\mu}^{(\alpha)} = c_\lambda(\alpha) c'_\mu(\alpha) P_{\lambda/\mu}^{(\alpha)} = c'_\lambda(\alpha) c_\mu(\alpha) Q_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}. \quad (53)$$

11.6 L'opérateur $\int_{\mathbb{Y}}$ et les fonctions symétriques de Jack gauches

Soit \mathbb{X} , \mathbb{Y} et \mathbb{Z} trois alphabets tels que $\#\mathbb{X} = n < \infty$ et $\#\mathbb{Z} = m < \infty$.

Considérons le polynôme

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{Y}} \prod_i x_i^{-m} \prod_{i,j} (x_i + z_j) \Delta^{2k}(\mathbb{X}).$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Y}} x^{p-m} \prod_i (x + z_i) &= \sum_{i=0}^m \Lambda^{p+i-m}(\mathbb{Y}) \Lambda^{m-i}(\mathbb{Z}) \\ &= \Lambda^p(\mathbb{Y} + \mathbb{Z}) \\ &= \int_{\mathbb{Y} + \mathbb{Z}} x^p, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_{n,k}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) &= \mathfrak{H}_n^k(\mathbb{Y} + \mathbb{Z}) \\ &= \frac{(-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}}}{n!} \binom{nk}{k, \dots, k} P_{n^{k(n-1)}}^{(k)}(\mathbb{Y} + \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (54)$$

Ainsi, l'image de $Q_{\lambda}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{X}^{\vee})\Delta(\mathbb{X})^{2k}$ par $\int_{\mathbb{Y}}$ est un polynôme de Jack.

Corollaire 11.6.1. *On a*

$$\int_{\mathbb{Y}} Q_{\lambda}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{X}^{\vee})\Delta(\mathbb{X})^{2k} = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \binom{nk}{k, \dots, k} (b_{n^{k(n-1)}}^{(k)})^{-1} Q_{n^{k(n-1)}/\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Y})$$

où $b_{n^{k(n-1)}}^{(k)} = \frac{(2(n-1)!(nk)!((n-1)k)!}{kn!(n-1)!((2n-1)k-1)!}$.

Démonstration. L'équation est une conséquence de

$$\prod_i x_i^{-m} \prod_{i,j} (x_i + z_j) = \prod_{i,j} \left(1 + \frac{z_j}{x_i}\right) = \sum_{\lambda} Q_{\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Z}) Q_{\lambda}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{X}^{\vee}).$$

En effet,

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda} b_{\lambda'}^{(k)} P_{\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Z}) \int_{\mathbb{Y}} Q_{\lambda}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{X}^{\vee})\Delta(\mathbb{X})^{2k}.$$

Et dans le second terme de (54) nous trouvons :

$$I_{n,k}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \frac{(-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}}}{n!} \binom{nk}{k, \dots, k} \sum_{\lambda} P_{\lambda}^{(k)}(\mathbb{Z}) P_{n^{k(n-1)}/\lambda}^{(k)}(\mathbb{Y}).$$

En identifiant les coefficients de $P_{\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Z})$ dans les deux expressions, nous démontrons que

$$\int_{\mathbb{Y}} Q_{\lambda}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{X}^{\vee})\Delta(\mathbb{X})^{2k} = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \binom{nk}{k, \dots, k} (b_{\lambda}^{(k)})^{-1} P_{n^{k(n-1)}/\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Y})$$

où la valeur de $b_{\lambda}^{(k)} := \frac{P_{\lambda}^{(k)}}{Q_{\lambda}^{(k)}}$ est donnée par l'équation (37). Cependant, d'après 53, $P_{\lambda/\mu}^{(\alpha)} = \frac{b_{\lambda}^{(\alpha)}}{b_{\mu}^{(\alpha)}} Q_{\lambda/\mu}^{(\alpha)}$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{Y}} Q_{\lambda}^{(\frac{1}{k})}(\mathbb{X}^{\vee})\Delta(\mathbb{X})^{2k} = (-1)^{\frac{kn(n-1)}{2}} \binom{nk}{k, \dots, k} (b_{n^{k(n-1)}}^{(k)})^{-1} Q_{n^{k(n-1)}/\lambda'}^{(k)}(\mathbb{Y}).$$

La valeur de $b_{n^{k(n-1)}}^{(k)}$ est déduite de l'équation (37) après simplification. \square

En utilisant maintenant le corollaire 11.6.1, on trouve l'identité reliant les polynômes de Jack sur les alphabets $-\mathbb{X}$ et \mathbb{X}^{\vee} .

Proposition 11.6.2. *On a*

$$\begin{aligned} &\Omega^+ Q_{\lambda}^{(1/k)}(\mathbb{X}^{\vee})\Delta(\mathbb{X})^{2(k-1)} \Lambda^n(\mathbb{X})^{n-1} = \\ &\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)(k-1)}{2} + |\lambda|}}{n!} \binom{nk}{k, \dots, k} (b_{n^{k(n-1)}}^{(k)})^{-1} Q_{n^{k(n-1)}/\lambda'}^{(k)}(-\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe du lemme 11.4.1 et du corollaire 11.6.1. \square

12

Une q -déformation des puissances paires du Vandermonde : les puissances polarisées du q -discriminant

Soit $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ un alphabet. Le q -discriminant

$$\mathfrak{D}_1(\mathbb{X}; q) := \prod_{i \neq j} (qx_i - x_j)$$

est un polynôme rencontré dans différents domaines mathématiques. En particulier, sa spécialisation $q = 1$ donne le discriminant qui est une fonction symétrique invariante pour la transformation $x \rightarrow x + 1$.

Les puissances du discriminant ($q = 1$) apparaissent dans le contexte de la généralisation de l'intégrale de Selberg [28, 30, 42]. Ces intégrales sont liées à la notion d'hyperdéterminant de Hankel [37, 38] et de polynôme de Jack [26, 27]. Les intégrales de Selberg admettent un q -analogue qui fait intervenir le q -discriminant (voir [39] ex3 p.374). Il est intéressant de remarquer que ces intégrales sont en relation avec les polynômes de Macdonald [44].

Plus généralement, la spécialisation $t^a q^b = 1$ suggère des identités plus profondes liées à la généralisation du déterminant d'Izergin et Korepin due à M. Gaudin [34].

Dans cette partie de l'étude, nous souhaitons analyser les puissances paires du Vandermonde au moyen d'une q -déformation des puissances du discriminant : les **puissances polarisées du q -discriminant**. Elles sont définies par

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q) := \prod_{l=1}^k \mathfrak{D}_1(\mathbb{X}; q^{2l-1}).$$

En utilisant l'opérateur de Macdonald \mathfrak{M}_1 , nous montrons dans les paragraphes 12.1 et 12.2 que les puissances polarisées du q -discriminant sont des polynômes de Macdonald

escaliers. Quand on spécialise q à 1, cette identité donne (paragraphe 12.3) une nouvelle expression des puissances paires du Vandermonde à l'aide des polynômes de Jack escaliers.

Enfin, au paragraphe 12.4, nous déterminons les partitions qui sont présentes dans le développement des puissances polarisées du q -discriminant sur la base des fonctions de Schur.

12.1 Polynômes et opérateur de Macdonald

Soit la q, t -déformation du produit scalaire usuel sur les fonctions symétriques, notée $\langle, \rangle_{q,t}$ et définie par (voir [39] VI.4 p322)

$$\langle \Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda(q, t)$$

avec $z_\lambda(q, t)$ la (q, t) -déformation de z_λ suivante :

$$z_\lambda(q, t) = z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}.$$

Nous rappelons que

$$z_\lambda := \prod_{1 \leq i} i^{m_i} . m_i!.$$

Ce produit scalaire généralise le produit scalaire \langle, \rangle_α considéré dans la section 11.1 du chapitre 11.

Les **polynômes de Macdonald** $(P_\lambda(\mathbb{X}; q, t))_\lambda$ forment une base unique de fonctions symétriques orthogonales pour $\langle, \rangle_{q,t}$, vérifiant

$$P_\lambda(\mathbb{X}; q, t) = m_\lambda(\mathbb{X}) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(\mathbb{X}) \quad (55)$$

où m_λ est une fonction monomiale (notation de [39] I.2.1 p8). Leur fonction génératrice est (voir [39] VI.4.13 p324)

$$K_{q,t}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \sigma_1 \left(\frac{1-t}{1-q} \mathbb{X}\mathbb{Y} \right) = \sum_{\lambda} P_\lambda(\mathbb{X}; q, t) Q_\lambda(\mathbb{Y}; q, t),$$

formule pour laquelle $Q_\lambda(\mathbb{X}; q, t) = b_\lambda(q, t) P_\lambda(\mathbb{Y}; q, t)$ avec

$$b_\lambda(q, t) = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1 - q^{\lambda_i - j + 1} t^{\lambda'_j - i}}{1 - q^{\lambda_i - j} t^{\lambda'_j - i + 1}},$$

(voir [39] VI.6.19 p339).

De manière alternative, quand $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un alphabet fini, les polynômes de Macdonald peuvent être définis comme les valeurs propres de l'opérateur de Sekiguchi-Debiard-Macdonald \mathfrak{M}_1 (voir [39] VI.3 p315 et VI.4 p325). En effet,

$$P_\lambda(\mathbb{X}; q, t) \mathfrak{M}_1 = [[\lambda]]_{q,t} P_\lambda(\mathbb{X}; q, t), \quad (56)$$

où, quel que soit le vecteur $v \in \mathbb{N}^n$, $[[v]]_{q,t}$ est défini par

$$[[v]]_{q,t} := q^{v_1}t^{n-1} + q^{v_2}t^{n-2} + \dots + q^{v_n}. \quad (57)$$

Pour tout entier i , nous appelons **différence divisée** ∂_i l'opérateur agissant sur la droite qui s'écrit :

$$f(x_1, \dots, x_n)\partial_i := \frac{f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

L'opérateur \mathfrak{M}_1 s'exprime au moyen des différences divisées ∂_i comme suit :

$$f(\mathbb{X})\mathfrak{M}_1 = f(\mathbb{X} - (1 - q)x_1)R(tx_1; \mathbb{X} - x_1)\partial_1 \dots \partial_{n-1} \quad (58)$$

où $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \prod_{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}}(x - y)$ est le **résultant**.

12.2 Polynômes de Macdonald escaliers et q -discriminant

Soit ρ la partition définie par $\rho := [n - 1, \dots, 1, 0]$ et soit $m\rho := [m(n - 1), \dots, m, 0]$ pour $m \in \mathbb{N}$.

Nous souhaitons établir que les puissances polarisées du q -discriminant sont des polynômes de Macdonald. Pour cela, nous allons vérifier qu'elles sont des fonctions propres de l'opérateur de Macdonald \mathcal{M}_1 spécialisées. Cependant, après spécialisation de $t \rightarrow q^{\frac{(1-2k)}{2}}$, les espaces propres de \mathcal{M}_1 ne sont plus forcément de dimension 1. Le lemme suivant montre que l'espace propre du polynôme $P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, q^{\frac{(1-2k)}{2}})$ conserve sa dimension à 1. Nous verrons ultérieurement que $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q)$ appartient à l'espace propre de $P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, q^{\frac{(1-2k)}{2}})$.

Lemme 12.2.1. *Après la spécialisation $t \rightarrow q^{\frac{(1-2k)}{2}}$, le polynôme de Macdonald $P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, q^{\frac{(1-2k)}{2}})$ reste dans un espace propre de \mathfrak{M}_1 dont la dimension vaut 1 et sa valeur propre vaut*

$$[[2k\rho]]_{q,q^{\frac{1-2k}{2}}} = \sum_{i=1}^n q^{(2k+1)(n-i)/2}. \quad (59)$$

Démonstration. D'après l'équation (57), la valeur propre associée à la partition λ est

$$[[\lambda]]_{q,q^{\frac{1-2k}{2}}} = \sum_{i=1}^n q^{(1-2k)(n-i)/2 + \lambda_i}.$$

Si $[[\lambda]]_{q,q^{\frac{1-2k}{2}}} = [[2k\rho]]_{q,q^{\frac{1-2k}{2}}}$, il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que, pour chaque $1 \leq i \leq n$, on a $\frac{1}{2}(2k + 1)(n - \sigma(i)) = \frac{1}{2}(1 - 2k)(n - i) + \lambda_i$.

Nous obtenons

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} = \frac{1}{2}(2k + 1)(\sigma(i + 1) - \sigma(i)) - \frac{1}{2}(1 - 2k). \quad (60)$$

Étant donné que λ est une partition, la propriété $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 0$ et l'égalité (60) impliquent que $\sigma(i + 1) - \sigma(i) \geq \frac{1-2k}{1+2k} > -1$. On en déduit donc que σ est la permutation identité et que $\lambda = 2k\rho$. \square

Dans la suite de ce travail, nous posons $p := q^{-\frac{1}{2}}$ et nous considérons un alphabet fini $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Avec ces hypothèses, nous allons montrer que les puissances polarisées $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}, p)$ du discriminant sont des polynômes de Macdonald escaliers pour une spécialisation donnée.

Théorème 12.2.2. *On a*

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p) = (-p)^{\frac{1}{2}k^2n(n-1)} P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, p^{2k-1}). \quad (61)$$

Démonstration. En modifiant l'ordre des facteurs dans $\mathfrak{D}_k(qx_1, x_2, \dots, x_n; p)R(p^{2k-1}x_1; \mathbb{X} - x_1)$, nous obtenons

$$\mathfrak{D}_k(qx_1, x_2, \dots, x_n; p)R(p^{2k-1}x_1; \mathbb{X} - x_1) = \mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p)R(p^{-(2k+1)}x_1; \mathbb{X} - x_1). \quad (62)$$

Ainsi, en appliquant l'équation (62), le polynôme $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p)\mathfrak{M}_1$ s'écrit :

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p)\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p)R(p^{-2k-1}x_1; \mathbb{X} - x_1)\partial_1 \cdots \partial_{n-1}.$$

Étant donné que le polynôme $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p)$ est symétrique en \mathbb{X} , il commute avec $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$, ce qui donne :

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p)R(p^{-2k-1}x_1; \mathbb{X} - x_1)\partial_1 \cdots \partial_{n-1} = R(p^{-2k-1}x_1; \mathbb{X} - x_1)\partial_1 \cdots \partial_{n-1}\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p).$$

Le facteur restant $R(p^{-2k-1}x_1; \mathbb{X} - x_1)$ est de degré total $n - 1$. Il se réduit donc à une constante après application de $\partial_1 \cdots \partial_{n-1}$.

Nous allons utiliser le lemme ci-dessous pour calculer ce coefficient noté \mathbb{k} .

Lemme 12.2.3. *Soit a, b deux lettres,*

$$R(ax_1; bx_2, \dots, bx_n)\partial_1 \cdots \partial_{n-1} = \sum_{i+j=n-1} a^i b^j. \quad (63)$$

Démonstration. Écrivons $R(ax_1; bx_2, \dots, bx_n)$ à l'aide des fonctions complètes :

$$S_{n-1}(ax_1 - b(\mathbb{X} - x_1)) = S_{n-1}((a+b)x_1 - b\mathbb{X}) = \sum x_1^i S_i(a+b)S_{n-1-i}(-b\mathbb{X}).$$

L'image de cette somme, après application de l'opérateur $\partial_1 \cdots \partial_{n-1}$, est égale à $S_{n-1}(a+b)S_0(-\mathbb{X})$ comme souhaité. \square

En appliquant le lemme 12.2.3, on obtient la valeur de \mathbb{k} ,

$$\mathbb{k} = \sum_{i=1}^n p^{(2k+1)(i-n)} = \sum_{i=1}^n p^{(2k-1)(n-i)-4k(n-i)}. \quad (64)$$

De l'égalité (59), on reconnaît que $\mathbb{k} = [[2k\rho]]_{q,p^{2k-1}}$. Cela montre que

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; p) = \beta_{k,n}(p)P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, p^{2k-1}) \quad (65)$$

où $\beta_{k,n}(p)$ est une constante dépendant uniquement de p, k et n . Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient $\beta_{k,n}(p)$.

Sachant que le coefficient dominant de $P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, p^{2k-1})$ vaut 1 par définition, il suffit de calculer le coefficient du monôme $x_n^{2k(n-1)} \cdots x_2^{2k}$ dans $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}, p)$.

On trouve que

$$\beta_{k,n}(p) = (-p)^{\frac{1}{2}k^2n(n-1)},$$

ce qui finit la preuve. □

Par exemple, pour $k = 2$ et $n = 4$, on obtient

$$P_{[12 \ 840]}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4; q, q^{-3/2}) = q^{12} \prod_{i \neq j} ((qx_i - x_j)(q^3x_i - x_j)).$$

12.3 Puissances paires du Vandermonde et polynômes de Jack escaliers

Précédemment, nous avons constaté que (théorème 12.2.2) :

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q^{-\frac{1}{2}}) = (-q^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}k^2n(n-1)} P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, q^{-\frac{2k-1}{2}}). \tag{66}$$

Si nous faisons tendre q à 1, le q -discriminant de l'équation (66) devient :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q^{-\frac{1}{2}}) = \Delta^{2k}.$$

De même, il est connu que (VI.10 de [39]) pour la spécialisation $q = t^\alpha$, le polynôme de Macdonald se spécialise en un polynôme de Jack :

$$\lim_{q \rightarrow 1} P_\lambda(q, q^{-\alpha})(\mathbb{X}) = P_\lambda^{(\alpha)}(\mathbb{X}).$$

Lorsque $q \rightarrow 1$, le polynôme de Macdonald de l'équation (66) devient :

$$\lim_{q \rightarrow 1} P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, q^{-\frac{2k-1}{2}}) = P_{2k\rho}^{(\frac{2k-1}{2})}(\mathbb{X}).$$

Les puissances paires du Vandermonde sont donc des polynômes de Jack escaliers.

Proposition 12.3.1. *On a*

$$\Delta^{2k} = (-1)^{k^2 \frac{n(n-1)}{2}} P_{2k\rho}^{(\frac{2k-1}{2})}(\mathbb{X}).$$

12.4 Partitions admissibles et q -discriminant

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser les partitions qui apparaissent dans le développement de $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q)$.

Nous étendons le résultat de King, Toumazet et Wybourne au polynôme $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q)$ en montrant que ces partitions sont les partitions $(n, 2k)$ -admissibles que nous avons définies à la section 9.2.

Théorème 12.4.1. *Si nous exprimons $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q)$ dans les fonctions de Schur,*

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q) = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(q) S_{\lambda}(\mathbb{X}),$$

alors $c_{\lambda}(q) \neq 0$ si et seulement si λ est une partition $(n, 2k)$ -admissible.

Démonstration. Nous allons tout d'abord démontrer que si $c_{\lambda}(q) \neq 0$ alors λ est une partition $(n, 2k)$ -admissible. D'après le théorème 12.2.2 et à un coefficient multiplicateur près, le polynôme $\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q)$ est égal à la spécialisation du polynôme de Macdonald $P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, t)$. Cependant, il est bien connu que les partitions apparaissant au cours du développement de $P_{2k\rho}(\mathbb{X}; q, t)$ dans la base des fonctions de Schur forment l'intervalle $[(k(n-1))^n, 2k\rho]$ (voir l'expression déterminantale du polynôme de Macdonald présentée dans [31]). D'après le lemme 9.2.1, ceci équivaut à dire que λ est $(n, 2k)$ -admissible.

Réciproquement, pour prouver que l'admissibilité de λ implique la non nullité de $c_{\lambda}(q)$, il suffit de le prouver pour une spécialisation donnée. Nous choisissons la spécialisation $q = -1$. Dans ce cas,

$$\mathfrak{D}_k(\mathbb{X}; q) = \prod_{i \neq j} (x_i + x_j)^k = S_{\rho}(\mathbb{X})^{2k}.$$

Pour cela, nous mettons en évidence que le coefficient $c_{\lambda}^{n,m}$ se trouvant dans le développement de

$$S_{\rho}(\mathbb{X})^m = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^{n,m} S_{\lambda}(\mathbb{X})$$

est non nul si et seulement si λ est (n, m) -admissible. Pour ce faire, nous appliquons un raisonnement par récurrence sur m . Il est à noter que le cas initial ($m = 2$) a été prouvé par R.C. King, F. Toumazet et B.G. Wybourne dans le corollaire 3.2 de [29] en tant que conséquence d'un important résultat attribué à A.D. Bereinstein et A.V. Zelevinsky [3].

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 12.4.2. *Si λ est une partition (n, m) -admissible ($m > 1$), alors $((\lambda - \rho))$ est une partition $(n, m - 1)$ -admissible.*

Démonstration. D'après l'égalité (23), chaque partition (n, m) -admissible peut être obtenue en ajoutant une permutation de ρ à une partition $(n, m - 1)$ -admissible. Ce qui est équivalent à notre énoncé. \square

Lemme 12.4.3. *Soit $\mu \subset \lambda$ une partition et $\nu := ((\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_{n-1} - \mu_{n-1}, \lambda_n - \mu_n))$. Alors, le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\mu\nu}^{\lambda} = \langle S_{\lambda}, S_{\mu} S_{\nu} \rangle$ est égal à 1.*

Démonstration. Le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ est égal au nombre de tableaux de forme ν et d'évaluation $\lambda - \mu$. Cependant $\lambda - \mu$ est une permutation si ν et le théorème 11.4.3 de [32] impliquent qu'un tel tableau existe et qu'il est unique. Ceci finit la preuve. \square

Fin de la preuve du théorème 12.4.1 Soit λ une partition (n, m) -admissible. Comme $\rho \subset \lambda$, le lemme 12.4.2 confirme que la partition $\mu = ((\lambda - \rho))$ est $(n, m - 1)$ -admissible. Ainsi, par récurrence, S_{μ} apparaît avec un coefficient non nul dans S_{ρ}^{m-1} . La positivité des coefficients de Littlewood Richardson implique que chaque partition ν vérifiant $c_{\mu,\rho}^{\nu} \neq 0$

se caractérise par un coefficient non nul dans le développement de S_ρ^m . D'après le lemme 12.4.3, c'est précisément le cas pour λ . Cela montre que $c_\lambda^{n,m} \neq 0$ si et seulement si λ est (n, m) -admissible, ce qui prouve le théorème. \square

13

Conclusion

L'écriture des puissances paires du Vandermonde sur les différentes bases des fonctions symétriques reste une question ouverte.

Nous avons néanmoins obtenu dans ce mémoire un certain nombre de résultats. Notre premier travail a été d'établir une expression hyperdéterminantale des coefficients dans la base des fonctions Schur, ce qui nous a permis d'élaborer un nouvel algorithme calculant les coefficients indépendamment les uns des autres.

Les hyperdéterminants se sont avérés être des outils efficaces pour le calcul du développement de Δ^{2k} dans les fonctions de Schur.

Ce calcul fait apparaître des hypermatrices creuses. Une meilleure compréhension de ces objets doit être réalisée. Une nouvelle démarche consiste à étudier le développement des puissances du Vandermonde sur les monômes à l'aide des graphes. Pour illustrer nos propos, le lecteur trouvera dans l'annexe A, une interprétation combinatoire des coefficients rencontrés dans le développement d'un produit de la forme $\prod(x_i - x_j)$ et qui utilise des circuits dans les graphes orientés. Cette approche est similaire à celle décrite par I. Gessel dans son article [20]. Un développement futur pourrait s'intéresser aux différents liens combinatoires entre ces circuits et les hypermatrices présentées précédemment.

Le second résultat identifie les puissances paires du Vandermonde comme des polynômes de Jack rectangles sur l'alphabet $-\mathbb{X}$. Pour y parvenir, nous avons utilisé des expressions hyperdéterminantales de certains polynômes de Jack quasi-rectangles.

Enfin, nous avons introduit une q -déformation, les puissances polarisées du q -discriminant, dans le but d'établir une nouvelle formule reliant les polynômes de Jack escaliers avec Δ^{2k} . L'identité obtenue a été élaborée en faisant le rapprochement entre certaines puissances polarisées du q -discriminant et des polynômes de Macdonald escaliers. Cette q -déformation se révèle intéressante car la conjecture de P. Di Francesco devient vraie pour ce contexte.

Dans notre travail, nous avons montré que Δ^{2k} est égal à la fois à un polynôme de Jack escalier sur l'alphabet \mathbb{X} et à un polynôme de Jack rectangle sur l'alphabet $-\mathbb{X}$. La

question qui se pose naturellement est la suivante : est-ce que cette égalité est ponctuelle, ou s'inscrit-elle dans un contexte plus large ?

Annexe : Développements de produits à l'aide de graphes

L'objectif de ce chapitre est de donner une interprétation combinatoire des coefficients notés c_v de chaque monôme x^v apparaissant dans le développement d'un produit de type $\prod (p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j)$.

Dans le chapitre 9, nous avons montré l'équivalence entre les deux problèmes suivants : le premier consiste à exprimer les puissances paires du Vandermonde Δ^{2k} sur les fonctions de Schur S_λ , le deuxième traite du développement de Δ^{2k+1} sur les monômes.

Connaître une interprétation combinatoire de chacun de ces coefficients est crucial pour mieux comprendre l'écriture de Δ^{2k} sur les fonctions de Schur.

Dans la première partie nous donnons la caractéristique combinatoire des coefficients c_v . Dans la seconde partie, nous utilisons les résultats obtenus pour proposer une preuve combinatoire de

$$\Delta = \det \left((x_i^{j-1})_{i,j} \right).$$

A.1 Interprétation combinatoire du développement de $\prod (p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j)$

L'interprétation combinatoire consiste à analyser le produit $\Pi = \prod (p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j)$ comme un graphe non orienté, défini de la façon suivante :

- $S = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des sommets qui sont en bijection avec les variables,
- $E = \{(i, j, k) | i < j \text{ et } (p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j) \text{ est un facteur de } \Pi\}$ est l'ensemble des arêtes,
- $\Gamma : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathcal{P}(S) \\ (i, j, k) \rightarrow \{i, j\} \end{array}$ est la fonction d'adjacence du graphe.

Par exemple, le graphe associé à

$$\Pi = (p_{1,2}^1 x_1 + q_{1,2}^1 x_2)(p_{1,3}^1 x_1 + q_{1,3}^1 x_3)(p_{2,3}^1 x_2 + q_{2,3}^1 x_3)(p_{2,3}^2 x_2 + q_{2,3}^2 x_3)$$

est le graphe de la figure A.1.

Développer Π équivaut à choisir pour chaque élément $p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j$ de Π le terme en x_i ou le terme en x_j . Ce choix revient à orienter toutes les arêtes du graphe associé à Π . En effet, orienter l'arête (i, j, k) du sommet i vers le sommet j (resp. du sommet j vers le sommet i) conduit à sélectionner le terme x_j (resp. x_i) dans $p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j$.

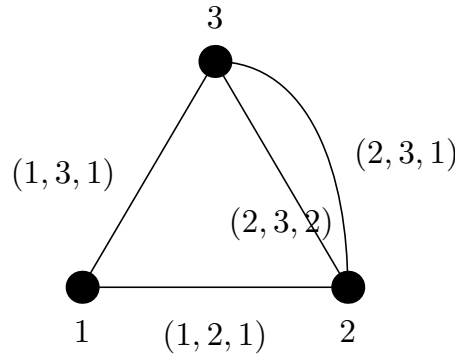


FIG. A.1 – Exemple de graphe associé à un produit

Par exemple,

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) = x_1x_1 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3$$

Dans cette étude, on note \vec{G} une orientation de G définie par :

- S les sommet de G
- $E = \{(i, j, k, l) | (i, j, k) \in E \text{ et } l \in \{0, 1\}\}$ tel que $(i, j, k, l) \in E \Rightarrow (i, j, k, 1 - l) \notin E$.
- $\Gamma : (i, j, k, l) \rightarrow \begin{cases} (i, j) & \text{si } l = 0 \\ (j, i) & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit $eval$ l'application linéaire définie sur les graphes orientés de la façon suivante :

$$eval(\vec{G}) := \prod_{(i,j,k,l) \in E} (p_{i,j}^k x_i)^{(1-l)} (q_{i,j}^k x_j)^l,$$

alors le développement décrit dans le dernier exemple est formalisé grâce à la proposition ci-après :

Proposition A.1.1.

$$\Pi = \sum_{\substack{\vec{G} \text{ graphe orienté} \\ \text{du graphe associé à } \Pi}} eval(\vec{G})$$

Démonstration. Il s'agit du développement immédiat d'un produit. □

On peut donc prolonger la fonction $eval$ sur les graphes et obtenir :

$$eval(G) = \sum_{\substack{\vec{G} \text{ graphe orienté} \\ \text{du graphe associé à } \Pi}} eval(\vec{G})$$

Pour illustrer cela,

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (p_{1,2}^1 x_1 + q_{1,2}^1 x_2) \\ (p_{1,3}^1 x_1 + q_{1,3}^1 x_3)(p_{2,3}^1 x_2 + q_{2,3}^1 x_3) \end{matrix} = p_{1,2}^1 x_1 p_{1,3}^1 x_1 p_{2,3}^1 x_2 + p_{1,2}^1 x_1 p_{1,3}^1 x_1 q_{2,3}^1 x_3 + \dots \\ \text{eval} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) &= \text{eval} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) + \text{eval} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) + \dots \end{aligned}$$

Par souci de clarté, nous confondons le graphe G et \vec{G} par leur évaluation. Ce qui donne dans la formule précédente :

$$G = \sum_{\vec{G} \text{ graphe orienté du graphe associé à } \Pi} \vec{G}$$

et dans les figures

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} + \dots$$

L'objectif de cette section est d'interpréter combinatoirement les coefficients associés aux monômes x^v du développement de Π .

Dans ce but, nous définissons l'application *monome* qui, à un graphe orienté \vec{G} , associe le monôme de son évaluation :

$$\begin{aligned} \text{monome}(\vec{G}) &:= \text{monome}(\text{eval}(\vec{G})) \\ &= \prod_{(i,j,k,l) \in E} x_i^{(1-l)} x_j^l \\ &= \prod_i x_i^{\text{arité entrante de } i}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on définit l'application *coef* qui à un graphe associe le coefficient de son évaluation :

$$\begin{aligned} \text{coef}(\vec{G}) &:= \text{coef}(\text{eval}(\vec{G})) \\ &= \prod_{(i,j,k,l) \in E} (p_{i,j}^k)^{1-l} (q_{i,j}^k)^l. \end{aligned}$$

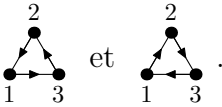
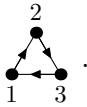
De manière évidente, nous avons

$$c_v = \sum_{\text{monome}(\vec{G})=x^v} \text{coef}(\vec{G}).$$

Connaître c_v revient à comprendre quels sont les graphes orientés \vec{G} qui ont le même monôme.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) &= + x_1 x_1 x_2 - x_1 x_1 x_3 - x_1 x_3 x_2 + x_1 x_3 x_3 \\
 &\quad - x_2 x_1 x_2 + x_2 x_1 x_3 + x_2 x_3 x_2 - x_2 x_3 x_3 \\
 \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} &= + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} \\
 &\quad + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array}
 \end{aligned}$$

Les graphes orientés \vec{G} ayant pour monôme $x_1 x_2 x_3$ sont  et .

Ainsi, $c_{111} = \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} = -1 + 1.$

Soit \vec{G} un graphe orienté, une façon simple d'engendrer de nouveaux graphes \vec{G}' ayant le même monôme consiste à inverser un circuit de \vec{G} . En effet,

Proposition A.1.2. Soit \vec{G} un graphe et C un circuit de \vec{G} . Soit \vec{G}' le graphe orienté obtenu en inversant C dans \vec{G} alors :

$$\text{monome}(\vec{G}) = \text{monome}(\vec{G}').$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \text{monome}(\vec{G}) &= \prod_{(i,j,k,l) \in E \setminus C} x_i x_j \prod_{(i,j,k,l) \in C} x_i x_j. \\
 \text{monome}(\vec{G}') &= \prod_{(i,j,k,l) \in E \setminus \text{inverse}(C)} x_i x_j \prod_{(i,j,k,1-l) \in C} x_i x_j.
 \end{aligned}$$

Or $E \setminus C = E \setminus \text{inverse}(C)$ et $\prod_{(i,j,k,l) \in C} x_i x_j = \prod_{(i,j,k,1-l) \in C} x_i x_j$. □

En fait, à partir d'un graphe orienté \vec{G} , il est possible d'engendrer tous les graphes orientés de G dont le monôme est celui de \vec{G} . Il suffit pour cela d'inverser toutes les unions de circuits à support d'arêtes disjointes de \vec{G} et uniquement ceux de \vec{G} .

Théorème A.1.3. Soit G un graphe et \vec{G} une orientation de G , alors les deux ensembles suivants sont identiques :

- 1) $\{\vec{G}' \mid \text{monome}(\vec{G}') = \text{monome}(\vec{G})\}$
- 2) $\{\vec{G}' \mid \vec{G}' \text{ est obtenu en inversant un ensemble de cycles de } \vec{G} \text{ à support d'arêtes disjoint}\}$

La figure A.2 montre l'ensemble des graphes orientés qui ont le même monôme que \vec{G} .

Avant de démontrer le théorème A.1.3, nous allons prouver la propriété intermédiaire ci-après :

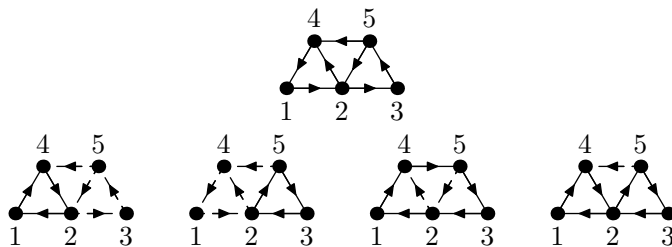


FIG. A.2 – Graphes orientés ayant le même monôme

Lemme A.1.4. Soient \vec{G}_1 et \vec{G}_2 deux graphes ayant le même monôme. Soit E l'ensemble des arêtes de \vec{G}_1 qui ont une orientation différente dans \vec{G}_2 . Soit s un sommet d'une arête de E , alors

$$\text{card}(\{e \in E | s \text{ est l'origine de } e\}) = \text{card}(\{e \in E | s \text{ est la fin de } e\}).$$

Démonstration. Supposons que le lemme soit faux, alors

$$\begin{aligned} \text{monome}(\vec{G}_1) &= \prod_i x_i^{\text{arêtes entrantes de } i} \\ &= \prod_i x_i^{|\{e \notin E | i \text{ est la fin de } e\}|} \prod_i x_i^{|\{e \in E | i \text{ est la fin de } e\}|} \\ \text{monome}(\vec{G}_2) &= \prod_i x_i^{|\{e \notin E | i \text{ est la fin de } e\}|} \prod_i x_i^{|\{e \in \text{inverse}(E) | i \text{ est la fin de } e\}|} \end{aligned}$$

Comme $\text{monome}(\vec{G}_1) = \text{monome}(\vec{G}_2)$ alors

$$|\{e \in E | i \text{ est la fin de } e\}| = |\{e \in \text{inverse}(E) | i \text{ est la fin de } e\}| \\ |\{e \in E | i \text{ est l'origine de } e\}|$$

□

Dans la figure A.2, il y a autant d'arêtes entrantes que d'arêtes sortantes parmi E autour du sommet 4.

Preuve du théorème A.1.3. Soit \vec{G}_1 et \vec{G}_2 deux graphes orientés de même monôme et E l'ensemble des arêtes de \vec{G}_1 qui ont des orientations différentes dans \vec{G}_2 . La preuve se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes d'orientation différente entre \vec{G}_1 et \vec{G}_2 .

Lorsque nous choisissons un sommet s d'une arête de E , nous pouvons parcourir le graphe \vec{G}_1 en suivant uniquement les arêtes de E . À chaque étape, si on ne rencontre aucun sommet déjà parcouru, il est toujours possible de trouver une arête de E n'ayant pas encore été utilisée pour continuer le chemin. En effet, d'après le lemme A.1.4, il existe autant d'arêtes entrantes que d'arêtes sortantes dans E pour tous les sommets du support de E .

Comme le graphe \vec{G}_1 est fini, à partir d'un certain rang, le chemin boucle sur lui-même. Nous obtenons un circuit C de \vec{G}_1 dont les arêtes sont toutes dans E . Inverser C permet d'obtenir un graphe \vec{G}'_1 de même monôme que \vec{G} mais dont l'ensemble des arêtes E' est de cardinalité strictement inférieure à E . □

Corollaire A.1.5. Soit \vec{G} un graphe orienté d'évaluation x^v . Soit \mathbb{G} l'ensemble des graphes obtenus en inversant une union de cycles à support disjoint d'arêtes de \vec{G} , alors

$$c_v = \sum_{\vec{G}' \in \mathbb{G}} \text{coef}(\vec{G}').$$

Par exemple, le coefficient de $x_1x_2^2x_3x_4^2x_5$ associé au développement de $(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_4 - x_5)(x_2 - x_5)(x_2 - x_3)(x_3 - x_5)$ est

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ \begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} = -1$$

$$\begin{aligned} & \text{coef} \left(\begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) + \text{coef} \left(\begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) + \text{coef} \left(\begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) + \text{coef} \left(\begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) \\ & + \text{coef} \left(\begin{matrix} 4 & 5 \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) = -1 \end{aligned}$$

Corollaire A.1.6. Soit \vec{G} un graphe orienté d'évaluation x^v . Soit \mathbb{C} l'union de circuits à support d'arêtes disjointes de \vec{G} , alors

$$C_v = \left(\sum_{c \in \mathbb{C}} \frac{\text{coef}(\text{inverse}(c))}{\text{coef}(c)} \right) \cdot \text{coef}(\vec{G}).$$

A.2 Preuve combinatoire de l'identité du Vandermonde

Dans cette partie, nous allons utiliser les résultats de la section précédente pour démontrer l'identité de Vandermonde que nous rappelons :

$$\Delta = \det \left((x_i^{j-1})_{i,j} \right).$$

Une démonstration similaire est présente dans l'article [20] de I. Gessel.

Ainsi, pour $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, l'identité de Vandermonde donne

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Dans le cadre du développement par graphe, Δ est représenté par le graphe complet K_n . Le développement de Δ est alors l'ensemble des orientations de K_n .

Avant d'apporter la preuve combinatoire de l'identité de Vandermonde, il est nécessaire d'étudier les propriétés d'un graphe non orienté \mathcal{G} particulier.

Soit \mathcal{G} le graphe non orienté dont les sommets sont les graphes orientés de K_n et les arêtes sont les paires de graphes orientés \vec{G}_1 et \vec{G}_2 qui vérifient les propriétés suivantes :

- \vec{G}_1 contient un circuit C de taille 3,
- l'inversion de C dans \vec{G}_1 donne le graphe orienté \vec{G}_2 .

Le graphe \mathcal{G} possède des propriétés remarquables car K_n est un graphe complet. Ces propriétés sont décrites par les propriétés A.2.1, A.2.2, A.2.3 et A.2.4.

Proposition A.2.1. *Les composantes connexes de \mathcal{G} sont les classes de graphes orientés de K_n qui ont le même monôme.*

Démonstration. Soit \vec{G}_1 et \vec{G}_2 deux graphes orientés de même monôme.

D'après le théorème A.1.3, il existe une union de circuits C à support d'arêtes disjointes telle que \vec{G}_2 est construit en inversant les arêtes de C dans \vec{G}_1 .

Lorsque deux graphes \vec{G}_1 et \vec{G}_2 sont obtenus par inversion de cycles à support d'arêtes disjointes, il est facile de démontrer par récurrence qu'il existe une suite de graphes orientés $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ telle que $\vec{G}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{G}_2 = \vec{u}_k$ et telle que \vec{u}_i est déterminé en inversant un cycle de taille 3 à partir de \vec{u}_{i-1} .

Pour cela, deux points sont à prendre en compte :

- dans tout graphe induit de K_n par les sommets d'un circuit, il existe un circuit de taille 3,
- lorsque nous inversons un circuit de taille 3 dans un circuit maximal c_{max} de C , la taille maximale des circuits de C diminue et le nombre de circuits de même taille que c_{max} diminue strictement.

Ainsi, deux graphes \vec{G}_1 et \vec{G}_2 de même monôme sont toujours connexes dans \mathcal{G} .

Réciproquement, deux graphes connexes de \mathcal{G} ont le même monôme d'après la propriété A.1.2. □

Proposition A.2.2. *Chaque composante connexe de \mathcal{G} est un graphe régulier.*

Démonstration. Soit \vec{K} un graphe orienté de K_n (un sommet de \mathcal{G}). Soit c_1, \dots, c_k l'ensemble des circuits de taille 3 de \vec{K} . Nous rappelons que, dans ce cas, l'arité du sommet \vec{K} dans \mathcal{G} est k . Alors, le graphe \vec{K}' obtenu en inversant c_1 possède la même arité k dans \mathcal{G} .

En effet, dans un graphe orienté de K_4 , il ne peut y avoir que 0, 1 ou 2 circuits de taille 3. Dans ce graphe orienté, inverser un des circuits de taille 3 n'augmente pas le nombre de circuits de taille 3.

Étant donné que les seuls circuits de taille 3 susceptibles d'apparaître par inversion de c_1 se situent dans les motifs K_4 de \vec{K} ayant pour base c_1 (voir figure A.3), nous déduisons que \vec{K}' possède la même arité que \vec{K} . □

Proposition A.2.3. *Les composantes connexes non réduites à un unique élément sont des graphes bipartis de sommets $A \sqcup B$ tels que $|A| = |B|$.*

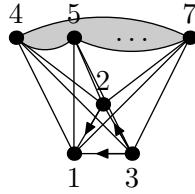


FIG. A.3 – Graphe K_4 dans lesquels se trouvent tous les cycles de taille 3 susceptibles d'apparaître ou de disparaître en inversant le circuit $(1, 2, 3)$

Démonstration. Il suffit de choisir $A = \{\vec{K} \mid \text{coef}(\vec{K}) = 1\}$ et $B = \{\vec{K} \mid \text{coef}(\vec{K}) = -1\}$. Le graphe est alors biparti car une arête de \mathcal{G} représente une inversion d'un circuit de taille 3 qui transforme le coefficient d'un graphe en son opposé.

Les tailles des alphabets A et B sont identiques car le graphe est régulier (proposition A.2.2) et n'est pas réduit à un seul élément. \square

Proposition A.2.4. *Les composantes connexes non réduites à un élément admettent un couplage parfait.*

Démonstration. On sait qu'une composante connexe est bipartie et régulière. On peut alors appliquer le lemme des mariages et démontrer que les composantes connexes admettent un couplages parfait (voir lemme A.2.5 pour plus de détails). \square

Lemme A.2.5. *Soit G un graphe biparti tel que G est régulier, alors G admet un couplage complet.*

Démonstration. Soit S un sous ensemble de A . Soit L les voisins de S dans G . Soit k l'arité de G .

Comme G est régulier, il a y a exactement $k \cdot |S|$ arêtes qui relient L et S . Le nombre d'arêtes attachées à L est plus grand que $k \cdot |S|$ car les arêtes connectant L à S sont incluses dans celles qui partent de L . Comme G est régulier, nous avons l'inégalité :

$$k \cdot |S| \geq k \cdot |L|.$$

On en déduit que $|L| \geq |S|$, ce qui, d'après le lemme des mariages, signifie qu'il existe un couplage saturant de G .

Comme $|A| = |B|$, ce couplage est parfait. \square

Nous disposons maintenant des outils nécessaires pour fournir une preuve combinatoire de l'identité de Vandermonde.

Théorème A.2.6.

$$\Delta = \det \left((x_i^{j-1})_{i,j} \right)$$

Preuve combinatoire. Soit \mathcal{G} le graphe défini précédemment, alors

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{\vec{K} \in \text{sommet}(\mathcal{G})} \text{eval}(\vec{K}) \\ &= \sum_{\mathcal{C} \text{ composante connexe de } \mathcal{G}} \left(\sum_{\vec{K} \in \text{sommet}(\mathcal{C})} \text{coef}(\vec{K}) \right) \cdot \text{monome}(\vec{K}_{\mathcal{C}}) \end{aligned}$$

Si la composante \mathcal{C} n'est pas réduite à un seul élément, alors elle admet un couplage qui regroupe les sommets de \mathcal{C} deux par deux tels que, pour passer du premier au second graphe, il faut inverser un unique cycle de taille 3. Ainsi, le coefficient associé au premier graphe est égal à l'opposé du second. Leur somme vaut 0.

On obtient alors

$$\Delta = \sum_{\vec{K} \in \text{composante connexe de } \mathcal{G} \text{ réduite à un unique élément}} \text{coef}(\vec{K}) \cdot \text{monome}(\vec{K}).$$

Les graphes \vec{K} qui constituent à eux seuls une composante connexe sont les graphes sans circuits.

Or un graphe orienté \vec{K} complet et sans circuit constitue un ordre total. L'ensemble des graphes orientés de \vec{K} sont en bijection avec les permutations σ de \mathfrak{S} . Pour s'en convaincre, il suffit de lire les sommets du plus petit au plus grand dans l'ordre total.

De plus,

$$\text{coef}(\vec{K}) = \text{coef}(\sigma) = (-1)^{\text{card}(\text{descentes})} = \text{signe}(\sigma).$$

Enfin,

$$\text{monome}(\vec{K}) = \prod_{i=1}^n x_i^{\sigma(i)-1}.$$

Nous obtenons donc que

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \text{signe}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_i^{\sigma(i)-1},$$

ce qui est le développement de $\det \left((x_i^{j-1})_{i,j} \right)$. □

Bibliographie

- [1] G. E. Andrews. *MacMahon's partition analysis. I. The lecture hall partition theorem, Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota*, volume 161 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 1998.
- [2] A. Armenante. Sui determinanti cubini. *Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1 :175–181, 1868.
- [3] A.D. Berenstein and A.V. Zelevinsky. Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition spaces. *Journal of Geometry and Physics*, 5(3) :453–472, 1992.
- [4] O. Bernardi. A characterization of the Tutte polynomial via combinatorial embedding. *Annals of Combinatorics*, 12(2) :139–153, 2008.
- [5] M. Bousquet-Mélou and S. Butler. Forest-like permutations. *Annals of Combinatorics*, 11 :335–354, 2007.
- [6] A. Boussicault. Operations on Posets and Rational Identities of Type A. *Intentional Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, 19, 2007.
- [7] A. Boussicault and V. Féray. Application of graph combinatorics to rational identities of type A. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(1), November.
- [8] A. Boussicault and J.-G. Luque. Staircase Macdonald polynomials and the q -discriminant. *DMTCS Proceedings*, pages 381 – 392, 2008.
- [9] A. Boussicault, J.-G. Luque, and C. Tollu. Hyperdeterminantal computation for the Laughlin wavefunction. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(14), April 2009.
- [10] F. Chapoton, F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. An Operational Calculus for the Mould Operad. *International Mathematics Research Notices*, 9, 2008.
- [11] M. Demazure. Une nouvelle formule des caractères. *Bull. Sci. Math.*, 98 :163–172, 1974.
- [12] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173. Springer-Verlag Heidelberg, 2005. Graduate Texts in Mathematics.
- [13] G. Dunne. Slater Decomposition of Laughlin States. *International Journal of Modern Physics B*, 7(28) :4783–4813, mai 1993.
- [14] F.J. Dyson. Statistical theory of energy levels of complex system I. *Journal of Mathematical Physics*, 3 :140–156, 1962.
- [15] V. Féray. Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials. *J. Alg. Comb*, 2008. to appear.

-
- [16] V. Féray and P. Śniady. Asymptotics of characters of symmetric groups related to Stanley-Féray character formula. Preprint arXiv :math/0701051, 2007.
- [17] P. Di Francesco, M. Gaudin, C. Itzykson, and F. Lesage. Laughlin's wave functions, Coulomb gases and expansions of the discriminant. *International Journal of Modern Physics A*, 9(24) :4257–4351, 1994.
- [18] A.M. Fu and A. Lascoux. q -identities from Lagrange and Newton interpolation. *Advances in applied mathematics*, 31(3) :527–531, 2003.
- [19] L. Gegenbauer. Über Determinanten höheren ranges. *Denkschriften der Kais*, 43 :17–32, 1882.
- [20] I. Gessel. Tournaments and Vandermonde's Determinant. *Journal of Graph Theory*, 3 :305–307, 1973.
- [21] P.J. Giblin. *Graphs, Surface and Homology - An Introduction to Algebraic Topology*. London and New York Chapman and Hall, 1981.
- [22] I.J. Good. Short proof of a conjecture by Dyson. *Journal of Mathematical Physics*, 11 :1884, 1970.
- [23] C. Greene. A rational function identity related to the Murnaghan-Nakayama formula for the characters of s_n . *J. Alg. Comb.*, 1(3) :235–255, 1992.
- [24] J. Gunson. Proof of a Conjecture of Dyson in the Statistical Theory of Energy Levels. *Journal of Mathematical Physics*, 3 :752–753, 1962.
- [25] H. Belbachir, A. Boussicault, and J.-G. Luque. Hankel hyperdeterminants, rectangular Jack polynomials and even powers of the vandermonde. *Journal of Algebra*, 320(11) :3911 – 3925, 2008.
- [26] H. Jack. A class of symmetric polynomial with a parameter. In *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, volume 69, pages 1–18, 1970.
- [27] H. Jack. A surface integral and symmetric functions. In *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, volume 69, pages 347–363, 1972.
- [28] J. Kaneko. Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials. *SIAM journal on mathematical analysis*, 24(4) :1086–1110, mai 1993.
- [29] R.C. King, F. Toumazet, and B.G. Wybourne. The square of the Vandermonde determinant and its q -generalization. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37(3) :735–767, janvier 2004.
- [30] A. Korányi. Hua-type integrals, hypergeometric functions and symmetric polynomials. In *Proceeding of a Conference in Memory of L K Hua*, Beijin, 1998.
- [31] L. Lapointe, A. Lascoux, and J. Morse. Determinantal expressions for Macdonald polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 18, 1998.
- [32] A. Lascoux. *Symmetric function and combinatorial operators on polynomials*, volume 99 of *Conference Board of the Mathematical Sciences*. American Mathematical Society, 2001.
- [33] A. Lascoux. Adding ± 1 to the argument of a Hall-littlewood polynomial. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 54 :17, 2005.

-
- [34] A. Lascoux. Gaudin functions, and Euler-Poincaré characteristics. Preprint arXiv :0709.1635, 2007.
- [35] A. Lascoux. Schubert and Macdonald polynomials, a parallel. preprint available online : www-igm.univ-mlv.fr/~al/ARTICLES/MsriExp.pdf, 2008.
- [36] R. B. Laughlin. Anomalous Quantum Hall Effect : An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. *Physical Review Letters*, 50 :1295–1398, mai 1983.
- [37] J.-G. Luque and J.-Y. Thibon. Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(19) :5267–5292, 2003.
- [38] J.-G. Luque and J.-Y. Thibon. Hyperdeterminantal calculations of Selberg’s and Aomoto’s integrals. *Molecular Physics*, 102(11-12) :1351–1359, juin 2004.
- [39] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press Inc., New York, second edition, 1995.
- [40] S. Matsumoto. Two parameters circular ensembles and Jacobi-Trudi type formulas for Jack functions of rectangular shape. Preprint arXiv :math.PR/0608751 v1, 2007.
- [41] T. Scharf, J.-Y. Thibon, and B.G. Wybourne. Powers of the Vandermonde determinant and the quantum Hall effect. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 27(12) :4211–4219, juin 1994.
- [42] A. Selberg. Bemerkninger om et multiplert integral. *Norsk Mathematisk Tidsskrift*, 26 :71–78, 1944.
- [43] W. T. Tutte. A census of planar map. *Canad. J. Math.*, 14 :21–38, 1963.
- [44] O. Warnaar. q Selberg integrals and Macdonald polynomials. *Ramanujan Journal*, 10(2) :237–268, juin 2005.
- [45] K. G. Wilson. Proof of a Conjecture by Dyson. *Journal of Mathematical Physics*, 3 :1040–1043, 1962.
- [46] W. Zajaczkowski. Teoryja Wyznacznikow o p wymiarach a rzędu n^{go} . *Pamiętnik Akademii Umiejętności*, 6 :1–33, mai 1993.

Index

- $A_{n,m}$, (ensemble des partitions (n, m) -admissibles) 93
 $Extr(G)$, (sommets extrémaux de G) 23
 $G - E$, (G privé des arêtes de E) 29
 $G - V'$, (suppression de V' à G) 30
 G/e , (contraction de G par e) 30
 G_w , (linéarisation partielle de G par w) 34
 $HE(C)$, (l'ensemble $C \cap E$) 23
 $In(G)$, (sommets intérieurs de G) 23
 $N(G)$, ($\Psi_G \cdot \prod_{e \in E_G} (x_{\alpha(e)} - x_{\omega(e)})$) 40
 $P_\lambda(\mathbb{X}; q, t)$, (polynôme de Macdonald) 120
 $P_\lambda^{(\alpha)}$, (polynôme de Jack) 109
 $Q_\lambda^{(\alpha)}$, (dual de $P_\lambda^{(\alpha)}$ pour le produit scalaire $\mathfrak{h}A, B_\alpha$) 109
 $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, (résultant : $\prod_{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}} (x - y)$) 63
 $R_\lambda^{(\alpha), n}(\mathbb{Y})$, (normalisation de $Q_\lambda^{(\alpha)}(\mathbb{Y})$) 110
 Δ , (polynôme de Vandermonde) 89
 Ω , (opérateur Oméga de MacMahon) 95
 $\Psi_\lambda(\mathbb{X})$, (somme des puissances) 91
 $\Psi_{\text{Slater}}^\lambda$, (fonctions d'onde de Slater) 89
 Ψ_G , ($\sum_{w \in \mathcal{L}(G)} \frac{1}{(x_{w_1} - x_{w_2}) \dots (x_{w_{n-1}} - x_{w_n})}$) 39
 $\alpha(e)$, (origine de l'arête e) 23
 $\mathfrak{h}A, B$, (produit scalaire) 91
 $f_{\mathbb{Y}}$, (opérateur de substitution) 110
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$, (produit scalaire à un paramètre) 109
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$, (q, t -déformation du produit scalaire) 120
 $\langle f, g \rangle'_{n,\alpha}$, ($\frac{1}{n!} \text{C.T.} \{ f(\mathbb{X}) g(\mathbb{X}^\vee) \prod_{i \neq j} (1 - x_i x_j^{-1})^\frac{1}{\alpha} \}$) 110
 \leq , (relation d'ordre) 21
 $\mathbb{Y}_v(A, B)$, (polynôme de Schubert sur l'alphabet A et B) 59
 \mathbb{G}_σ , (graphe des permutations qui est égal à $\mathcal{H}(\mathbb{G}_\sigma)$) 25
 $\mathbb{G}_\sigma^{\text{poset}}$, (graphe apparaissant dans la construction des graphes de permutation) 25
 $\mathcal{A}(G)$, (arborification de G selon A) 82
 $\mathcal{F}_C(G)$, (poinçonnage de Féray) 36
 $\mathcal{L}(G)$, (extensions linéaires de G) 24
 $\mathcal{L}(P)$, (extensions linéaires de P) 22
 $\mathfrak{D}(1; q)$, ($\prod_{i \neq j} (qx_i - x_j)$) 119
 $\mathfrak{D}(k; q)$, ($\prod_{l=1}^k \mathfrak{D}(k; q^{2l-1})$) 119
 $\omega(e)$, (fin de l'arête e) 23
 \bar{e} , (l'arête e retournée) 23
 ∂_i , (différence divisée) 59, (différence divisée) 121
 \preceq , (relation de couverture) 22
 ρ , (la partition $[n-1, n-2, \dots, 1, 0]$) 92
 \star , (sommets associés à la demi-arête d'une carte enracinée) 26
 Δ , ($\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$) 89
 $\varphi(G)$, ($\sum_{w \in \mathcal{L}(G)} w$) 24
 $b_\lambda^{(\alpha)}$, ($\frac{P_\lambda^{(\alpha)}}{Q_\lambda^{(\alpha)}}$) 110
 c_v , ($\sum_v c_v x^v := \prod (p_{i,j}^k x_i + q_{i,j}^k x_j)$) 129
 $g_\lambda^{n,k}$, (coefficients du développement de δ_n^{2k} dans la base des fonctions de Schur) 97
 h_0 , (demi-arête extérieure d'une carte enracinée) 26
 $inverse_n(v)$, ((v_n, \dots, v_1)) 112
 $l(\lambda)$, (longueur d'une partition) 109
 m_λ , (fonctions monomiales) 92
 $\text{puits}(G)$, (les sommets puits de G) 56
 q -discriminant, 119
 q, t -déformation du produit scalaire, 120
 r_i , (multiplicité de i dans λ) 92, (multiplicité de i dans λ) 109
 $\text{sources}(G)$, (les sommets sources de G) 56
 z_λ , ($\prod_{1 \leq i} i^{m_i} \cdot m_i!$) 92
 $z_\lambda(q, t)$, ($z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}$) 120
 \mathbb{X} , (l'alphabet $\{x_1, \dots, x_n\}$) 110
 \mathbb{X}^\vee , (l'alphabet $\{\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\}$) 110
 $\mathcal{H}(P)$, (diagramme de Hasse) 22

- Emond(G), (maximal sous-graphe sans sommets libres) 31
 poset(G), (poset d'un graphe) 24
 $\mathfrak{A}_n(q, t; z_1, \dots, z_{n-1})$, (série génératrice des partitions (n, k) -admissibles) 95
 \mathfrak{T} , (monoïde libre et commutatif engendré par les symboles $T = \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$) 94
 émondage, 31
 émondage élémentaire, 31
 hyperdéterminant, 98

 agrégat de diamants, 73
 antisymétrie, 21
 arêtes, 23
 fin, 23
 origine, 23
 arborification, 82
 arbre, 24, 51
 bon, 54

 biparti, 35
 bon, 54

 carte, 26
 arbre, 51
 carte enracinée, 26
 cycle admissible, 50
 demi-arête extérieure, 26
 demi-arêtes, 26
 tour de l'arbre, 53
 carte enracinée, 26
 chaîne, 23
 chemin, 23
 circuit, 23
 comparables, 21
 compatible, 22
 contraction, 30
 couvre, 22
 cycle, 23
 admissible
 type 1, 50
 type 2, 50
 cycle admissible, 50
 cycle admissible de type 1, 50

cycle admissible de type 2, 50
 décontraction, 35
 déterminant de Vandermonde, 89
 demi-arête extérieure, 26
 demi-arêtes, 26
 diagramme de Hasse, 22, 24
 diamant, 71
 différence divisée, 59, 121

 ensemble partiellement ordonné, 21
 extension linéaire, 22, 24
 mot, 22

fin, 23
 fonctions d'ondes
 fonctions d'ondes de Slater, 89
 fonctions d'ondes de Slater, 89
 fonctions de Schur, 92
 fonctions monomiales, 92
 forêt, 24
 fortement planaire, 44
 fraction réduite
 numérateur, 40
 fraction rationnelle, 39

 graphe
 émondage, 31
 émondage élémentaire, 31
 agrégat de diamants, 73
 arborification, 82
 arbre, 24
 biparti, 35
 chaîne, 23
 chemin, 23
 circuit, 23
 contraction, 30
 cycle, 23
 décontraction, 35
 diagramme de Hasse, 24
 diamant, 71
 extension linéaire, 24
 forêt, 24
 fortement planaire, 44
 graphe λ -complet, 59
 graphe induit, 29

- graphes à arêtes multiples, 31
- linéarisation partielle, 34
- nombre cyclomatique, 24
- poinçonnage de Féray, 36
- puits, 23
- sommet extrémal, 23
- sommet intérieur, 23
- sommet libre, 31
- sommets, 23
- source, 23
- suppression, 29, 30
 - arête, 29
 - sommet, 30
- graphe λ -complet, 59
- graphe de permutation σ , 25
- graphe induit, 29
- graphe orienté, 23
- graphes à arêtes multiples, 31
- hyperdéterminant
 - hyperdéterminant de Hankel, 98
 - hyperdéterminant de Hankel décalé, 98
- hyperdéterminant de Hankel, 98
- hyperdéterminant de Hankel décalé, 98
- libre, 31
- linéarisation partielle, 34
- mauvaise orientation, 68
- mot, 22
- nombre cyclomatique, 24
- numérateur, 40
- opérateur Oméga de MacMahon, 95
- ordre de dominance, 93
- ordre total, 22
 - mot, 22
- orientation, 23
- origine, 23
- partition
 - partition (n, m) -admissible, 93
 - partition (n, m) -admissible, 93
 - partition admissible, 93
- partitions
 - partition admissible, 93
- permutation
 - graphe de permutation σ , 25
- poinçonnage de Féray, 36
- polynômes
 - déterminant de Vandermonde, 89
 - fonctions monomiales, 92
 - polynômes de Jack, 109
 - polynômes de Macdonald, 120
 - polynômes de Schubert, 59
 - sommes des puissances, 91
- polynômes de Jack, 109
- polynômes de Macdonald, 120
- polynômes de Schubert, 59
- poset, (ensemble partiellement ordonné) 21
 - antisymétrie, 21
 - comparables, 21
 - compatible, 22
 - extension linéaire, 22
 - ordre total, 22
 - réflexivité, 21
 - relation d'ordre, 21
 - relation de couverture, 22
 - transitivité, 21
- poset planaire, 71
- produit scalaire, 91
 - q, t -déformation du produit scalaire, 120
- puissances polarisées du q -discriminant, 119
- puits, 23
- q -discriminant, 119
- réflexivité, 21
- résultant, 63, 121
- relation d'ordre, 21
- relation de couverture, 22
- sommes des puissances, 91
- sommet
 - libre, 31
- sommet extrémal, 23
- sommet intérieur, 23
- sommets, 23
- source, 23
- substitution, 110

support, 21

suppression, 29, 30

tenseur de Hankel décalé, 98

tour de l'arbre, 53

transitivité, 21