

# Logique du premier ordre (calcul des prédicats)

20 novembre 2017

**Exercice 1.** En utilisant les règles associées à l'égalité, prouver la règle de transitivité de l'égalité.

$$\frac{\Gamma \vdash a = b \quad \Gamma \vdash b = c}{\Gamma \vdash a = c}$$

**Exercice 2.** Compléter la (fausse) preuve suivante : Quelle règle n'a pas été respectée ?

<sub>1</sub>  $\exists x : \text{nat}, x = 0$  [exercice]  
<sub>2</sub> { soit  $x : \text{nat}$  tel que  $x = 0$   
<sub>3</sub>  $x + x = x$  [exercice]  
<sub>4</sub> }  
<sub>5</sub>  $x + x = x$  [ $\exists_e, 2, 7$ ]

**Exercice 3.** Prouver les jugements suivants (**Attention à la portée des quantificateurs !**).

- $\forall x : A, P(x) \wedge Q(x) \equiv_J (\forall x : A, P(x)) \wedge (\forall x : A, Q(x))$  (1)
- $(\forall x : A, P(x)) \vee (\forall x : A, Q(x)) \vdash_J \forall x : A, P(x) \vee Q(x)$  (2)
- $\forall x : A, P(x) \vee Q(x) \not\vdash_K (\forall x : A, P(x)) \vee (\forall x : A, Q(x))$  (3)
- $\exists x : A, P(x) \wedge Q(x) \vdash_J (\exists x : A, P(x)) \wedge (\exists x : A, Q(x))$  (4)
- $(\exists x : A, P(x)) \wedge (\exists x : A, Q(x)) \not\vdash_K \exists x : A, P(x) \wedge Q(x)$  (5)
- $\exists x : A, P(x) \vee Q(x) \equiv_J (\exists x : A, P(x)) \vee (\exists x : A, Q(x))$  (6)
- $\forall x : A, P(x) \rightarrow Q(x), \exists x : A, P(x) \vdash_J \exists x : A, Q(x)$  (7)
- $\vdash_J \forall x : A, (P(x) \rightarrow \exists y : A, P(y))$  (8)
- $\sim(\forall x : A, P(x)) \equiv_K \exists x : A, \sim P(x)$  (9)
- $\sim(\exists x : A, P(x)) \equiv_J \forall x : A, \sim P(x)$  (10)
- $(\exists x : A, P(x)) \rightarrow Q \equiv_J \forall x : A, P(x) \rightarrow Q$  (11)
- $\exists x : A, \forall y : B, Q(x, y) \vdash_J \forall y : B, \exists x : A, Q(x, y)$  (12)
- $\forall y : B, \exists x : A, Q(x, y) \not\vdash_K \exists x : A, \forall y : B, Q(x, y)$  (13)

**Exercice 4.** Démontrer en logique classique le paradoxe du buveur :

“Soit un café avec au moins une personne (par exemple le patron).  
Alors, il existe une personne dans ce café qui, si elle boit, alors tout  
le monde boit”

On considère un type *resents* pour les personnes présentes dans le café, et  
une constante *patron* : *resents*

Il s’agit alors de montrer le jugement

$\vdash_K \exists c : \text{resents}, \text{boit}(c) \rightarrow \forall x : \text{resents}, \text{boit}(x)$ .

**Aide :** On pourra utiliser le tiers-exclu avec la proposition  $\forall x : \text{resents}, \text{boit}(x)$ .

**Exercice 5.** Soit *A* un type. On peut exprimer que *A* est vide par la proposition  
 $\text{vide}(A) =_{\text{def}} \forall x : A, x \neq x$ .

Montrer les jugements :

$$\text{vide}(A) \vdash_J \forall x : A, P(x) \quad (14)$$

$$\sim \text{vide}(A), \forall x : A, P(x) \vdash_K \exists x : A, P(x) \quad (15)$$

$$\forall x y : A, x \neq y \vdash_J \text{vide}(A) \quad (16)$$

**Exercice 6.** Montrer que le séquent  $\forall x : A, P(x) \vdash \exists x : A, P(x)$  n’est pas prou-  
vable en logique classique, ni en logique intuitionniste. **Aide :** Revoir l’exer-  
cice 5.

**Exercice 7.** On considère le contexte  $\Gamma$  formé des axiomes suivants :

$$\begin{aligned} &\forall x : A, \sim x < x \\ &\forall x y z : A, x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z \\ &\forall x y : A, x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y \end{aligned}$$

Montrer que de  $\Gamma$  on peut déduire les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall x : A, x \leq x \\ &\forall x y : A, x \leq y \rightarrow y \leq x \rightarrow x = y \\ &\forall x y z : A, x \leq y \rightarrow y \leq z \rightarrow x \leq z \end{aligned}$$

**Exercice 8.** On considère un type *nat*, deux constantes  $0 : \text{nat}$  et  $\text{succ} : \text{nat}$   
 $\rightarrow \text{nat}$ , ainsi qu’un prédicat *P* sur *nat*.

On construit une théorie à partir des axiomes (une partie des axiomes de  
Peano)

$$\begin{aligned} &\forall x : \text{nat}, 0 \neq \text{succ}(x) \\ &\forall x y : \text{nat}, \text{succ}(x) = \text{succ}(y) \rightarrow x = y \end{aligned}$$

On ajoute la règle suivante, pour tout prédicat *P* sur *nat* :

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma, n : \text{nat}, P(n) \vdash P(\text{succ}(n))}{\Gamma \vdash \forall n : \text{nat}, P(n)} \text{ récurrence}$$

*Prouver les propositions suivantes :*

$$\forall n : \mathbf{nat}, n = 0 \vee \exists p : \mathbf{nat}, n = \mathit{succ}(p)$$

$$\forall n : \mathbf{nat}, n \neq \mathit{succ}(n)$$

*On ajoute la déclaration suivante :*

*“Si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux expressions de type  $\mathbf{nat}$ , alors  $(e_1 + e_2)$  est une expression de type  $\mathbf{nat}$ .”*

*On ajoute les axiomes suivants :*

$$\forall n : \mathbf{nat}, 0 + n = n$$

$$\forall n p : \mathbf{nat}, \mathit{succ}(n) + p = \mathit{succ}(n + p)$$

*Démontrer les propositions suivantes :*

$$\forall n : \mathbf{nat}, n + 0 = n$$

$$\forall n p : \mathbf{nat}, n + \mathit{succ}(p) = \mathit{succ}(n + p)$$

$$\forall n p : \mathbf{nat}, n + p = p + n$$