

Feuille 4 : Arbres de Steiner

1 Arbre de Steiner

Le problème de l'arbre de Steiner est le suivant :

STEINER TREE

Entrée : un graphe G muni d'une fonction de poids $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$, un sous ensemble de sommets requis R .

Sortie : un arbre de poids minimal dans G qui couvre tous les sommets de R .

Le problème de partition se réduit vers le problème des arbres de Steiner, qui est donc NP-dur.

Exercice 1 Quelle est la complexité du problème si $R = V(G)$? Quelle est-elle si les sommets intermédiaires sont précisés?

Exercice 2 Expliquez comment, étant donné un graphe G d'ordre n et une fonction de poids quelconque w sur le graphe, on peut fournir une fonction de poids kc sur le graphe complet K_n , satisfaisant l'inégalité triangulaire, telle que l'optimal de (G, w) soit égal à l'optimal de (K_n, kc) pour le même ensemble de sommets R .

Exercice 3 On considère maintenant le problème sur le graphe (K_n, kc) . Montrez qu'un arbre de poids minimum du graphe induit par (K_n, kc) sur l'ensemble de sommets R n'est pas toujours une solution optimale du problème. Quel est le pire ratio par rapport à l'optimal que vous pouvez atteindre?

Exercice 4 Montrez que le calcul de l'arbre couvrant de poids minimum sur le sous-graphe induit $(K_n[R], kc)$ donne une approximation de l'optimal. Quel ratio d'approximation peut-on atteindre?

Exercice 5 On propose l'algorithme suivant :

1. on calcule les distances dans le graphe entre les sommets de R deux à deux.
2. on sélectionne les deux sommets u et v les plus proches, et on définit le sous graphe T comme le plus court chemin entre u et v . On retire u et v de R .
3. tant que R n'est pas vide :
 - (a) on calcule la distance de chaque sommet de R à T
 - (b) on choisi u le plus près d'un sommet v de T .
 - (c) on ajoute à T un plus court chemin de u à v , on retire u de R
4. on retourne T

Que pouvez vous dire de cet algorithme ?

2 Une généralisation du problème

On considère le nouveau problème suivant :

Entrée : un graphe G muni d'une fonction de poids $w : E(G) \rightarrow (R)^+$, un sous-ensemble de sommets sources S , un sous ensemble de sommets cibles C .

Sortie : une forêt de poids minimal dans G telle que tous les sommets de R sont reliés à au moins un sommet de S .

Exercice 6 Que peut-on dire de ce problème ? (Complexité, approximabilité, etc.)