

Feuille 3 : Approximation inspirée d'analyses probabilistes

1 Satisfaction de contraintes pondérées

On considère une version *pondérée*, WEIGHTEDMAX3SAT, du problème MAX3SAT, dans laquelle chaque clause possède un poids; l'objectif est de trouver un ensemble de valeurs de vérité des variables tel que la somme des poids des clauses satisfaites soit la plus grande possible.

On note n le nombre de variables d'une formule 3SAT, m son nombre de clauses, w_i le poids attribué à la i -ème clause, et $W = \sum_i w_i$ la somme des poids.

Exercice 1 On suppose que les n valeurs de vérité sont choisies aléatoirement, de telle sorte que chaque variable, indépendamment des autres, ait probabilité $1/2$ d'être mise à VRAI et $1/2$ d'être mise à FAUX. On considère alors une clause arbitraire; quelle est la probabilité que cette clause soit satisfaite?

Exercice 2 Dans le même modèle de valeurs de vérité aléatoires, donner l'espérance de la somme des poids des clauses satisfaites. En déduire qu'il existe forcément un ensemble de valeurs de vérités qui satisfait des clauses de poids total αW , où α est une constante que l'on précisera.

Exercice 3 En déduire un algorithme probabiliste dont on puisse garantir qu'il ait une probabilité au moins $1/2$ de trouver une $(\alpha/2)$ -approximation pour le problème WEIGHTEDMAX3SAT.

On va s'attacher à trouver un algorithme *déterministe*, qui trouve une α -approximation au problème WEIGHTEDMAX3SAT.

On appelle *valuation partielle*, un mot de longueur n sur l'alphabet $\{V, F, ?\}$. Une telle valuation partielle doit être comprise comme attribuant des valeurs

de vérités à certaines des variables (la i -ème lettre donne la valeur de v_i ; une lettre “?” correspond à une variable qui n’a pas reçu de valeur de vérité).

Pour une valuation partielle u et une clause C , on définit la valeur $V(C, u)$ comme étant

- 1, si au moins un littéral de C a reçu la valeur V ;
- $1 - (1/2)^k$, si aucun des littéraux de C n’a reçu la valeur V et que k n’ont pas encore reçu de valeur (et donc, que $3 - k$ ont reçu la valeur F).

Pour une formule Φ , composée de m 3-clauses C_1, \dots, C_m de poids respectifs w_1, \dots, w_m , on définit la valeur $V(\Phi, u)$ comme étant

$$V(\Phi, u) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot V(C_i, u).$$

Exercice 4 Soit $u_0 = ?^n$ la valuation partielle qui n’attribue aucune valeur de vérité. Que vaut $V(\Phi, u_0)$?

Exercice 5 Soit u une valuation partielle qui attribue une valeur de vérité à chaque variable (*i.e.*, u ne contient que les lettres V et F). Comment s’interprète $V(\Phi, u)$?

Exercice 6 Soit u une valuation partielle dont la i -ème lettre est “?”, et soient u^V et u^F les deux valuations partielles obtenues en remplaçant la i -ème lettre de u par V et F respectivement.

Montrer que l’on a, pour toute clause C ,

$$V(C, u^F) + V(C, u^V) = 2V(C, u).$$

En déduire que, parmi $V(\Phi, u^V)$ et $V(\Phi, u^F)$, l’une des deux valeurs au moins est supérieure ou égale à $V(\Phi, u)$.

Exercice 7 Déduire de ce qui précède, un algorithme déterministe, s’exécutant en temps $O(m \cdot n)$, qui soit un α -algorithme d’approximation pour le problème WEIGHTEDMAX3SAT.

2 Recherche de sous-graphes k -coloriables

Le problème MAXCOLORABLESUBGRAPH (MCS) est défini ainsi :

- Donnée : un graphe $G = (V, E)$, un entier k , et un entier m' .
- Question : existe-t-il un sous-graphe G' de G , comprenant m' arêtes, qui soit k -coloriable ?
- Variante : trouver un sous-graphe G' k -coloriable de G , comprenant le plus grand nombre possible d'arêtes.

Exercice 8 Montrer par une réduction appropriée que le problème MCS est NP-complet, et qu'il reste NP-complet si on se restreint à des valeurs fixées (au moins égales à 3) de k .

Exercice 9 On suppose qu'on colorie aléatoirement les n sommets de G , indépendamment, en choisissant pour chaque sommet l'une des k couleurs (chaque sommet ayant probabilité $1/k$ d'être de chaque couleur). Soit $e = (u, v)$ une arête de G . Quelle est la probabilité que les deux extrémités de e soient coloriées de la même couleur ?

Exercice 10 Sous le même modèle de coloration aléatoire, quel est l'espérance du nombre d'arêtes dont les deux extrémités sont de la même couleur ?

Exercice 11 Montrer que pour tout graphe $G = (V, E)$ ayant m arêtes, il existe un sous-graphe k -coloriable G' de G , ayant au moins $m(1 - 1/k)$ arêtes.

Exercice 12 En vous inspirant de la première partie de la feuille, proposer un algorithme, s'exécutant en temps $O(m \cdot n)$, de $(1 - 1/k)$ -approximation de MCS.