

Feuille 1 : Autour du problème SAT

1 Rappels sur SAT

Énoncé du problème. Le problème SAT (ou le problème de SATISFAISABILITÉ) est le suivant :

- Instance : Une formule booléenne φ formée des variables booléennes x_1, x_2, \dots, x_n et des opérations logiques $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$.
- Question : Existe-t-il un ensemble des valeurs des variables x_i qui rend la formule φ vraie ?

Dans le cas où la réponse est positive on dit que la formule φ est *satisfaisable*.

La forme suivante de la formule φ est le plus souvent utilisée :

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m \quad (1)$$

où chaque clause φ_j est de la forme

$$\varphi_j = u_{j,1} \vee u_{j,2} \vee \dots \vee u_{j,p_j} \quad (2)$$

où chaque littéral $u_{j,l}$ est soit une variable x_i , soit sa négation $\neg x_i$.

Pour déterminer si une formule φ ayant la forme (1), (2) est satisfaisable (et si oui, trouver une affectation des variables rendant φ vraie) on peut utiliser un SAT-solveur tel que

- `minisat` que l'on peut trouver sur le site <http://minisat.se>
- `Glucose`, une optimisation de `minisat`, que l'on trouve sur le site <http://www.labri.fr/perso/lSimon/glucose/>

On dit que la formule φ est sous forme k -SAT si pour toute clause φ_j dans (2) la longueur p_j est la même et est égale à k .

Exercice 1 Soit la formule booléenne

$$\varphi = ((x_1 \wedge \neg x_2) \rightarrow (\neg x_3 \vee x_4)) \vee x_3.$$

Expliquer en détail comment construire une formule $\tilde{\varphi}$ ayant la forme 3-SAT et telle que

$$\varphi \text{ est satisfaisable} \iff \tilde{\varphi} \text{ est satisfaisable}.$$

On ne demande pas d'écrire la formule $\tilde{\varphi}$ en totalité car elle serait trop longue, mais il faut expliquer comment estimer la longueur de $\tilde{\varphi}$ en fonction de la longueur de φ .

2 Colorations

Le problème de 3-COLORATION DE GRAPHERS est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il une coloration des sommets du graphes G en 3 couleurs telle que les sommets adjacents soient toujours coloriés en couleurs différentes ?

D'une manière analogue, on peut définir un problème de k -coloration pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 2

1. Montrer que le problème de 2-COLORATION DE GRAPHERS est polynomial.
2. Réduire le problème de 3-COLORATION DE GRAPHERS au problème SAT.

3 Ramsey

Le problème de TRIANGLE MONOCHROMATIQUE est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il une coloration d'*arêtes* du graphes G en 2 couleurs, disons rouge et bleu, telle qu'il n'y ait pas de triangle rouge ni de triangle bleu ?

Exercice 3

1. Colorier les arêtes du graphe K_5 en 2 couleurs de telle sorte qu'il n'y ait pas de triangle monochromatique.
2. Montrer que, quelle que soit une coloration d'arêtes du graphe K_6 en 2 couleurs, il existe toujours un triangle monochromatique.
3. Réduire le problème de TRIANGLE MONOCHROMATIQUE au problème SAT.

Définition. Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets, et E est l'ensemble des arcs du graphe. On dit qu'un sous-ensemble $U \subseteq V$ est le *noyau* du graphe G si :

1. Quels que soient $u_1, u_2 \in U$, il n'y a pas d'arc $u_1 \rightarrow u_2$.
2. Pour tout $v \in V \setminus U$ il existe un $u \in U$ tel qu'il y a un arc $u \rightarrow v$.

4 Noyau

Le problème de NOYAU est le suivant :

- Instance : Un graphe orienté G .
- Question : Existe-t-il un noyau dans G ?

Exercice 4 Réduire le problème de NOYAU au problème SAT.

Exercice 5 Voici une *fausse solution* de l'exercice précédent. À toute paire de sommets $i, j \in V$ on associe une variable Booléenne x_{ij} dont la valeur est

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un arc } i \rightarrow j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la première propriété du noyau s'exprime ainsi :

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i,j \in U} \neg x_{ij},$$

et la deuxième ainsi :

$$\varphi_2 = \bigwedge_{j \in V \setminus U} \bigvee_{i \in U} x_{ij}.$$

Le noyau dans le graphe G existe si et seulement si la formule Booléenne $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ est satisfaisable.

Critiquer cette "solution".

5 Circuit Hamiltonien

Définition. Un *circuit Hamiltonien* dans un graphe G est un circuit fermé qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

Le problème de CIRCUIT HAMILTONIEN est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il un circuit Hamiltonien dans G ?

Exercice 6 Réduire le problème CIRCUIT HAMILTONIEN au problème SAT.

Indication. Utiliser les variables $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$. La variable $x_{i,j}$ sera vraie si le sommet i est le j -ème sommet d'un circuit Hamiltonien.

6 2-SAT

Exercice 7 (2-SAT) L'objectif de cet exercice est de montrer que le problème 2-SAT est polynomial. L'idée de la solution est la suivante. À chaque clause $\varphi_k = u_k \vee v_k$ on associe deux implications qui lui sont équivalentes : $\neg u_k \rightarrow v_k$ et $\neg v_k \rightarrow u_k$. On construit un graphe orienté $G = (V, E)$ ayant $2n$ sommets et $2m$ arcs : les sommets correspondent aux variables x_1, \dots, x_n et à leurs négations $\neg x_1, \dots, \neg x_n$, tandis que les arcs correspondent aux implications $\neg u_k \rightarrow v_k$ et $\neg v_k \rightarrow u_k$, $k = 1, \dots, m$. On cherche une valuation des "sommets" du graphe qui rend tous les "arcs" vrais.

1. Montrer que pour chaque composante fortement connexe du graphe G les valeurs booléennes correspondant aux sommets de cette composante doivent être égales. (Une *composante fortement connexe* d'un graphe orienté est un sous-graphe maximal pour lequel il existe un chemin *orienté* de tout sommet à tout autre sommet de ce sous-graphe.)
2. Expliquer comment vérifier la satisfaisabilité de φ .
3. Appliquer la méthode si-dessus à la formule suivante :

$$\varphi = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4).$$

Trouver une valuation qui rend cette formule vraie.

4. Ajouter à la formule φ une clause $(\neg x_1 \vee x_3)$. Que c'est-il passé ?

Remarque. Il existe un algorithme de calcul des composantes fortement connexes d'un graphe orienté qui est linéaire en fonction du nombre d'arcs du graphe. Vous souvenez-vous de cet algorithme ?

Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, et soient V_1, \dots, V_p ses composantes fortement connexes, $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$. Le *graphe des composantes* est le graphe H ayant p sommets qui correspondent aux composantes du graphe G , et il existe un arc allant de V_i à V_j dans H si et seulement si il existe au moins un arc dans G allant d'un sommet appartenant à V_i à un sommet appartenant à V_j .

Exercice 8

1. Montrer que le graphe des composantes est un graphe orienté *sans cycles*.
2. Soit G un graphe correspondant à une formule 2-SAT, et soit H son graphe des composantes. Montrer les propriétés suivantes des composantes du graphe G :

- Pour chaque composante U il existe une composante \bar{U} qui contient les négations de tous les littéraux appartenant à U (et rien d'autre).
 - Un arc $V_i \rightarrow V_j$ dans H existe si et seulement si il existe un arc $\bar{V}_j \rightarrow \bar{V}_i$.
3. L'algorithme de recherche d'une valuation rendant φ vraie procède comme suit :
- Trouver une composante U qui n'a pas d'arcs entrants dans H .
 - Attribuer la valeur 0 à tous les littéraux de U , et la valeur 1 à tous les littéraux de \bar{U} .
 - Éliminer U et \bar{U} , ainsi que tous les arcs incidents, du graphe H , et continuer avec le graphe restant.
- Expliquer le fonctionnement de cet algorithme.
4. Donner un exemple où la valuation n'est pas unique.

7 Clique

Le problème de CLIQUE est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G et un entier m .
 - Question : Existe-t-il un sous-graphe *complet* de G ayant m sommets (une *m-clique*) ?
- Variante : Trouver une plus grande clique dans G .

Exercice 9 Réduire le problème de CLIQUE au problème SAT.

Indication. Utiliser les variables $x_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. La variable $x_{i,j}$ sera vraie si le sommet i est le j -ème sommet d'une clique.

Exercice 10 Voici une *fausse réduction* du problème de CLIQUE au problème 2-SAT. Soient les variables

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ appartient à la clique,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La proposition $(x_i \wedge x_j)$ implique que (i, j) est une arête du graphe. Par la contraposée, si (i, j) n'est pas une arête, alors on doit avoir $\neg(x_i \wedge x_j) = (\neg x_i \vee \neg x_j)$. La formule qu'il faut rendre vraie est donc

$$\varphi = \bigwedge_{(i,j) \notin E} (\neg x_i \vee \neg x_j)$$

où E est l'ensemble d'arêtes du graphe.

1. Il est connu que le problème de CLIQUE est NP-complet tandis que le problème 2-SAT est polynomial. Comment expliquer cette contradiction ?
2. Quelle conclusion pouvez-vous tirer pour le problème MAX 2-SAT : trouver une valuation pour une formule 2-SAT qui rend la formule vraie et pour laquelle le nombre des variables vraies x_i est maximal ?