

# Énumération des polyominos dirigés $k$ -convexes

Adrien Boussicault

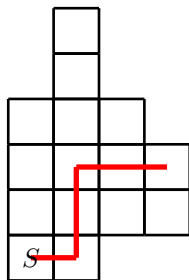
Travail réalisé avec Simone Rinaldi et Samanta Socci

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique  
Université Bordeaux, France

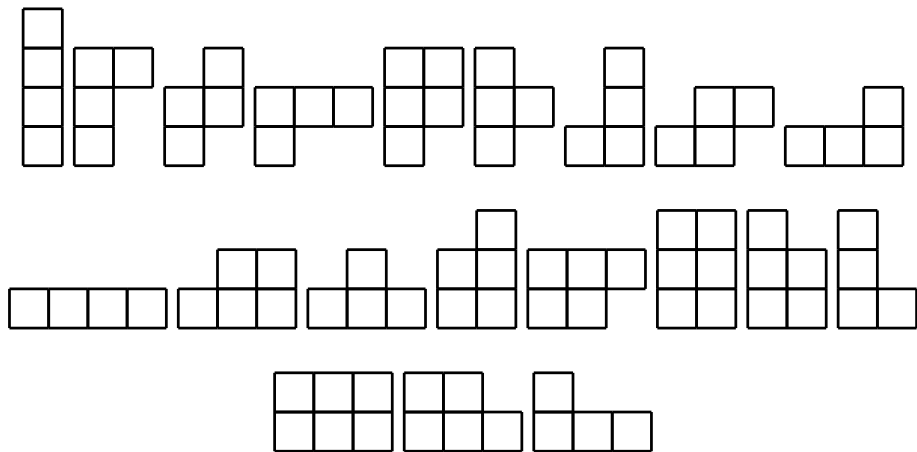
UQÀM - 08/05/2015

# Les polyominos convexes dirigés

- Toutes les cellules sont connectées par une arête ;
- la figure est verticalement et horizontalement convexe ;
- toutes les cellules peuvent être atteintes à partir d'une cellule (la racine, notée  $S$ ) par un chemin avec des pas Nord et des pas Est.

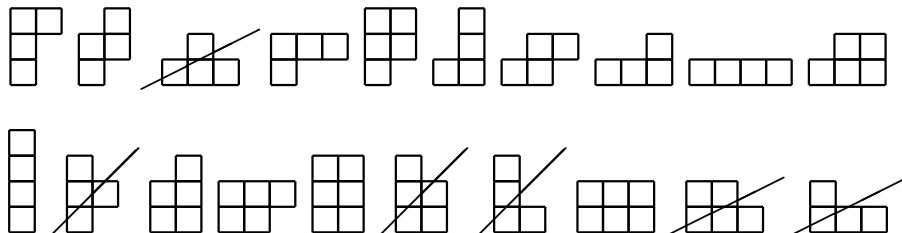


# Tous les polyominos dirigés convexes de demi-périmètre 5



# Les polyominos parallélogrammes

Un polyomino parallélogramme de demi-périmètre  $n$  est une paire de chemins de taille  $n$  constitués de pas Nord et Est, commençant et terminant au même endroit et ne se rejoignant jamais sauf aux extrémités.



Les polyominos parallélogrammes sont en bijection avec les arbres binaires.  
[Delest and Viennot, 1984]

# Outline

## 1 Enumération des Polyominos dirigés convexes

- Bijection principale
- Bijection avec les chemins de Dyck bilatères
- Méthode générale pour calculer les séries génératrices
- Exemple de calcul pour le demi-périmètre

## 2 Études de certaines statistiques et certaines familles

- Taille de la dernière ligne/colonne
- Largeur et hauteur (Lin, Chang, [1988]) (Bousquet-Mélou ♥ [1992])
- Nombre de coins
- Polyominos dirigés convexes symétriques (Emeric Deutsch [2003])
- Polyominos parallélogrammes (Viennot, Delest [1984])

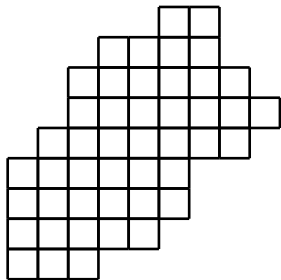
## 3 Énumération des polyominos dirigés $k$ -convexes

- Définition
- la  $k$ -convexité d'un polyomino parallélogramme
- $k$ -polyominos parallélogrammes (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci [2013])
- Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

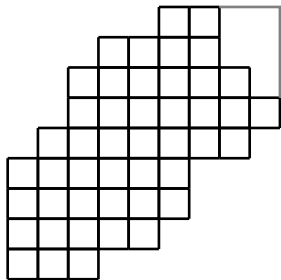
# Outline

- 1 Énumération des Polyominos dirigés convexes
  - Bijection principale
  - Bijection avec les chemins de Dyck bilatères
  - Méthode générale pour calculer les séries génératrices
  - Exemple de calcul pour le demi-périmètre
- 2 Études de certaines statistiques et certaines familles
- 3 Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

# Bijection principale

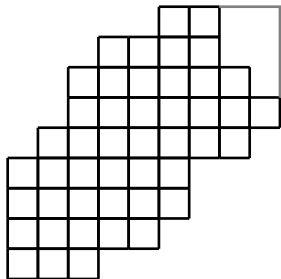


# Bijection principale

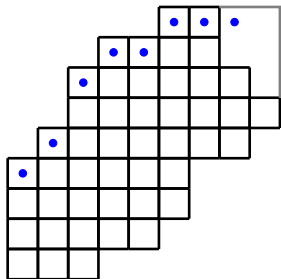




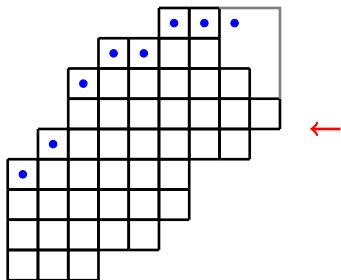
# Bijection principale



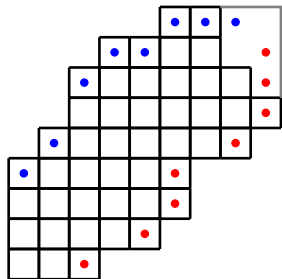
# Bijection principale



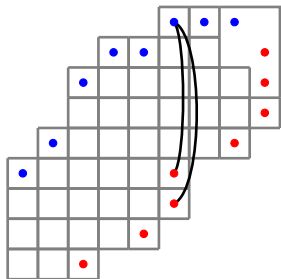
# Bijection principale



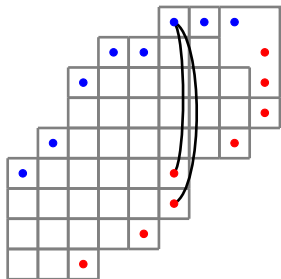
# Bijection principale



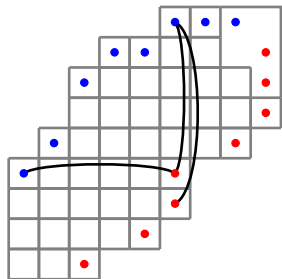
# Bijection principale



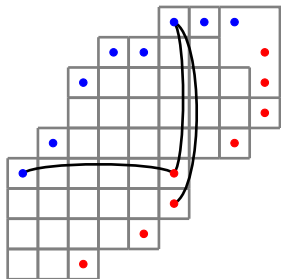
# Bijection principale



# Bijection principale

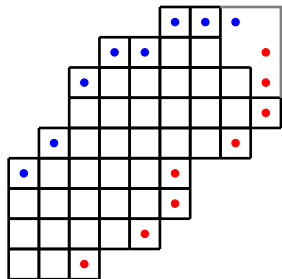


# Bijection principale



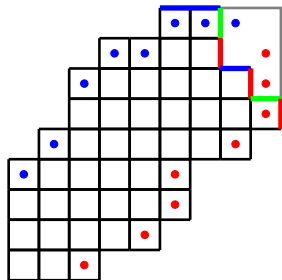


# Bijection principale



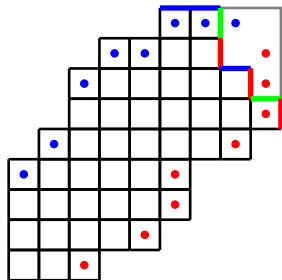
$F_e$  : La forêt des pas Est  
 $F_s$  : La forêt des pas Sud

# Bijection principale



$F_e$  : La forêt des pas Est  
 $F_s$  : La forêt des pas Sud

# Bijection principale



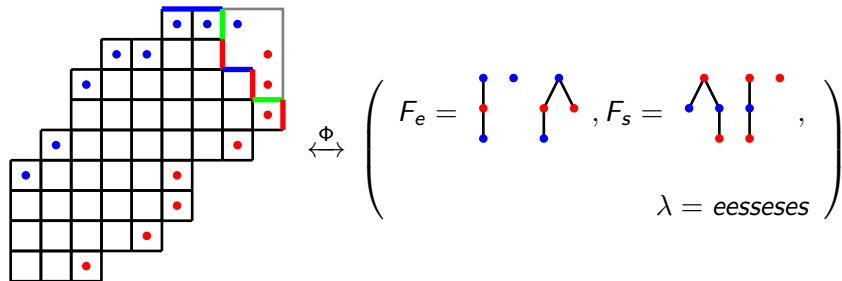
$$\lambda = \text{eesseses}$$

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

# Bijection principale

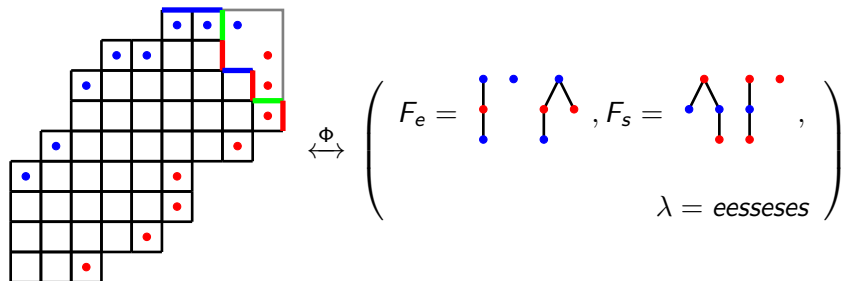


$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

# Bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par e et fini par s

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale

$$\begin{array}{c} \leftarrow \Phi \rightarrow \\ \left( \begin{array}{l} F_e = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array}, F_s = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \right) \\ \lambda = eesseses \end{array}$$

Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale

$$\leftrightarrow_{\Phi} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ F_e = & & , F_s = \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \lambda = \end{array} \right)$$

Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

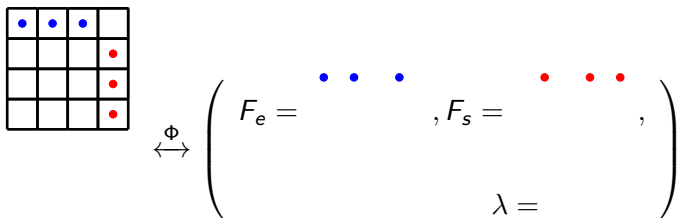
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

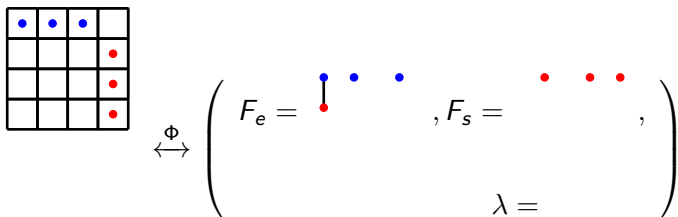
$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$



# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

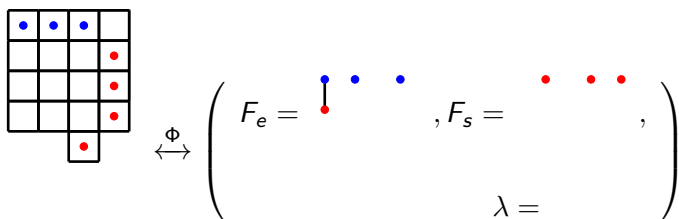
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

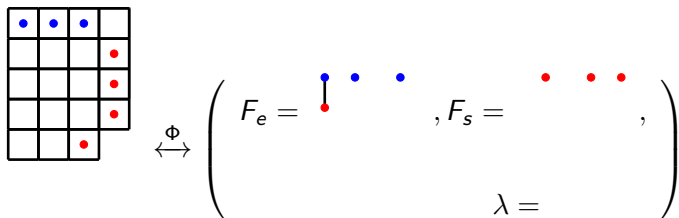
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

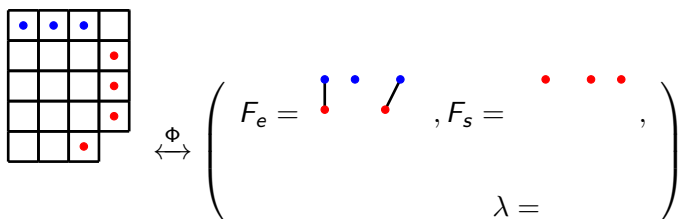
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

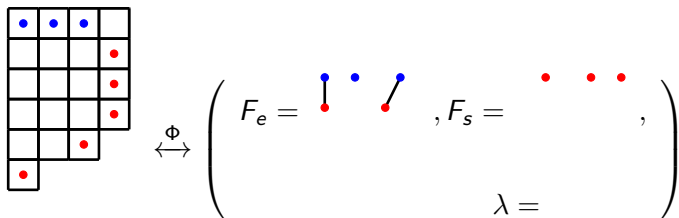
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

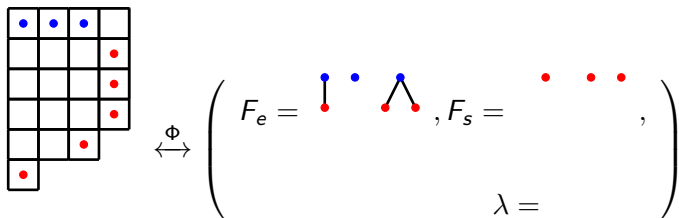
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

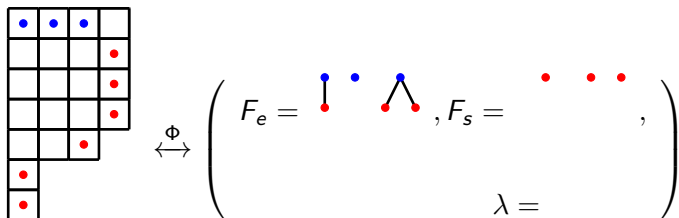
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

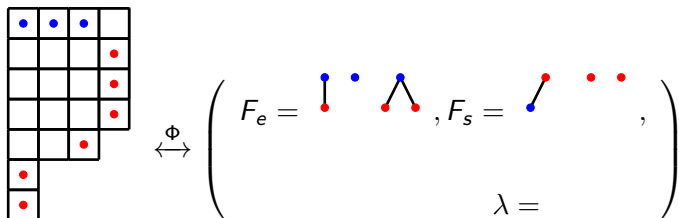
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

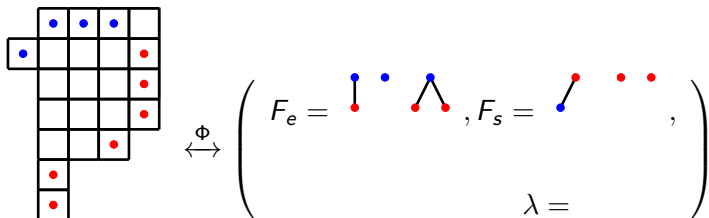
$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$



# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

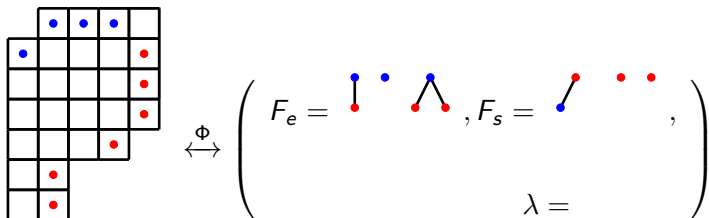
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

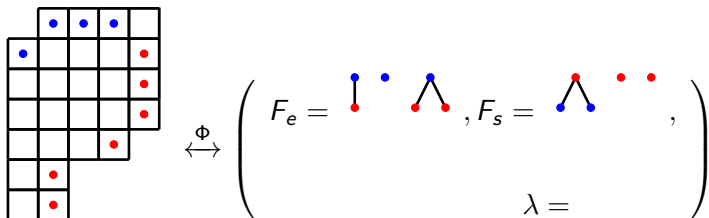
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

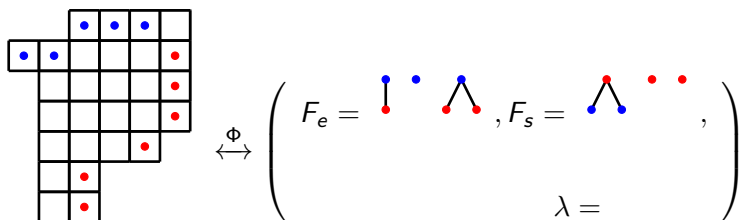
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

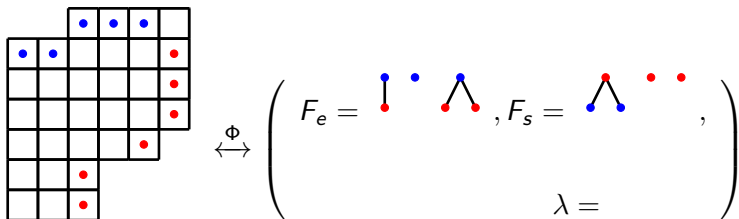
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

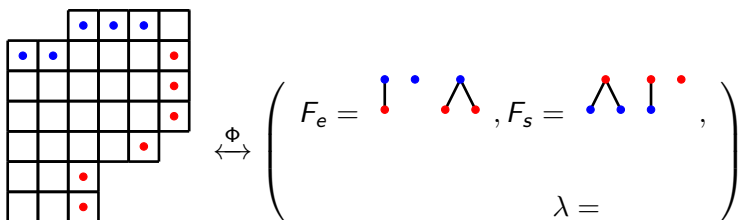
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

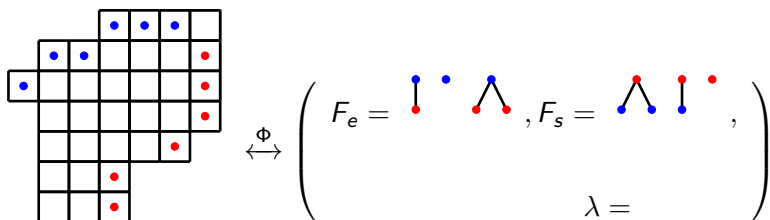
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

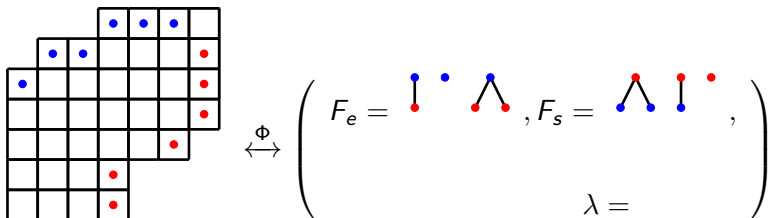
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

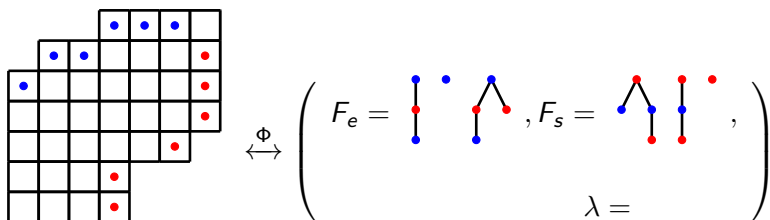
$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$



# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

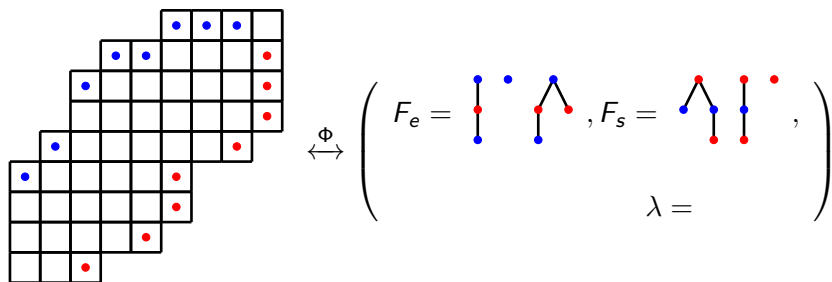
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

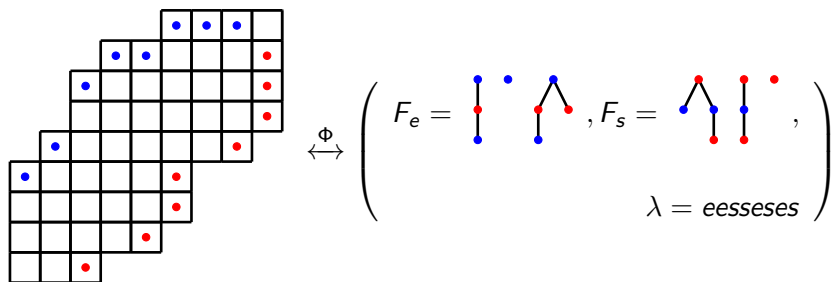
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

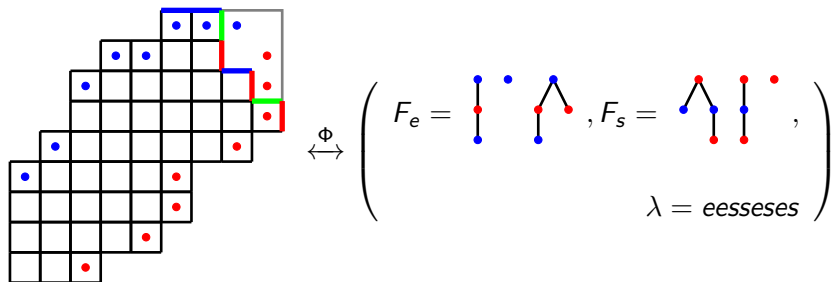
$F_s$  : La forêt des pas Sud

$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

# Inverse de la bijection principale



Contraintes :

$\lambda$  : La coupe

$F_e$  : La forêt des pas Est

$F_s$  : La forêt des pas Sud

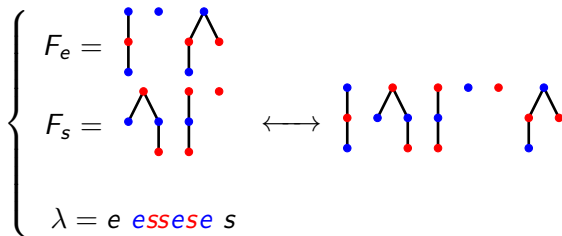
$\lambda$  commence par  $e$  et fini par  $s$

$\#\{e \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_e\} + 1$

$\#\{s \in \lambda\} = \#\{\text{racine dans } F_s\} + 1$

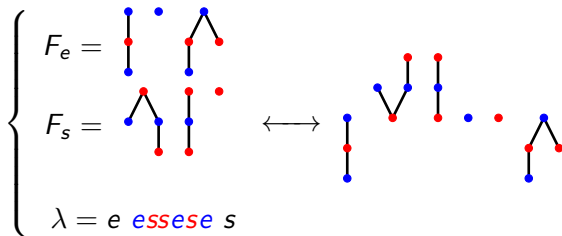
# Bijection entre les polyominos dirigés et les chemins de Dyck bilatères

Un chemin de Dyck bilatère de taille  $n$  est un chemin contenant autant de pas montant que de pas descendant.



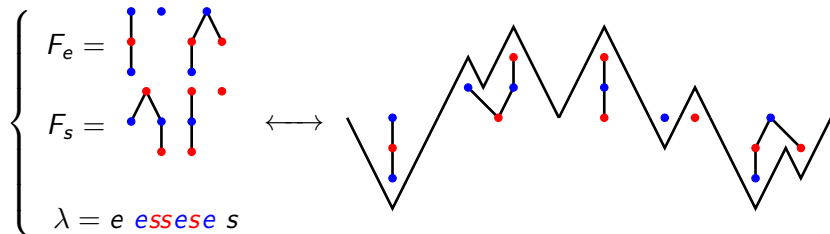
# Bijection entre les polyominos dirigés et les chemins de Dyck bilatères

Un chemin de Dyck bilatère de taille  $n$  est un chemin contenant autant de pas montant que de pas descendant.



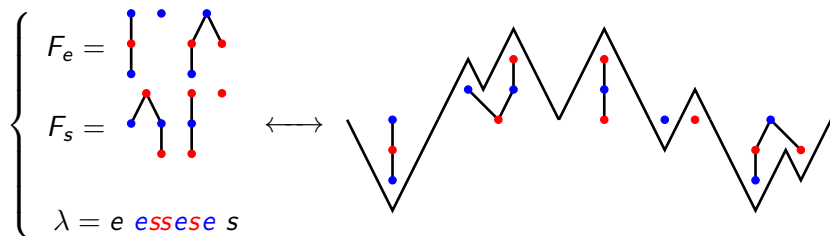
# Bijection entre les polyominos dirigés et les chemins de Dyck bilatères

Un chemin de Dyck bilatère de taille  $n$  est un chemin contenant autant de pas montant que de pas descendant.



# Bijection entre les polyominos dirigés et les chemins de Dyck bilatères

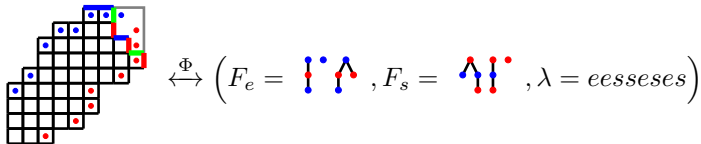
Un chemin de Dyck bilatère de taille  $n$  est un chemin contenant autant de pas montant que de pas descendant.



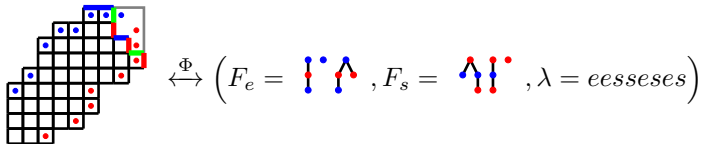
Il y en a  $\binom{2n}{n}$  !



# Méthode générale pour obtenir la fonction génératrice de familles de polyominos dirigés convexes

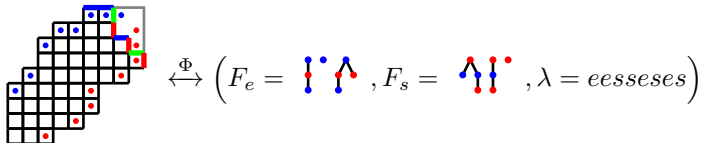


# Méthode générale pour obtenir la fonction génératrice de familles de polyominos dirigés convexes



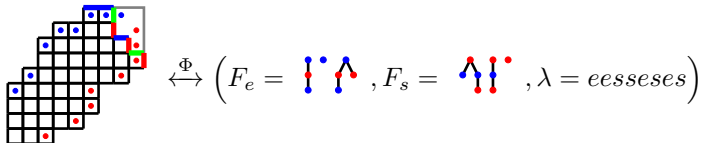
**Étape 1:** déterminer combinatoirement la coupe  $\lambda$  et les deux forêts  $F_e$  et  $F_s$  en énumérant les contraintes liants  $\lambda$ ,  $F_e$  et  $F_s$ ;

# Méthode générale pour obtenir la fonction génératrice de familles de polyominos dirigés convexes



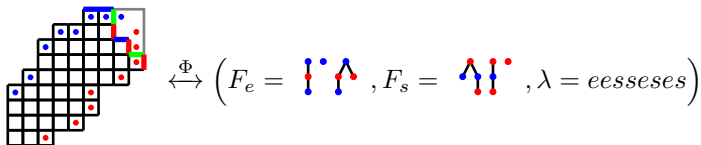
- Étape 1:** déterminer combinatoirement la coupe  $\lambda$  et les deux forêts  $F_e$  et  $F_s$  en énumérant les contraintes liants  $\lambda$ ,  $F_e$  et  $F_s$ ;
- Étape 2:** écrire les fonctions génératrices comptant certaines statistiques pour la coupe  $\lambda$  et les arbres des forêts  $F_e$  and  $F_s$  en respectant les contraintes énumérées à l'étape précédente;

# Méthode générale pour obtenir la fonction génératrice de familles de polyominos dirigés convexes

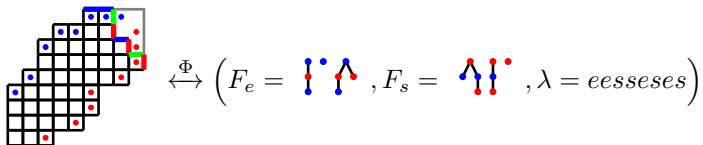


- Étape 1:** déterminer combinatoirement la coupe  $\lambda$  et les deux forêts  $F_e$  et  $F_s$  en énumérant les contraintes liants  $\lambda$ ,  $F_e$  et  $F_s$ ;
- Étape 2:** écrire les fonctions génératrices comptant certaines statistiques pour la coupe  $\lambda$  et les arbres des forêts  $F_e$  and  $F_s$  en respectant les contraintes énumérées à l'étape précédente;
- Étape 3:** Composer la série génératrice de la coupe avec celles des forêts pour obtenir la fonction génératrice des polyominos dirigés étudiés.

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes

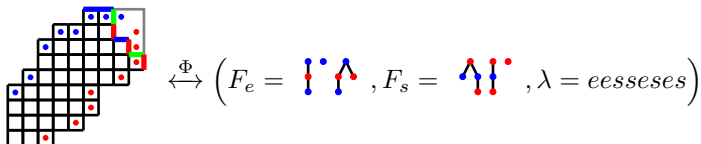


# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



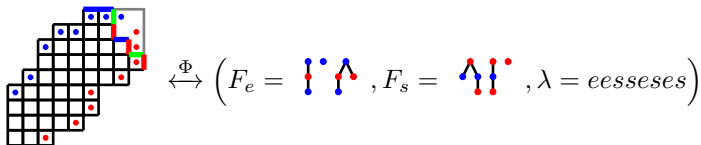
Étape 1:  $\lambda$  commence par e et finie par s;

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;  
L'expression régulière de la coupe est  $e(e + s)^*s$ ;

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



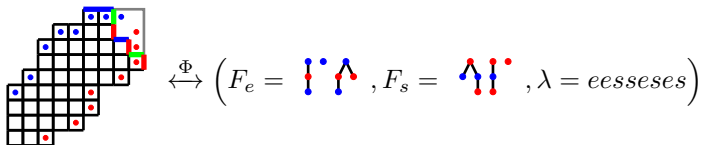
Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;

L'expression régulière de la coupe est  $e(e + s)^*s$ ;

Le demi-périmètre = le nombre de sommets de l'arbre plus 2.



# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;

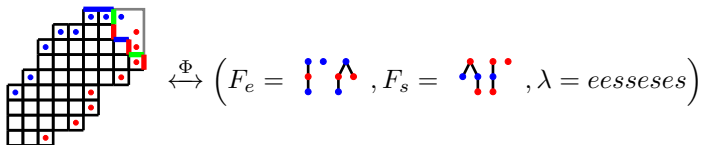
L'expression régulière de la coupe est  $e(e + s)^*s$ ;

Le demi-périmètre = le nombre de sommets de l'arbre plus 2.

Deux pas (1 est et 1 sud) sont associé avec aucun arbre;

Étape 2:  $z$  compte le demi-périmètre;

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;

L'expression régulière de la coupe est  $e(e + s)^*s$ ;

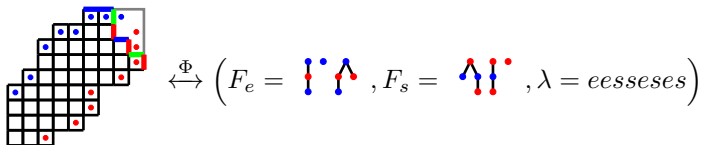
Le demi-périmètre = le nombre de sommets de l'arbre plus 2.

Deux pas (1 est et 1 sud) sont associé avec aucun arbre;

Étape 2:  $z$  compte le demi-périmètre;

S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right]$ ;

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;

L'expression régulière de la coupe est  $e(e + s)^*s$ ;

Le demi-périmètre = le nombre de sommets de l'arbre plus 2.

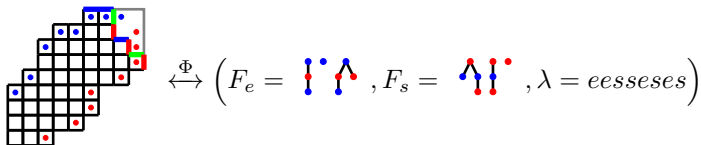
Deux pas (1 est et 1 sud) sont associé avec aucun arbre;

Étape 2:  $z$  compte le demi-périmètre;

S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1 - (e+s)} \right]$ ;

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$ ;

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;

L'expression régulière de la coupe est  $e(e + s)^*s$ ;

Le demi-périmètre = le nombre de sommets de l'arbre plus 2.

Deux pas (1 est et 1 sud) sont associé avec aucun arbre;

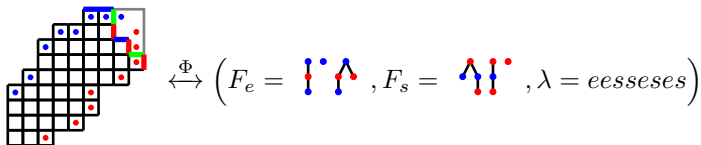
Étape 2:  $z$  compte le demi-périmètre;

S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1 - (e+s)} \right]$ ;

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$ ;

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z)$ .

# Fonction génératrice des polyominos dirigés convexes



Étape 1:  $\lambda$  commence par  $e$  et finie par  $s$ ;

L'expression régulière de la coupe est  $e(e+s)^*s$ ;

Le demi-périmètre = le nombre de sommets de l'arbre plus 2.

Deux pas (1 est et 1 sud) sont associé avec aucun arbre;

Étape 2:  $z$  compte le demi-périmètre;

S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right]$ ;

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ ;

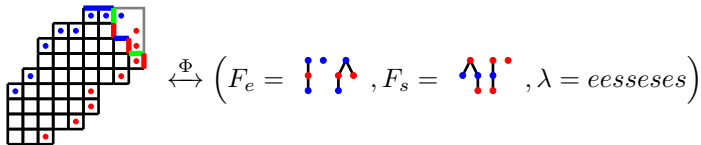
Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z)$ .

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z) = \frac{z^2}{1-2\mathcal{T}} = \frac{z^2}{\sqrt{1-4z}}$$

# Outline

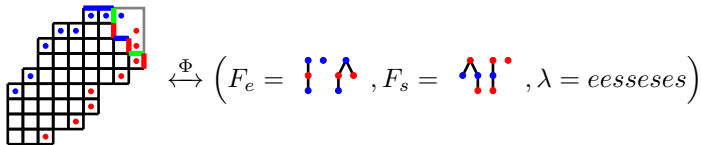
- 1 Enumération des Polyominos dirigés convexes
- 2 Études de certaines statistiques et certaines familles
  - Taille de la dernière ligne/colonne
  - Largeur et hauteur (Lin, Chang, [1988]) (Bousquet-Mélou ♥ [1992])
  - Nombre de coins
  - Polyominos dirigés convexes symétriques (Emeric Deutsch [2003])
  - Polyominos parallélogrammes (Viennot, Delest [1984])
- 3 Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

# Série génératrice selon la taille de la dernière ligne (x) / colonne (y)



Étape 1: L'expression régulière de la coupe est  
 $xe(xe)^* (1 + s(e + s)^* e) (ys)^* ys;$

# Série génératrice selon la taille de la dernière ligne (x) / colonne (y)



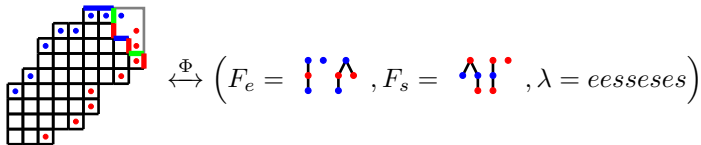
Étape 1: L'expression régulière de la coupe est  
 $xe(xe)^* (1 + s(e + s)^* e) (ys)^* ys;$

Étape 2: S.G. de la coupe :

$$\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xe}{1-xe} \left( 1 + \frac{es}{1-(e+s)} \right) \frac{ys}{1-ys} \right];$$



# Série génératrice selon la taille de la dernière ligne (x) / colonne (y)



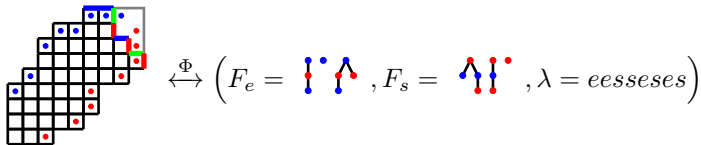
Étape 1: L'expression régulière de la coupe est  
 $xe(xe)^*(1 + s(e + s)^*e)(ys)^*ys;$

Étape 2: S.G. de la coupe :

$$\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xe}{1-xe} \left( 1 + \frac{es}{1-(e+s)} \right) \frac{ys}{1-ys} \right];$$

$$\text{S.G. des arbres : } \mathcal{T} = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2};$$

# Série génératrice selon la taille de la dernière ligne (x) / colonne (y)



Étape 1: L'expression régulière de la coupe est  
 $xe(xe)^*(1 + s(e + s)^*e)(ys)^*ys;$

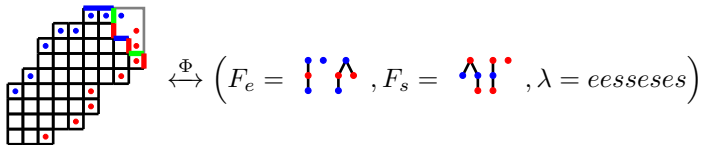
Étape 2: S.G. de la coupe :

$$\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xe}{1-xe} \left( 1 + \frac{es}{1-(e+s)} \right) \frac{ys}{1-ys} \right];$$

$$\text{S.G. des arbres : } \mathcal{T} = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2};$$

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z)$ .

# Série génératrice selon la taille de la dernière ligne (x) / colonne (y)



Étape 1: L'expression régulière de la coupe est  
 $xe(xe)^*(1+s(e+s)^*e)(ys)^*ys;$

Étape 2: S.G. de la coupe :

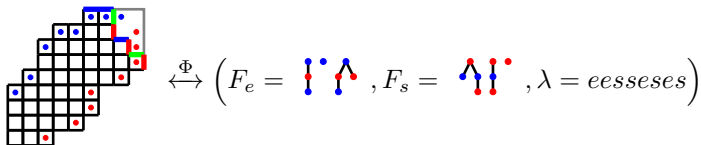
$$\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xe}{1-xe} \left( 1 + \frac{es}{1-(e+s)} \right) \frac{ys}{1-ys} \right];$$

$$\text{S.G. des arbres : } \mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2};$$

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z)$ .

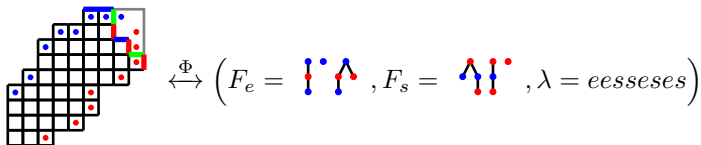
$$\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z) = xy \cdot \frac{(1-\mathcal{T})^2}{(1-x\mathcal{T}) \cdot (1-y\mathcal{T})} \cdot \frac{z^2}{\sqrt{1-4z}}$$

# Série génératrice selon la largeur (x) et la hauteur (y)



Étape 1: La largeur du polyomino est égal au nombre de sommets à hauteur impaire dans  $F_e$  et à hauteur paire dans  $F_s$ . (Idem pour la largeur à symétrie près)

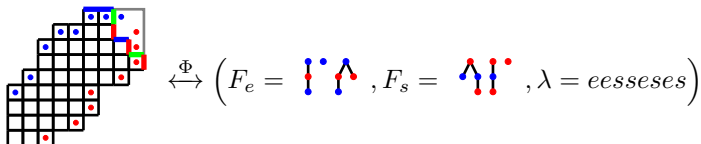
# Série génératrice selon la largeur (x) et la hauteur (y)



Étape 1: La largeur du polyomino est égal au nombre de sommets à hauteur impaire dans  $F_e$  et à hauteur paire dans  $F_s$ . (Idem pour la largeur à symétrie près)

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{xz_e yz_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right];$

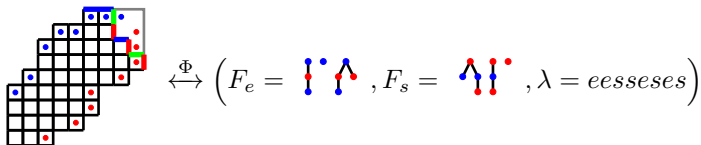
# Série génératrice selon la largeur (x) et la hauteur (y)



**Étape 1:** La largeur du polyomino est égal au nombre de sommets à hauteur impaire dans  $F_e$  et à hauteur paire dans  $F_s$ . (Idem pour la largeur à symétrie près)

**Étape 2:** S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{xz_e yz_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right]$  ;  
 S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_e = \frac{xz}{1-\mathcal{T}_s}$  et  $\mathcal{T}_s = \frac{yz}{1-\mathcal{T}_e}$ .

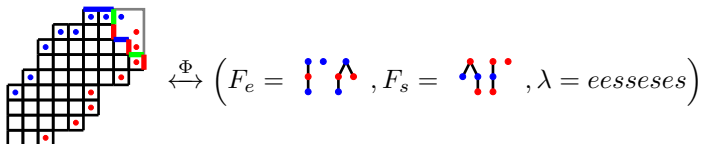
# Série génératrice selon la largeur (x) et la hauteur (y)



Étape 1: La largeur du polyomino est égal au nombre de sommets à hauteur impaire dans  $\mathcal{F}_e$  et à hauteur paire dans  $\mathcal{F}_s$ . (Idem pour la largeur à symétrie près)

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{xz_e yz_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right]$ ;  
 S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_e = \frac{xz}{1-\mathcal{T}_s}$  et  $\mathcal{T}_s = \frac{yz}{1-\mathcal{T}_e}$ .  
 $\mathcal{T}_e(x, y) = \frac{1+(x-y) - \sqrt{(1+(x-y)z)^2 - 4xz}}{2}$  et  $\mathcal{T}_s(x, y) = \mathcal{T}_e(y, x)$ ;

# Série génératrice selon la largeur (x) et la hauteur (y)



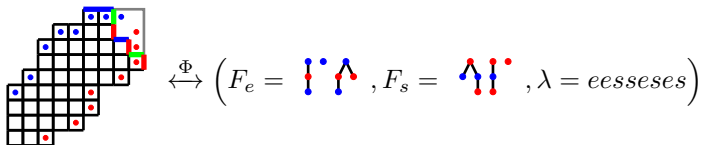
Étape 1: La largeur du polyomino est égal au nombre de sommets à hauteur impaire dans  $F_e$  et à hauteur paire dans  $F_s$ . (Idem pour la largeur à symétrie près)

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{xz_e yz_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right]$ ;  
 S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_e = \frac{xz}{1-\mathcal{T}_s}$  et  $\mathcal{T}_s = \frac{yz}{1-\mathcal{T}_e}$ .  
 $\mathcal{T}_e(x, y) = \frac{1+(x-y) - \sqrt{(1+(x-y)z)^2 - 4xz}}{2}$  et  $\mathcal{T}_s(x, y) = \mathcal{T}_e(y, x)$ ;

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_s, z, z)$ .



# Série génératrice selon la largeur (x) et la hauteur (y)



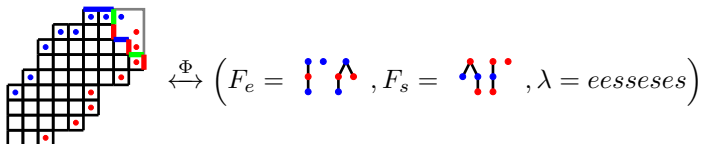
**Étape 1:** La largeur du polyomino est égal au nombre de sommets à hauteur impaire dans  $F_e$  et à hauteur paire dans  $F_s$ . (Idem pour la largeur à symétrie près)

**Étape 2:** S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{xz_e yz_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right]$ ;  
 S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_e = \frac{xz}{1-\mathcal{T}_s}$  et  $\mathcal{T}_s = \frac{yz}{1-\mathcal{T}_e}$ .  
 $\mathcal{T}_e(x, y) = \frac{1+(x-y)-\sqrt{(1+(x-y)z)^2-4xz}}{2}$  et  $\mathcal{T}_s(x, y) = \mathcal{T}_e(y, x)$ ;

**Étape 3:** Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_s, z, z)$ .

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_s, z, z) = \frac{xyz^2}{\sqrt{(1-(x+y)z)^2 - 4xyz^2}}$$

# Série génératrice selon le nombre de coins (x)

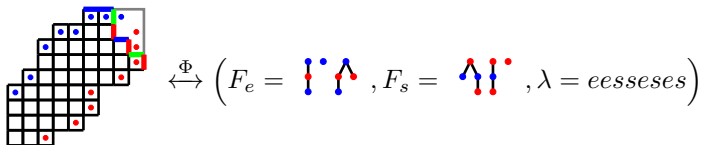


1) Il y a autant de coins NE que de motifs  $es$  dans  $\lambda$ .

L'expression régulière de la coupe est  $(ee^*xs^*s)(ee^*xs^*s)^*$ .

Nb. de coins NO/SE est égal à  $1 + \text{nb. de sommets internes}$ .

## Série génératrice selon le nombre de coins (x)



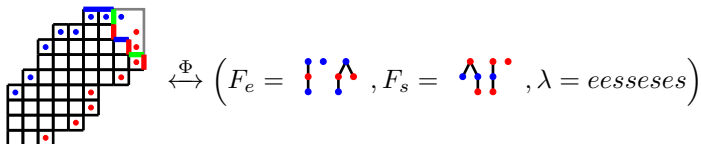
1) Il y a autant de coins NE que de motifs  $es$  dans  $\lambda$ .

L'expression régulière de la coupe est  $(ee^*xs^*s)(ee^*xs^*s)^*$ .

Nb. de coins NO/SE est égal à  $1 + \text{nb. de sommets internes}$ .

2) S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xesz}{(1-e)(1-s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{xesz}{(1-e)(1-s)}} \right];$

# Série génératrice selon le nombre de coins (x)



- 1) Il y a autant de coins NE que de motifs  $es$  dans  $\lambda$ .

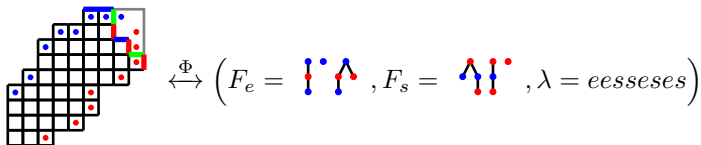
L'expression régulière de la coupe est  $(ee^*xs^*s)(ee^*xs^*s)^*$ .

Nb. de coins NO/SE est égal à  $1 + \text{nb. de sommets internes}$ .

- 2) S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xesz}{(1-e)(1-s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{xesz}{(1-e)(1-s)}} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_c = z(1 + x(\mathcal{T}_c + \mathcal{T}_c^2 + \dots)) = (1-x)z + \frac{xz}{1-\mathcal{T}_c}$

# Série génératrice selon le nombre de coins (x)



- 1) Il y a autant de coins NE que de motifs  $es$  dans  $\lambda$ .

L'expression régulière de la coupe est  $(ee^*xs^*s)(ee^*xs^*s)^*$ .

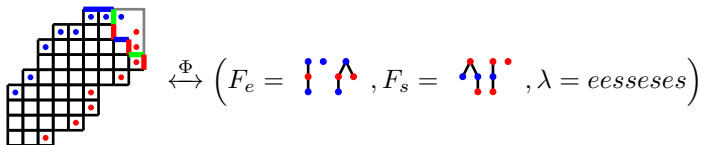
Nb. de coins NO/SE est égal à  $1 + \text{nb. de sommets internes}$ .

- 2) S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xesz}{(1-e)(1-s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{xesz}{(1-e)(1-s)}} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_c = z(1 + x(\mathcal{T}_c + \mathcal{T}_c^2 + \dots)) = (1-x)z + \frac{xz}{1-\mathcal{T}_c}$

$$\mathcal{T}_c = \frac{1+(1-x)z - \sqrt{(1+(1-x)z)^2 - 4z}}{2}$$

# Série génératrice selon le nombre de coins (x)



- 1) Il y a autant de coins NE que de motifs  $es$  dans  $\lambda$ .

L'expression régulière de la coupe est  $(ee^*xs^*s)(ee^*xs^*s)^*$ .

Nb. de coins NO/SE est égal à 1 + nb. de sommets internes.

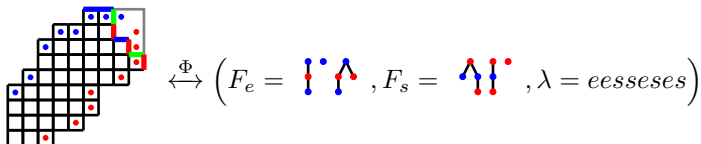
- 2) S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xesz}{(1-e)(1-s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{xesz}{(1-e)(1-s)}} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_c = z(1 + x(\mathcal{T}_c + \mathcal{T}_c^2 + \dots)) = (1-x)z + \frac{xz}{1-\mathcal{T}_c}$

$$\mathcal{T}_c = \frac{1+(1-x)z - \sqrt{(1+(1-x)z)^2 - 4z}}{2}$$

- 3) Résultat final:  $x^3 \cdot \mathcal{G}(\mathcal{T}_c, \mathcal{T}_c, z, z)$ .

# Série génératrice selon le nombre de coins (x)



1) Il y a autant de coins NE que de motifs  $es$  dans  $\lambda$ .

L'expression régulière de la coupe est  $(ee^*xs^*s)(ee^*xs^*s)^*$ .

Nb. de coins NO/SE est égal à  $1 + \text{nb. de sommets internes}$ .

2) S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{xesz}{(1-e)(1-s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{xesz}{(1-e)(1-s)}} \right];$

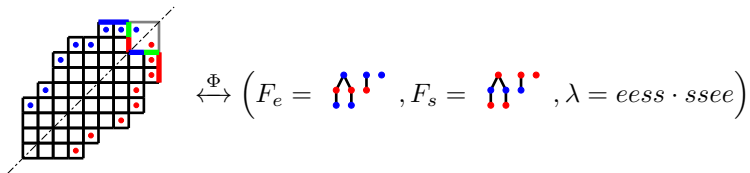
S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_c = z(1 + x(\mathcal{T}_c + \mathcal{T}_c^2 + \dots)) = (1-x)z + \frac{xz}{1-\mathcal{T}_c}$

$$\mathcal{T}_c = \frac{1+(1-x)z - \sqrt{(1+(1-x)z)^2 - 4z}}{2}$$

3) Résultat final:  $x^3 \cdot \mathcal{G}(\mathcal{T}_c, \mathcal{T}_c, z, z)$ .

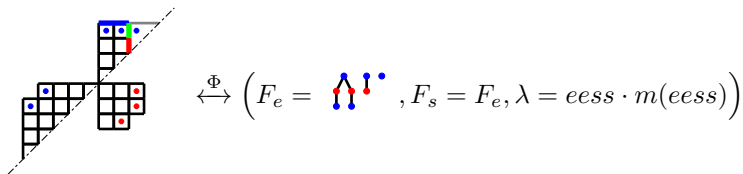
$$\mathcal{G}(\mathcal{T}_c, \mathcal{T}_c, z, z) = \frac{x^4 z^2}{1 - 2\mathcal{T}_c + (1-x)\mathcal{T}_c^2}$$

# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques

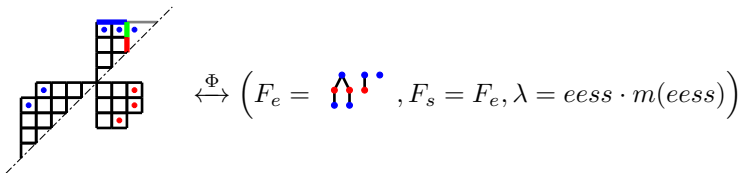




# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques

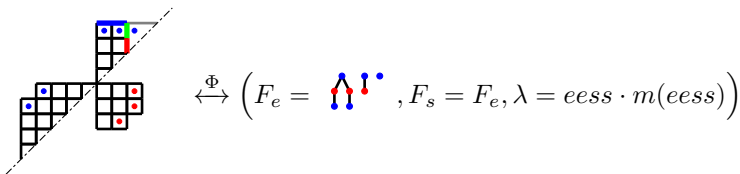


# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques



**Étape 1:** On a  $\lambda = u \cdot m(u)$  et  $F_e = F_s$ , où  $m$  est le miroir.  
 Expression régulière de la demi-coupe  $u$ :  $e(e + s)^*$ .

# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques

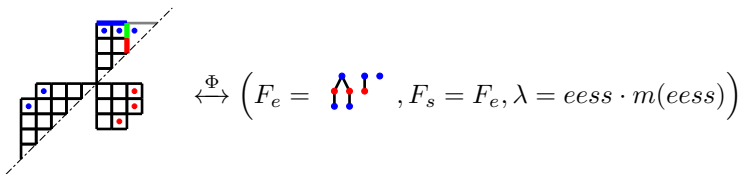


Étape 1: On a  $\lambda = u \cdot m(u)$  et  $F_e = F_s$ , où  $m$  est le miroir.

Expression régulière de la demi-coupe  $u$ :  $e(e + s)^*$ .

Étape 2: S.G. de la demi-coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e}{e} \left[ \frac{e}{1-(e+s)} \right];$

# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques

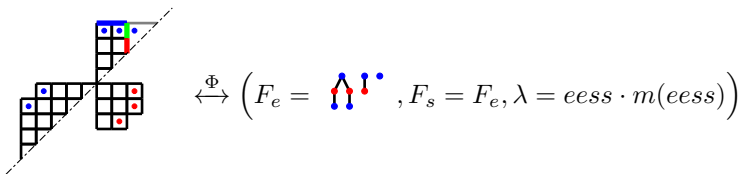


Étape 1: On a  $\lambda = u \cdot m(u)$  et  $F_e = F_s$ , où  $m$  est le miroir.  
 Expression régulière de la demi-coupe  $u$ :  $e(e+s)^*$ .

Étape 2: S.G. de la demi-coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e}{e} \left[ \frac{e}{1-(e+s)} \right]$ ;

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ .

# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques



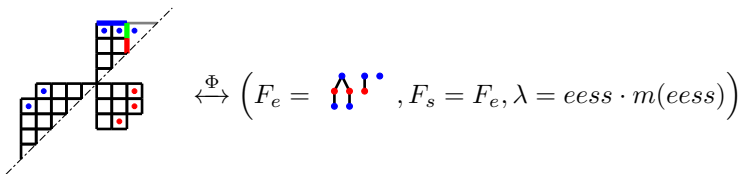
Étape 1: On a  $\lambda = u \cdot m(u)$  et  $F_e = F_s$ , où  $m$  est le miroir.  
 Expression régulière de la demi-coupe  $u$ :  $e(e+s)^*$ .

Étape 2: S.G. de la demi-coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e}{e} \left[ \frac{e}{1-(e+s)} \right]$ ;

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ .

Étape 3: On doit compter deux fois chaque sommet.

# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques

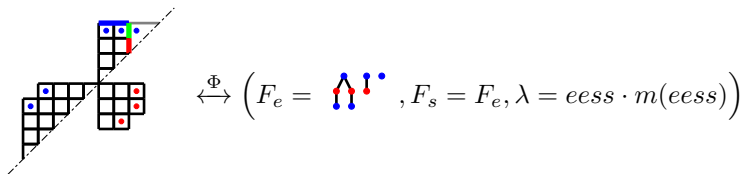


Étape 1: On a  $\lambda = u \cdot m(u)$  et  $F_e = F_s$ , où  $m$  est le miroir.  
 Expression régulière de la demi-coupe  $u$ :  $e(e+s)^*$ .

Étape 2: S.G. de la demi-coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e}{e} \left[ \frac{e}{1-(e+s)} \right]$ ;  
 S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ .

Étape 3: On doit compter deux fois chaque sommet.  
 Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}(z^2), z^2)$ .

# Série génératrice des polyominos dirigés convexes symétriques



**Étape 1:** On a  $\lambda = u \cdot m(u)$  et  $F_e = F_s$ , où  $m$  est le miroir.  
 Expression régulière de la demi-coupe  $u$ :  $e(e+s)^*$ .

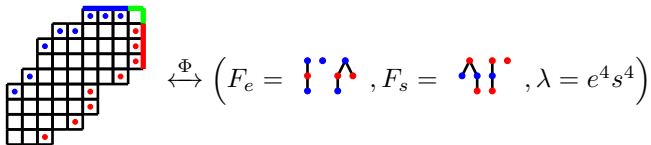
**Étape 2:** S.G. de la demi-coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e}{e} \left[ \frac{e}{1-(e+s)} \right]$ ;

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ .

**Étape 3:** On doit compter deux fois chaque sommet.  
 Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}(z^2), z^2)$ .

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}(z^2), z^2) = \frac{z^2}{\sqrt{1-4z^2}}$$

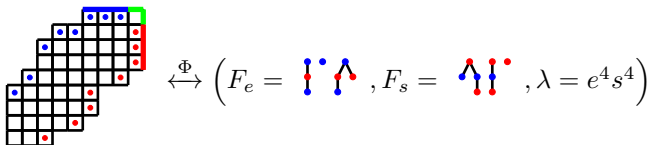
# Série génératrice des polyominos parallélogrammes



Étape 1: Expression régulière de la coupe :  $ee^*s^*s$ .



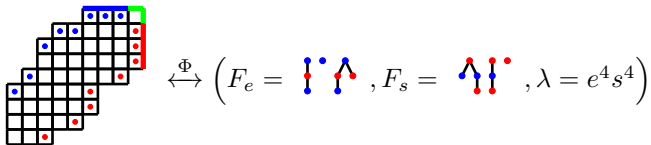
# Série génératrice des polyominos parallélogrammes



Étape 1: Expression régulière de la coupe :  $ee^*s^*s$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{(1-e)(1-s)} \right];$

# Série génératrice des polyominos parallélogrammes

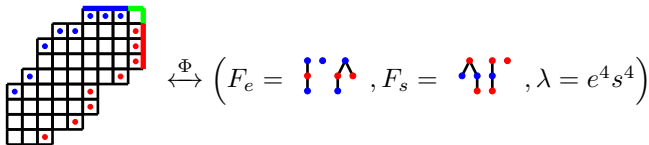


Étape 1: Expression régulière de la coupe :  $ee^*s^*s$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{(1-e)(1-s)} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ .

# Série génératrice des polyominos parallélogrammes



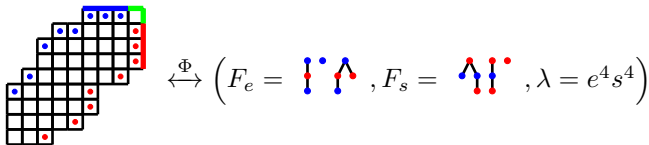
Étape 1: Expression régulière de la coupe :  $ee^*s^*s$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{(1-e)(1-s)} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}.$

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z).$

# Série génératrice des polyominos parallélogrammes



Étape 1: Expression régulière de la coupe :  $ee^*s^*s$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{(1-e)(1-s)} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ .

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z)$ .

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathcal{T}, z, z) = \frac{z^2}{(1-\mathcal{T})^2}$$

# Outline

- 1 Enumération des Polyominos dirigés convexes
- 2 Études de certaines statistiques et certaines familles
- 3 Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes
  - Définition
  - la  $k$ -convexité d'un polyomino parallélogramme
  - $k$ -polyominos parallélogrammes (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci [2013])
  - Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

# Outline

## 1 Énumération des Polyominos dirigés convexes

- Bijection principale
- Bijection avec les chemins de Dyck bilatères
- Méthode générale pour calculer les séries génératrices
- Exemple de calcul pour le demi-périmètre

## 2 Études de certaines statistiques et certaines familles

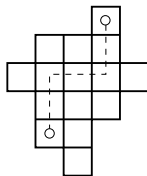
- Taille de la dernière ligne/colonne
- Largeur et hauteur (Lin, Chang, [1988]) (Bousquet-Mélou ♥ [1992])
- Nombre de coins
- Polyominos dirigés convexes symétriques (Emeric Deutsch [2003])
- Polyominos parallélogrammes (Viennot, Delest [1984])

## 3 Énumération des polyominos dirigés $k$ -convexes

- Définition
- la  $k$ -convexité d'un polyomino parallélogramme
- $k$ -polyominos parallélogrammes (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci [2013])
- Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

## La $k$ -convexité

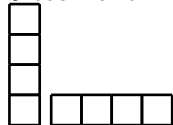
Un polyomino est dit  $k$ -convexe si toute paire de cellules peuvent être connectées par un chemin avec seulement 2 types de pas et au plus  $k$  changements de direction.



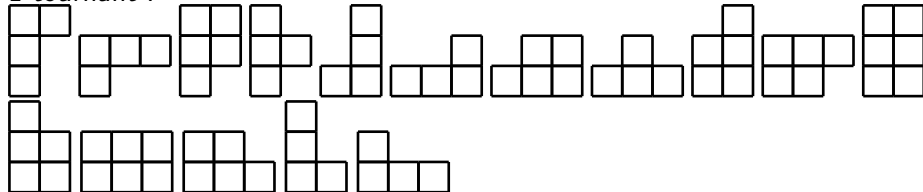
Exemple de polyomino 2-convexe

# Tout les polyominos dirigés 2-convexes de taille 4

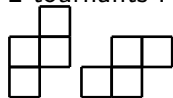
0 tournant :



1 tournant :



2 tournants :

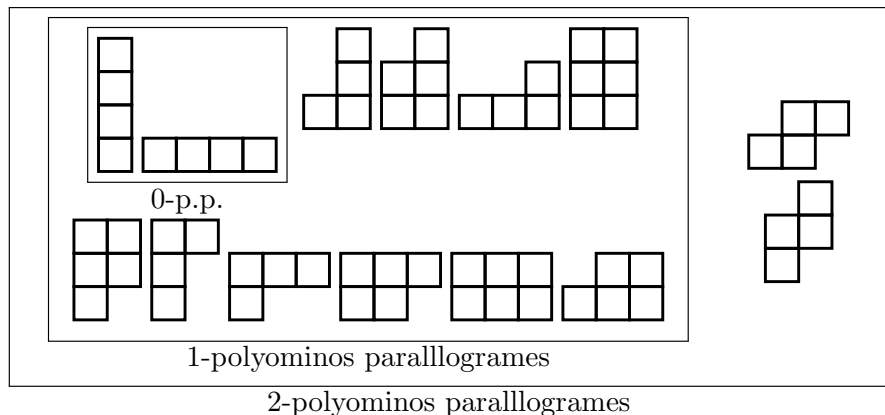




# Les $k$ -polyominos parallélogrammes

Un  $k$ -polyomino parallélogramme est un polyomino parallélogramme  $k$ -convexes.

Tous les 2-polyominos parallélogrammes de taille 4 :



# Outline

## 1 Énumération des Polyominos dirigés convexes

- Bijection principale
- Bijection avec les chemins de Dyck bilatères
- Méthode générale pour calculer les séries génératrices
- Exemple de calcul pour le demi-périmètre

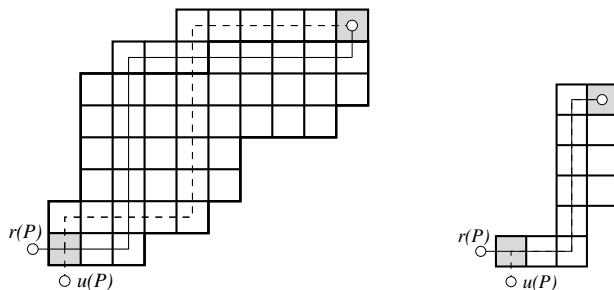
## 2 Études de certaines statistiques et certaines familles

- Taille de la dernière ligne/colonne
- Largeur et hauteur (Lin, Chang, [1988]) (Bousquet-Mélou ♥ [1992])
- Nombre de coins
- Polyominos dirigés convexes symétriques (Emeric Deutsch [2003])
- Polyominos parallélogrammes (Viennot, Delest [1984])

## 3 Énumération des polyominos dirigés $k$ -convexes

- Définition
- la  $k$ -convexité d'un polyomino parallélogramme
- $k$ -polyominos parallélogrammes (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci [2013])
- Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

# Les cellules les plus difficiles à connecter et les chemins rebondissants

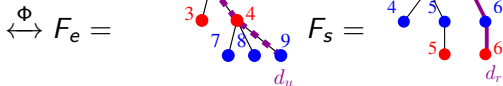
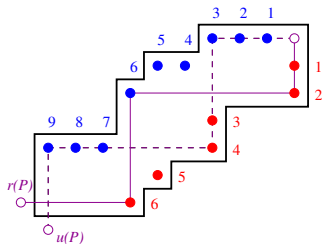
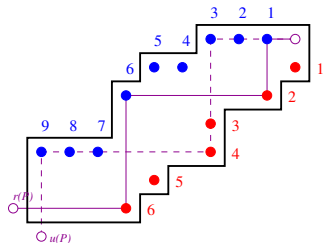


Les deux chemins rebondissants  $r(P)$  et  $u(P)$ .

## Proposition

*Soit  $P$  un polyomino parallélogramme. Le degré de convexité de  $P$  est égal au plus petit nombre de tournants entre les deux chemins rebondissants.*

# L'image des chemins rebondissants par $\Phi$



$d_r$  et  $d_u$  sont les images de  $r(P)$  et  $u(P)$  par  $\Phi$ .

# L'image des chemins rebondissants par $\Phi$

## Proposition

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme et  $\Phi(P) = (F_e, F_s, \lambda)$ , alors on a :

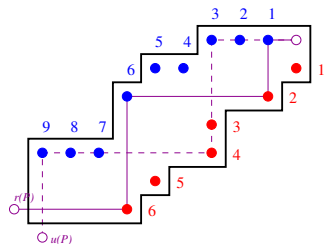
- i)  $h(T_1) = h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in$  différentes forêts  $\Leftrightarrow l(d_r) = l(d_u)$ ;
- ii)  $h(T_1) > h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_1 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_1$ ;
- iii)  $h(T_2) > h(T_1) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_2 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_2$ .

# L'image des chemins rebondissants par $\Phi$

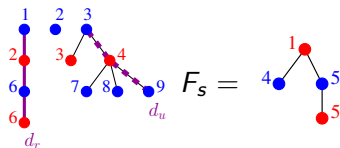
## Proposition

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme et  $\Phi(P) = (F_e, F_s, \lambda)$ , alors on a :

- i)  $h(T_1) = h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in$  différentes forêts  $\Leftrightarrow l(d_r) = l(d_u)$ ;
- ii)  $h(T_1) > h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_1 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_1$ ;
- iii)  $h(T_2) > h(T_1) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_2 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_2$ .



$$\Phi \Leftrightarrow F_e =$$



# L'image des chemins rebondissants par $\Phi$

## Proposition

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme et  $\Phi(P) = (F_e, F_s, \lambda)$ , alors on a :

- i)  $h(T_1) = h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in$  différentes forêts  $\Leftrightarrow l(d_r) = l(d_u)$ ;
- ii)  $h(T_1) > h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_1 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_1$ ;
- iii)  $h(T_2) > h(T_1) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_2 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_2$ .

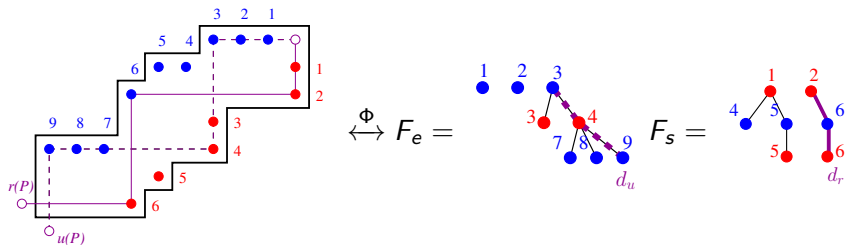
Un Autre exemple !

# L'image des chemins rebondissants par $\Phi$

## Proposition

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme et  $\Phi(P) = (F_e, F_s, \lambda)$ , alors on a :

- i)  $h(T_1) = h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in$  différentes forêts  $\Leftrightarrow l(d_r) = l(d_u)$ ;
- ii)  $h(T_1) > h(T_2) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_1 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_1$ ;
- iii)  $h(T_2) > h(T_1) \Leftrightarrow d_r$  et  $d_u \in T_2 \Leftrightarrow |l(d_r) - l(d_u)| = 1$  et  $d_r, d_u \in T_2$ .





# Degré de convexité d'un polyomino parallélogramme

## Proposition

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme et  $\Phi(P) = (F_e, F_s, \lambda)$ . Le degré de convexité de  $P$  est égale à

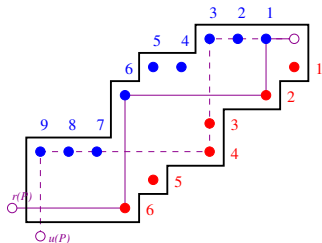
$$\max(h(F_e), h(F_s)) - \begin{cases} 0 & \text{si } h(F_e) = h(F_s); \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Degré de convexité d'un polyomino parallélogramme

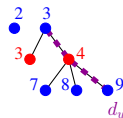
## Proposition

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme et  $\Phi(P) = (F_e, F_s, \lambda)$ . Le degré de convexité de  $P$  est égale à

$$\max(h(F_e), h(F_s)) - \begin{cases} 0 & \text{si } h(F_e) = h(F_s); \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



$$\leftrightarrow F_e =$$



$$F_s =$$



# Outline

## 1 Énumération des Polyominos dirigés convexes

- Bijection principale
- Bijection avec les chemins de Dyck bilatères
- Méthode générale pour calculer les séries génératrices
- Exemple de calcul pour le demi-périmètre

## 2 Études de certaines statistiques et certaines familles

- Taille de la dernière ligne/colonne
- Largeur et hauteur (Lin, Chang, [1988]) (Bousquet-Mélou ♥ [1992])
- Nombre de coins
- Polyominos dirigés convexes symétriques (Emeric Deutsch [2003])
- Polyominos parallélogrammes (Viennot, Delest [1984])

## 3 Énumération des polyominos dirigés $k$ -convexes

- Définition
- la  $k$ -convexité d'un polyomino parallélogramme
- $k$ -polyominos parallélogrammes (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci [2013])
- Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

# Série génératrice des arbres de hauteur $k$

[Bruijn, Knuth, Rice, 1972]

Si on note par  $t_{n,\leq k}$  le nombre d'arbres de taille  $n$  et de hauteur bornée par  $k$ . Alors la série génératrice des arbres binaires de hauteur bornée par  $k$  vaut :

$$\mathcal{T}_{\leq k} = \sum_{0 \leq n} t_{n,\leq k} z^n = \frac{z \cdot F_k}{F_{k+1}}$$

où  $F_k$  est le polynôme de Fibonacci :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_k = F_{k-1} + zF_{k-2}.$$

## Série génératrice des arbres de hauteur $k$

[Bruijn, Knuth, Rice, 1972]

Si on note par  $t_{n,\leq k}$  le nombre d'arbres de taille  $n$  et de hauteur bornée par  $k$ . Alors la série génératrice des arbres binaires de hauteur bornée par  $k$  vaut :

$$\mathcal{T}_{\leq k} = \sum_{0 \leq n} t_{n,\leq k} z^n = \frac{z \cdot F_k}{F_{k+1}}$$

où  $F_k$  est le polynôme de Fibonacci :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_k = F_{k-1} + zF_{k-2}.$$

Si on note par  $t_{n,=k}$  le nombre d'arbres de taille  $n$  et de hauteur égale à  $k$ . Alors la série génératrice des arbres binaires de hauteur égale à  $k$  vaut :

$$\mathcal{T}_{=k} = \sum_{0 \leq n} t_{n,=k} z^n = \mathcal{T}_{\leq k} - \mathcal{T}_{\leq k-1}.$$

# Série génératrice des $k$ -polyominos parallélogrammes

Proposition (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci, 2013)

*La fonction génératrice des  $k$ -polyominos parallélogrammes est*

$$\mathcal{P}_{\leq k} = z^2 \mathcal{F}_{\leq k+1}^2 - z^2 \mathcal{F}_{=k+1}^2$$

*où  $\mathcal{F}_{\leq k}$  est la série génératrice des forêt de hauteur bornée par  $k$ .*

# Série génératrice des $k$ -polyominos parallélogrammes

Proposition (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci, 2013)

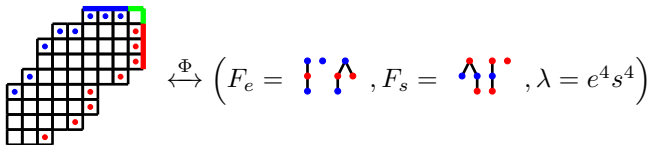
La fonction génératrice des  $k$ -polyominos parallélogrammes est

$$\mathcal{P}_{\leq k} = z^2 \mathcal{F}_{\leq k+1}^2 - z^2 \mathcal{F}_{=k+1}^2$$

où  $\mathcal{F}_{\leq k}$  est la série génératrice des forêt de hauteur bornée par  $k$ .

Preuve : Le degré de convexité de  $P$  est égal à

$$\max(h(F_e), h(F_s)) - \begin{cases} 0 & \text{si } h(F_e) = h(F_s); \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



# Série génératrice des $k$ -polyominos parallélogrammes

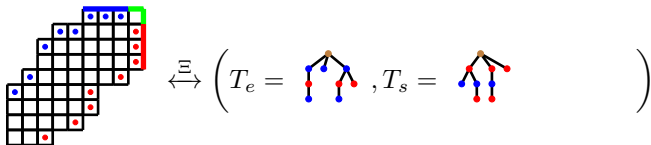
Proposition (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci, 2013)

La fonction génératrice des  $k$ -polyominos parallélogrammes est

$$\mathcal{P}_{\leq k} = \mathcal{T}_{\leq k+2}^2 - \mathcal{T}_{=k+2}^2$$

Preuve : Le degré de convexité de  $P$  est égal à

$$\max(h(F_e), h(F_s)) - \begin{cases} 0 & \text{si } h(F_e) = h(F_s); \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$





# Outline

## 1 Énumération des Polyominos dirigés convexes

- Bijection principale
- Bijection avec les chemins de Dyck bilatères
- Méthode générale pour calculer les séries génératrices
- Exemple de calcul pour le demi-périmètre

## 2 Études de certaines statistiques et certaines familles

- Taille de la dernière ligne/colonne
- Largeur et hauteur (Lin, Chang, [1988]) (Bousquet-Mélou ♥ [1992])
- Nombre de coins
- Polyominos dirigés convexes symétriques (Emeric Deutsch [2003])
- Polyominos parallélogrammes (Viennot, Delest [1984])

## 3 Énumération des polyominos dirigés $k$ -convexes

- Définition
- la  $k$ -convexité d'un polyomino parallélogramme
- $k$ -polyominos parallélogrammes (Battaglino, Fedou, Rinaldi, Socci [2013])
- Énumération des polyominos dirigés  $k$ -convexes

# Énumérer les polyominos dirigés $k$ -convexes : Plan de bataille

- 1) On montre une relation entre l'ensemble des polyominos dirigés  $k$ -convexes  $\mathbb{D}_{\leq k}$  et deux familles de polyominos dirigés convexes  $\mathbb{D}_{\leq k+1}^-$  et  $\mathcal{FD}_{=k+1}$ .

$$\mathbb{D}_{\leq k+1}^- = \mathbb{D}_{\leq k} \sqcup \mathcal{FD}_{=k+1}.$$

- 2) On étudie la  $k$ -convexité des polyominos dirigés pour caractériser  $\mathcal{FD}_{=k+1}$ .
- 3) On calcule les séries génératrices  $\mathcal{D}_{\leq k+1}^-$  de  $\mathbb{D}_{\leq k+1}^-$  et  $\mathcal{FD}_{=k+1}$  de  $\mathcal{FD}_{=k+1}$  avec la méthode générale.
- 4) On calcule la série génératrice des polyominos dirigés  $k$ -convexes:

$$\mathcal{D}_{\leq k} = \mathcal{D}_{\leq k+1}^- - \mathcal{FD}_{=k+1}$$

## La famille $\mathbb{D}_{\leq k}^-$

Soit  $\mathbb{D}_{\leq k}^-$  la famille de polyominos paralléogrammes obtenue par image par  $\Phi^{-1}$  de triplés obtenus en imposant la seule contrainte que  $F_e$  et  $F_s$  sont des forêts de hauteurs bornées par  $k$ .

$$\mathbb{D}_{\leq k}^- \subset \mathbb{D}_{\leq k} \subset \mathbb{D}_{\leq k+1}^-$$

Que vaut  $\mathbb{D}_{\leq k+1}^- \setminus \mathbb{D}_{\leq k}$  ?

## Étude de $\mathbb{D}_{\leq k+1}^-$ .

Soit  $D \in \mathbb{D}_{\leq k+1}^-$ .

Pour que  $D$  soit de degré  $k + 1$ , il faut que les hauteurs de  $F_e$  et  $F_s$  soient égales toutes deux à  $k + 1$ . Dans ce cas,  $D$  est plat.

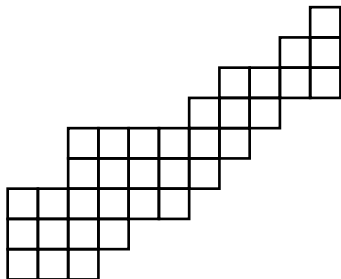
Soit  $\mathbb{FD}_{=k+1}$  l'ensemble des polyominos dirigés plats de degré exactement égal à  $k + 1$ , alors on a:

### Proposition

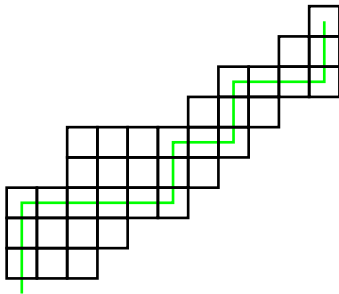
$$\mathbb{D}_{\leq k+1}^- = \mathbb{D}_{\leq k} \sqcup \mathbb{FD}_{=k+1}$$

# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes

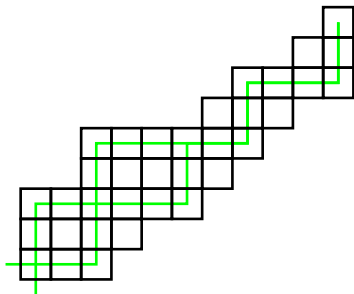
# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes



# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes



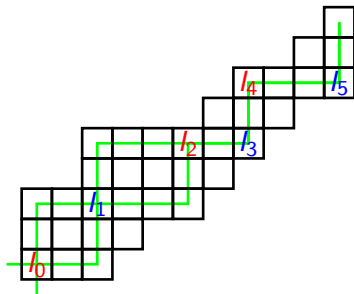
# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes





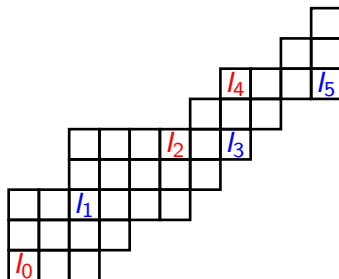
# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes

Soit  $I_h = (i_h, j_h)$ .



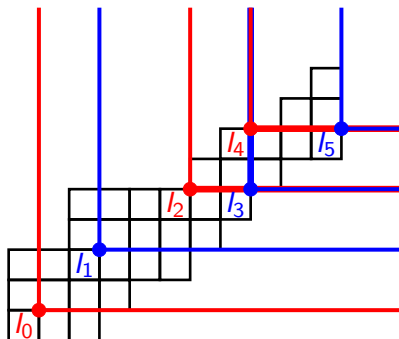
# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes

Soit  $I_h = (i_h, j_h)$ .



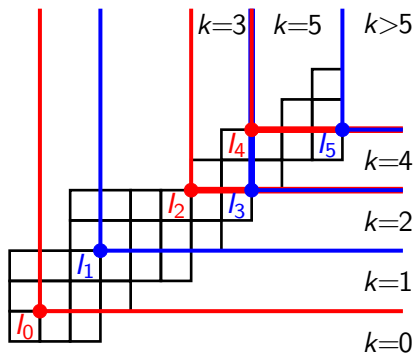
# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes

Soit  $I_h = (i_h, j_h)$ .



# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes

Soit  $I_h = (i_h, j_h)$ .



# Calcul des degrés dans les polyominos dirigés convexes

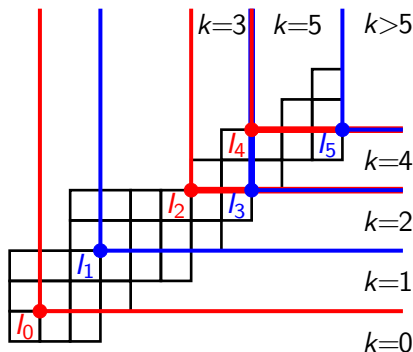
Soit  $I_h = (i_h, j_h)$ .

Une cellule  $(i, j)$  est de degré  $k$  ssi. une des conditions suivantes est vérifiée:

1)  $i_{k-1} < i \leq i_k$  et  $j_{k-1} < j$ ;

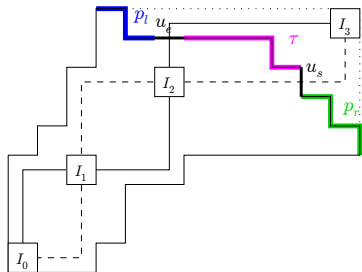
2)  $j_{k-1} < j \leq j_k$  et  $i_k < i$ .

Les cellules  $(i, j)$  telles que  $i_k < i$  et  $j_k < j$  ont un degré plus grand que  $k$ .



# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

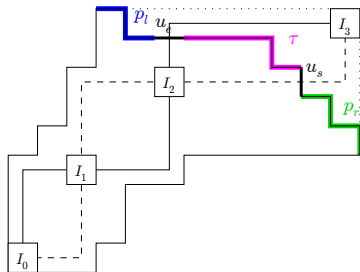


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  où



# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .



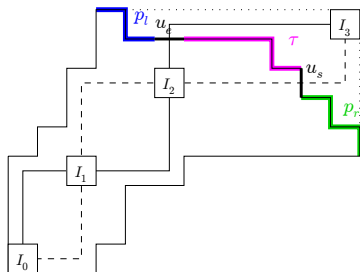
La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;

•

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .



La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

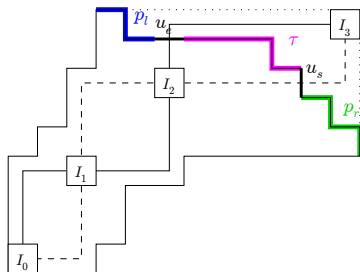
- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- si  $p_l$  n'est pas vide alors il commence par un pas Est;

•



# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

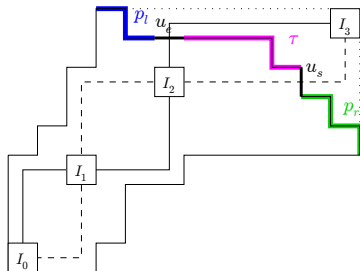


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- $p_l \in 1 + e (e + s)^*$ ;
-

# Étude de $\text{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

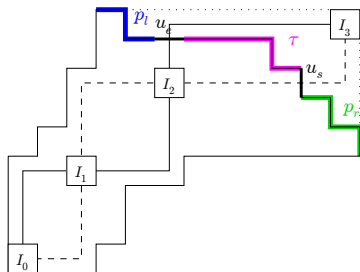


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- $p_l \in 1 + e (e + s)^*$ ;
- si  $p_r$  n'est pas vide, il finit par un pas Sud;
-

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

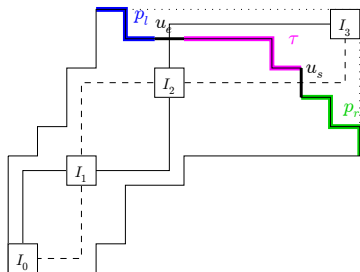


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- $p_l \in 1 + e(e + s)^*$ ;
- $p_r \in 1 + (e + s)^*s$ ;
-

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

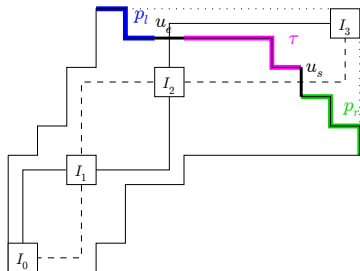


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- $p_l \in 1 + e(e + s)^*$ ;
- $p_r \in 1 + (e + s)^*s$ ;
- $\tau$  est un chemin ayant  $e.s$  pour sous-mot;

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

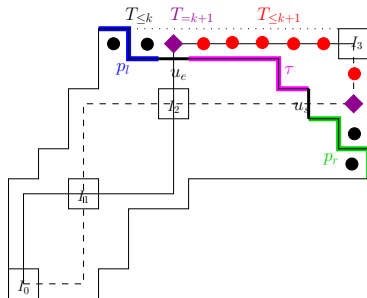


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- $p_l \in 1 + e(e + s)^*$ ;
- $p_r \in 1 + (e + s)^*s$ ;
- $\tau \in e^*e(e + s)^*s s^*$ .

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

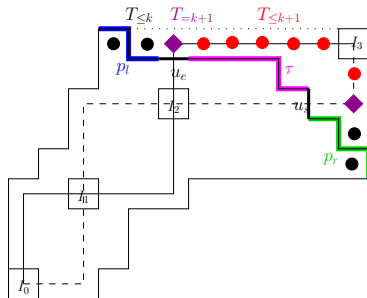


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- les chemins rebondissants passent par le pas Est  $u_e$  et le pas Sud  $u_s$ ;
- $p_l \in 1 + e(e + s)^*$ ;
- $p_r \in 1 + (e + s)^*s$ ;
- $\tau \in e^*e(e + s)^*s s^*$ .

# Étude de $\mathbb{F}\mathbb{D}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

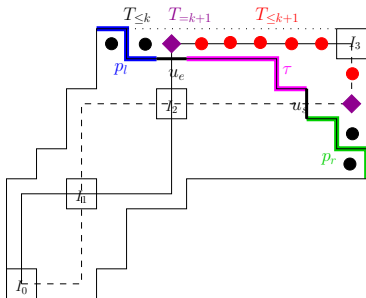


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- $u_e$  et  $u_s$  sont associés à des arbres de hauteur  $k + 1$ ;
- $p_l \in 1 + e(e + s)^*$ ;
- $p_r \in 1 + (e + s)^*s$ ;
- $\tau \in e^*e(e + s)^*s s^*$ .

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .



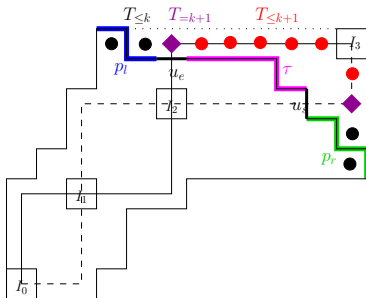
La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- $u_e$  et  $u_s$  sont associés à des arbres de hauteur  $k + 1$ ;
- $p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^*$ ;  $e_1, s_1$  : hauteur  $\leq k$
- $p_r \in 1 + (e + s)^*s$ ;  $e_2, s_2$  : hauteur  $\leq k + 1$
- $\tau \in e^*e(e + s)^*s s^*$ .



# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .

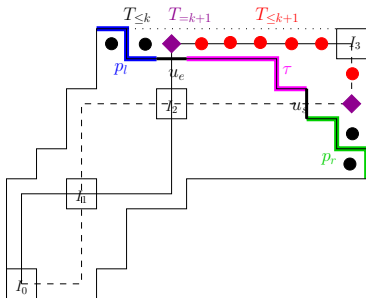


La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- $u_e$  et  $u_s$  sont associés à des arbres de hauteur  $k + 1$ ;
- $p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^*$ ;  $e_1, s_1$  : hauteur  $\leq k$
- $p_r \in 1 + (e_2 + s_1)^* s_1$ ;  $e_2, s_2$  : hauteur  $\leq k + 1$
- $\tau \in e^* e (e + s)^* s s^*$ .

# Étude de $\mathbb{FD}_{=k+1}$

Soit  $D$  un polyomino dirigé plat de degré  $k + 1$ .



La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

- $u_e$  et  $u_s$  sont associés à des arbres de hauteur  $k + 1$ ;
- $p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^*$ ;  $e_1, s_1$  : hauteur  $\leq k$
- $p_r \in 1 + (e_2 + s_1)^* s_1$ ;  $e_2, s_2$  : hauteur  $\leq k + 1$
- $\tau \in e_2^* e_2 (e_2 + s_2)^* s_2 s_2^*$ .

# Fonction génératrice pour $\mathbb{FD}_{=k+1}$

1) La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

$$p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^*$$

$$p_r \in 1 + (e_2 + s_1)^* s_1$$

$$\tau \in e_2^* e_2 (e_2 + s_2)^* s_2 s_2^*$$

## Fonction génératrice pour $\mathbb{FD}_{=k+1}$

1) La coupe s'écrit sous la forme  $p_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  où

$$p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^* \qquad p_r \in 1 + (e_2 + s_1)^* s_1$$

$$\tau \in e_2^* e_2 (e_2 + s_2)^* s_2 s_2^*$$

2) La s.g.  $G(e_1, s_1, e_2, s_2, u_e, u_s, z_e \cdot z_s)$  de la coupe  $p_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  est

$$\left(1 + \frac{e_1}{1 - e_1 - s_2}\right) u_e \frac{e_2 \cdot s_2}{(1 - e_2)(1 - e_2 - s_2)(1 - s_2)} u_s \left(1 + \frac{s_1}{1 - s_1 - e_2}\right).$$

## Fonction génératrice pour $\mathbb{FD}_{=k+1}$

1) La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_s$  où

$$p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^* \qquad p_r \in 1 + (e_2 + s_1)^* s_1$$

$$\tau \in e_2^* e_2 (e_2 + s_2)^* s_2 s_2^*$$

2) La s.g.  $G(e_1, s_1, e_2, s_2, u_e, u_s, z_e \cdot z_s)$  de la coupe  $p_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  est

$$\left(1 + \frac{e_1}{1 - e_1 - s_2}\right) u_e \frac{e_2 \cdot s_2}{(1 - e_2)(1 - e_2 - s_2)(1 - s_2)} u_s \left(1 + \frac{s_1}{1 - s_1 - e_2}\right).$$

$$s_1 \text{ et } e_1 \longrightarrow \mathcal{T}_{\leq k}, \qquad s_2 \text{ et } e_2 \longrightarrow \mathcal{T}_{\leq k+1}, \qquad u_e \text{ et } u_s \longrightarrow \mathcal{T}_{=k+1}$$

## Fonction génératrice pour $\mathbb{FD}_{=k+1}$

1) La coupe s'écrit sous la forme  $P_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  où

$$p_l \in 1 + e_1(e_1 + s_2)^* \qquad p_r \in 1 + (e_2 + s_1)^* s_1$$

$$\tau \in e_2^* e_2 (e_2 + s_2)^* s_2 s_2^*$$

2) La s.g.  $G(e_1, s_1, e_2, s_2, u_e, u_s, z_e, z_s)$  de la coupe  $p_l \cdot u_e \cdot \tau \cdot u_s \cdot p_r$  est

$$\left(1 + \frac{e_1}{1 - e_1 - s_2}\right) u_e \frac{e_2 \cdot s_2}{(1 - e_2)(1 - e_2 - s_2)(1 - s_2)} u_s \left(1 + \frac{s_1}{1 - s_1 - e_2}\right).$$

$$s_1 \text{ et } e_1 \longrightarrow \mathcal{T}_{\leq k}, \qquad s_2 \text{ et } e_2 \longrightarrow \mathcal{T}_{\leq k+1}, \qquad u_e \text{ et } u_s \longrightarrow \mathcal{T}_{=k+1}$$

3) Résultat final:  $G(\mathcal{T}_{\leq k}, \mathcal{T}_{\leq k}, \mathcal{T}_{\leq k+1}, \mathcal{T}_{\leq k+1}, \mathcal{T}_{=k+1}, \mathcal{T}_{=k+1}, z, z)$ .

## Fonction génératrice pour $\mathcal{FD}_{=k+1}$ (suite)

### Proposition

$$\mathcal{FD}_{=k+1} = z^2 \cdot \left( \frac{z^{k+1}}{F_{2k+3}} \right)^2 \cdot \frac{F_{k+2}}{F_{k+3} - zF_{k+1}}$$

# Fonction génératrice pour $\mathbb{D}_{\leq k}^-$

Étape 1: Les forêts sont de hauteur bornée par  $k$ .



# Fonction génératrice pour $\mathbb{D}_{\leq k}^-$

Étape 1: Les forêts sont de hauteur bornée par  $k$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right];$

# Fonction génératrice pour $\mathbb{D}_{\leq k}^-$

Étape 1: Les forêts sont de hauteur bornée par  $k$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_{\leq k} = \frac{z F_k}{F_{k+1}};$

# Fonction génératrice pour $\mathbb{D}_{\leq k}^-$

Étape 1: Les forêts sont de hauteur bornée par  $k$ .

Étape 2: S.G. de la coupe :  $\mathcal{G}(e, s, z_e, z_s) = \frac{z_e z_s}{es} \left[ \frac{es}{1-(e+s)} \right];$

S.G. des arbres :  $\mathcal{T}_{\leq k} = \frac{z F_k}{F_{k+1}};$

Étape 3: Résultat final:  $\mathcal{G}(\mathcal{T}_{\leq k}, \mathcal{T}_{\leq k}, z, z).$

## Proposition

$$\mathcal{D}_{\leq k}^- = z^2 \cdot \frac{F_{k+1}}{F_{k+2} - z \cdot F_k}$$

# Fonction génératrice des polyominos dirigés $k$ -convexes

$$\mathcal{D}_{\leq k} = \mathcal{D}_{\leq k+1}^- - \mathcal{F}\mathcal{D}_{=k+1}$$

## Proposition

*La fonction génératrice des polyominos dirigés  $k$ -convexes pour  $k \geq 1$  vaut*

$$\mathcal{D}_{\leq k} = z^2 \cdot \left( \frac{F_{k+2}}{F_{2k+3}} \right)^2 \cdot F_{2k+2}$$

# Perspectives

- Algorithme de génération aléatoire de polyominos dirigés convexes
- Analyse en moyenne des différentes statistiques pour le polyominos dirigés convexes
- Étude des polyominos convexes (notamment les polyominos  $k$ -convexe)
- Utilisation des outils pour les tableaux boisés et le PASEP