

ATTENTION : Pour ne pas être pénalisé, il est recommandé de traiter (au moins en partie) les deux sujets. Nous vous conseillons donc fortement de changer de sujet au bout de 45 minutes.

Domination totale

1 Généralités

Un ensemble dominant total est un ensemble de sommets S tel que tous sommets (sommets de S inclus) est voisin d'un sommet de S . On peut aussi écrire qu'un dominant total est un ensemble S tel que

$$\bigcup_{v \in S} N(v) = V$$

où $N(v)$ désigne le voisinage ouvert de v (v non inclu). Le nombre de domination totale d'un graph G , dénoté $\gamma_t(G)$, est la plus petite taille d'un ensemble dominant total.

Question 1.1 *Est-ce que tout graphe admet un dominant total ? Si non, caractérisez les graphes qui n'en admettent pas. Justifiez l'existence d'un dominant total dans ceux qui en admettent.*

Dans la suite du sujet, on ne considère que des graphes qui admettent un dominant total.

Question 1.2 *Donnez le nombre de domination totale des graphes suivants :*

- les cliques K_n .
- les bipartis complets $K_{m,n}$.
- le graphe de Petersen
- les cycles d'au plus 10 sommets.

Question 1.3 *Quelles bornes simples peut-on donner sur le nombre de domination d'un graphe. On pourra s'appuyer sur le nombre de sommets du graphe, son nombre d'arêtes, son degré minimum, son degré maximum, son diamètre, sa maille (mais pas nécessairement sur tous). Justifiez.*

Question 1.4 *Quelles bornes peut-on proposer pour le nombre de domination totale d'un graphe en fonction du nombre de domination ? Justifiez.*

2 Dans les produits de graphes

On rappelle que P_3 désigne le chemin sur 3 sommets.

Question 2.1 *Pour chacun des différents produits de graphes vus en cours, donnez le nombre de domination totale du produit de deux P_3 . Dessinez ces graphes munis d'un dominant total.*

Question 2.2 *À l'aide de l'encadrement de la question 1.4 et de l'inégalité prouvée par Clark et Suen en 2000, quel minorant de $\gamma_t(G \square H)$ pouvez-vous proposer, en termes du nombre de domination totale de G et de H ? Justifiez. En outre, si on admet que la conjecture de Vizing est vraie, quel minorant peut-on proposer ?*

Question 2.3 *Que peut-on dire sur le nombre de domination totale du produit lexicographique de deux graphes non triviaux ? Justifiez.*