

Graphes et applications, Examen 2013-2014

UE J1IN9W11, partie de M. Dorbec

1 Mycielskiens de graphes

1.1 Domination

Nous définissons d'abord le Mycielskien d'un graphe. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n , on note $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ l'ensemble de ses sommets.

Le Mycielskien de G , noté $M(G) = (V^M, E^M)$, est le graphe défini par

$$\begin{cases} V^M = V \cup V' \cup \{u\} & \text{où } V' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \\ E^M = E \cup E' \cup E'' \\ \text{où } E' = \{v_i v'_j \mid v_i v_j \in E\} \text{ et } E'' = \{u v'_i \mid 1 \leq i \leq n\}. \end{cases}$$

We first define the Mycielskian of a graph. Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices, denote by $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ the set of its vertices.

The Mycielskian of G , denoted $M(G) = (V^M, E^M)$, is the graph defined by

$$\begin{cases} V^M = V \cup V' \cup \{u\} & \text{with } V' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \\ E^M = E \cup E' \cup E'' \\ \text{with } E' = \{v_i v'_j \mid v_i v_j \in E\} \text{ and } E'' = \{u v'_i \mid 1 \leq i \leq n\}. \end{cases}$$

Question 1.1 Dessinez $M(P_2)$, $M(P_3)$, $M(C_5)$.

Draw $M(P_2)$, $M(P_3)$, $M(C_5)$.

Question 1.2 Montrez que $\gamma(M(G)) \leq \gamma(G) + 1$.

Prove that $\gamma(M(G)) \leq \gamma(G) + 1$.

Question 1.3 Montrez que $\gamma(M(G)) \geq \gamma(G)$.

Prove that $\gamma(M(G)) \geq \gamma(G)$.

Question 1.4 Décrivez les graphes pour lesquels $\gamma(M(G)) = \gamma(G)$ et ceux pour lesquels $\gamma(M(G)) = \gamma(G) + 1$. Justifiez.

Describe the graphs for which $\gamma(M(G)) = \gamma(G)$ and those for which $\gamma(M(G)) = \gamma(G) + 1$. Explain.

1.2 Domination totale

On rappelle qu'un ensemble D de sommets est un dominant total si tout sommet (même dans D) est voisin d'un sommet de D .

Recall that a set D of vertices is a total dominating set if every vertex (even in D) is adjacent to a vertex in D .

Question 1.5 *Proposez de la même façon un encadrement de $\gamma_t(M(G))$ en fonction de $\gamma_t(G)$. Justifiez.*

Propose similar bounds for $\gamma_t(M(G))$ in terms of $\gamma_t(G)$. Explain.

2 Jeux impartiaux

On s'intéresse aux valeurs de la fonction de Grundy-Sprague pour le jeu des bâtonnets. Dans ce jeu, les deux joueurs à tour de rôle retirent un, deux ou trois bâtonnets d'un ensemble de bâtonnets. Le joueur qui ne peut plus jouer à son tour perd la partie.

We are interested in the values of the Grundy-Sprague function in a game of sticks. In this game, two players alternate turns in picking one, two or three sticks in a stack of sticks. The first player unable to pick a stick loses.

Question 2.1 *Donnez la valeur de la fonction de Grundy-Sprague pour le jeu consistant en une pile de n bâtonnets.*

Give the Grundy-Sprague value of this game played on a stack of n sticks.