

## Devoir Maison + Correction - Probabilité

### Application du théorème central limite

Le devoir est à rendre avant le 7 décembre 2011 à Mme Dos Santos secrétaire de la licence 3 de la MIAGE. Les devoirs qui seront rendus après cette date ne seront pas acceptés et auront automatiquement la note de 0/20.

Une entreprise organise un salon chaque année. Les personnes qui exposent leurs produits au salon doivent s'inscrire à l'avance. Durant le salon, l'entreprise met à la disposition des participants un restaurant avec un menu unique. Les participants sont libres d'aller au restaurant durant le salon.

Cette année, il y a 300 personnes inscrites au salon. Grâce à l'expérience des années précédentes, on sait qu'il y a 90% de chance qu'une personne inscrite vienne au salon. On sait aussi qu'il y a 40% de chance qu'une personne présente au salon choisisse d'aller au restaurant.

Les menus ne peuvent pas être faits sur place. Il est donc nécessaire de tous les préparer à l'avance.

L'entreprise souhaite aussi satisfaire tous les participants qui souhaitent aller au restaurant, sans avoir à préparer 300 menus.

1. Calculer quel est le nombre de repas qu'il faut préparer à l'avance pour qu'il y ait  $p = 80\%$  de chance que tous les participants souhaitant manger au restaurant aient un repas.

Pour un participant, le prix du repas est de 20 euros. L'entreprise souhaite rentrer dans ses frais sans faire pour autant de bénéfices.

2. Quel doit être le coût de revient d'un seul repas pour qu'il y ait 99% de chances que la recette du restaurant paye tous les frais occasionnés par le restaurant ?

Après le salon, les membres de l'équipe veulent profiter des restes pour festoyer un petit peu.

3. Combien de repas  $e$  peuvent-ils espérer avoir ?
4. Quelle est la probabilité qu'ils aient exactement  $e$  repas ?
5. Quelle est la probabilité qu'ils aient plus de  $e$  repas ?

L'équipe d'organisation est constituée de  $M = 20$  personnes qui souhaitent pouvoir manger à leurs faims le soir venu. Ils vont donc juste essayer de faire en sorte que l'espérance  $e$  soit égale à  $M$ . Pour cela, ils vont donc essayer de convaincre le directeur de l'entreprise de modifier la variable  $p$  (voir question 1) en prétextant que la marque de la société se doit d'assurer la satisfaction de ses clients.

6. Quelle valeur de  $p$  doivent-ils choisir ?

## Correction du devoir

1. Soit  $N = 300$  le nombre de personnes inscrites au salon. La présence de ces personnes au restaurant durant le salon correspond à  $N$  expériences identiques, supposées indépendantes les unes des autres et qui consistent à "manger au restaurant".

L'univers de l'expérience "manger au restaurant" est donc :

$$\Omega = \{0, 1\}$$

où 0 représente le cas où la personne ne mange pas au restaurant et 1 le cas où elle mange au restaurant.

Les probabilités des événements élémentaires sont :

$$P(1) = 0,9 \times 0,4 = 0,36 \quad \text{et} \quad P(0) = 1 - P(1) = 0,64.$$

L'espérance  $E$  associée à cette expérience est :

$$E = \sum_{k=0}^1 k.P(k) = 0 \times 0,64 + 1 \times 0,36 = 0,36.$$

La variance  $V$  associée à cette expérience est :

$$V = \sum_{k=0}^1 (k - E)^2.P(k) = (0 - 0,36)^2 \times 0,64 + (1 - 0,36)^2 \times 0,36 = 0,2304.$$

L'écart type  $\sigma$  est donc égal à :

$$\sigma = \sqrt{V} = 0,48.$$

Nous allons maintenant étudier  $N$  expériences "aller manger au restaurant". Ces expériences vont représenter les choix des participants d'aller manger au restaurant durant le salon. Nous allons représenter ces expériences par  $N$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_N$  indépendantes. Ces variables prennent leurs valeurs dans  $\Omega$  et ont les mêmes probabilités que celle de l'étude précédente.

Ainsi, le nombre de personnes qui vont au restaurant est égal à

$$\sum_{i=1}^N X_i.$$

Si on note par  $R$  le nombre de repas qui doit être commandé par l'entreprise, la probabilité que toutes les personnes aient un repas est :

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq R\right).$$

On cherche donc  $R$  pour que

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq R\right) = p = 80\%.$$

D'après le Théorème central limite, on sait que :

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N.E}{\sqrt{N}\sigma} \leq a\right) \approx \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

On en déduit donc que :

$$p = P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq R\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N.E}{\sqrt{N}\sigma} \leq \frac{R - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{R - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right).$$

En utilisant la table de la gaussienne, si  $\frac{R - N.E}{\sqrt{N}\sigma} = 0,85$  alors  $\Phi\left(\frac{R - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right) \approx 0,8023 \approx p$ .

On en déduit donc que le nombre de repas à préparer est égal à :

$$R \approx 0,85\sqrt{N}\sigma + N.E \approx 115,06.$$

En arrondissant à l'entier supérieur, on obtient qu'il faut commander 116 repas.

2. Soit  $c$  le coût de revient d'un repas. Les frais du restaurant sont donc

$$c.R.$$

Les recettes du restaurant sont égales à

$$20. \sum_{i=1}^N X_i.$$

Ainsi, la probabilité que les recettes du restaurant couvrent les frais est

$$P\left(c.R \leq 20. \sum_{i=1}^N X_i\right).$$

Nous devons donc chercher la valeur de  $c$  pour que

$$P\left(c.R \leq 20. \sum_{i=1}^N X_i\right) = 99\%.$$

Or,

$$\begin{aligned} P\left(c.R \leq 20. \sum_{i=1}^N X_i\right) &= P\left(\frac{\frac{c.R}{20} - N.E}{\sqrt{N}\sigma} \leq \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\frac{c.R}{20} - N.E}{\sqrt{N}\sigma} > \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{\frac{c.R}{20} - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Phi\left(\frac{\frac{c.R}{20} - N.E}{\sqrt{N}\sigma}\right) \approx 0,01,$$

ce qui donne (après lecture de la table de la gaussienne)

$$\frac{\frac{c.R}{20} - N.E}{\sqrt{N}\sigma} \approx -3,1$$

et donc

$$\begin{aligned} c &\approx \frac{20.(-3.1.\sqrt{N}.\sigma + N.E)}{R} \\ &\approx 14,18 \text{ euros.} \end{aligned}$$

3. L'équipe peut espérer avoir :

$$e = E\left(R - \sum_{i=1}^N X_i\right) = E(R) - E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = R - N.E \approx 116 - 108 = 8 \text{ repas.}$$

4. La probabilité que l'équipe obtienne  $e$  repas est :

$$P\left(R - \sum_{i=1}^N X_i = e\right).$$

Cependant, le théorème central limite ne permet pas de calculer cette probabilité, car ce calcul correspond à une densité de probabilité dans le théorème central limite. Nous allons donc contourner le problème et calculer la probabilité que le nombre de repas soit compris entre  $e - \frac{1}{2}$  et  $e + \frac{1}{2}$ . Cette probabilité est représentée par le formule suivante :

$$P\left(e - \frac{1}{2} \leq R - \sum_{i=1}^N X_i \leq e + \frac{1}{2}\right).$$

Si ce calcul ne nous donne pas la probabilité exact d'obtenir  $e$  repas, il nous donne cependant un ordre de grandeur du résultat à attendre. Ainsi,

$$\begin{aligned} P\left(e - \frac{1}{2} \leq R - \sum_{i=1}^N X_i \leq e + \frac{1}{2}\right) &= P\left(R - N.E - \frac{1}{2} \leq R - \sum_{i=1}^N X_i \leq R - N.E + \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(N.E - \frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^N X_i \leq N.E + \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{2\sqrt{N}\sigma} \leq \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N.E}{\sqrt{N}\sigma} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}\sigma}\right) \\ &\approx 1 - 2\Phi\left(-\frac{1}{2\sqrt{N}\sigma}\right) \\ &\approx 1 - 2\Phi(-0,060) \\ &\approx 4,8\%. \end{aligned}$$

Nous rapellons tout de même que, comme les variables  $X_i$  suivent une loi de Bernoulli,  $\sum_{i=1}^N X_i$  suit une loi binômiale, il est donc possible de donner une formule exacte de la probabilité  $P\left(R - \sum_{i=1}^N X_i = e\right)$  :

$$P\left(R - \sum_{i=1}^N X_i = e\right) = C_N^{R-e} . p(1)^{R-e} . p(0)^{n-(R-e)} = C_{300}^{108} . (36/100)^{108} . (64/100)^{192}.$$

Cependant, les calculatrices et les systèmes de calcul normaux ne sont pas capables d'évaluer cette formule. Pour cela, il faut utiliser des logiciels spécifiques, capables de calculer avec un nombre arbitraire de chiffre. Avec le logiciel `sage`, on obtient le résultat suivant :

```
92426781130471641961922234672265913121416561837727539770955665497641460248
11480542092273359287787548541027379266988939486420626229633704307382576438
87331777497659170320226842274799711778942134671407242979267543401065457817
64190691568355577189487386269862198840198917075412675471107918967693770974
92236893031286474429427984625977285732250041380814263186174370975294636827
2172287678298629329340802090458642585869090816 / 1927935892082307294192600
02777000714914480396360791837746423998172704308228820882998054527815633206
31233074978630500099662885015879944852652050430041611894113780914611438408
94540961188078005593436168489032706096315750881501736907412309780993001942
54046536583190022248169765502971703022794372890140109054413015831279949251
51574317375666490004946861080826067473864392948544539728786273435900966433
10971558094024658203125
```

ce qui donne :

$$P\left(R - \sum_{i=1}^N X_i = e\right) = 4.79407\dots\%$$

Nous voyons que le calcul précédent, qui utilise le théorème centrale limite, donne une bonne approximation de notre résultat.

5. La probabilité que l'équipe obtienne plus de  $e$  repas est égale à :

$$P\left(R - \sum_{i=1}^N X_i \geq e\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N.E}{\sqrt{N}.\sigma} \leq 0\right) \approx \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Il y a donc 50% de chance que l'équipe obtienne plus de  $e$  repas.

6. Soit  $M$  le nombre de personne dans l'équipe d'organisation du salon. Si  $e = M$  alors  $R = M + N.E$ . On en déduit donc que la probabilité  $p$  à choisir doit être égale à

$$p \approx \Phi\left(\frac{R - N.E}{\sqrt{N}.\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{N}.\sigma}\right).$$

Ce qui donne après caclul,

$$p \approx \Phi(2,41) \approx 99,2\%.$$