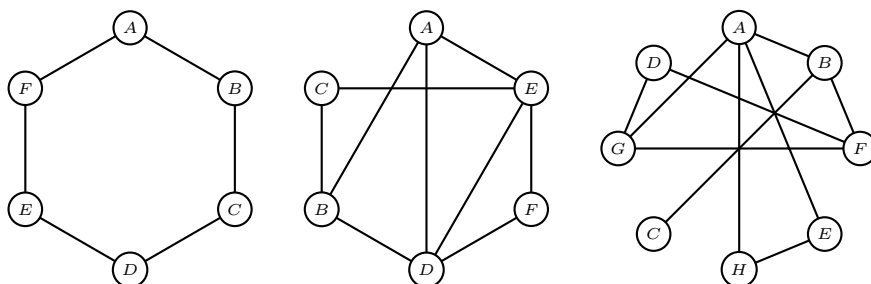

SUJET EN DEUX PARTIES

Partie proposée par P. Dorbec : 1 page recto-verso. Notes de cours autorisées.

ATTENTION : Pour ne pas être pénalisé, il est recommandé de traiter (au moins en partie) les deux sujets. Nous vous conseillons donc fortement de changer de sujet au bout de 45 minutes.

Domination dans les graphes

1 Généralités



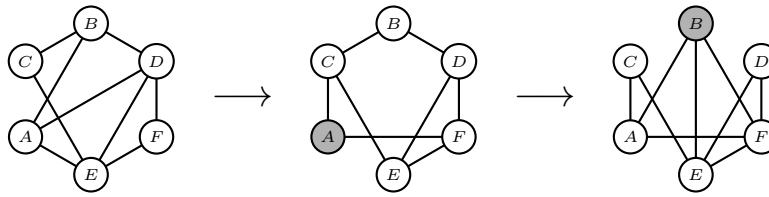
Question 1.1 *Donnez un dominant minimum de chacun de ces graphes. Quand cela est possible, justifiez grâce à un empilement que votre dominant est minimum. Sinon, utilisez tout autre argument pour justifier la minimalité de votre dominant.*

Question 1.2 *Pour chacun de ces graphes, peut-on utiliser le théorème de Barcalkin et German pour montrer que ce ne sont pas des contre-exemples à la conjecture de Vizing ? Justifiez vos réponses.*

2 Basculement de sommet

On propose une nouvelle opération de graphe : le *basculement* d'un sommet. Dans un graphe, lorsqu'on *bascule* un sommet, on retire toutes les arêtes qui joignent le sommet v à ses voisins, et on ajoute des arêtes reliant le sommet v à chaque sommet qui ne lui était pas adjacent. On note $G_{\{v\}}$ le graphe G après basculement du sommet v .

Voici un exemple de graphe H à 6 sommets, sur lequel on bascule le sommet A puis le sommet B , pour obtenir $H_{\{A\}}$ puis $(H_{\{A\}})_{\{B\}}$:



Question 2.1 Dessinez les graphes obtenus en basculant les sommets C puis D puis F à partir du graphe initial H ci-dessus (à gauche).

Question 2.2 Montrez que pour tout graphe G et pour toute paire de sommets (non nécessairement distincts) u et v , $(G_{\{u\}})_{\{v\}} = (G_{\{v\}})_{\{u\}}$.

On notera désormais plus simplement $G_{\{u,v\}} = (G_{\{u\}})_{\{v\}}$ et G_S un graphe G dont on a basculé tous les sommets de l'ensemble S .

Question 2.3 Dessinez le graphe $H_{\{A,B,E\}}$ (en commençant avec le graphe $H_{\{A,B\}}$ représenté à droite ci-dessus). Qu'observez-vous ? Que pouvez-vous conjecturer de façon la plus générale possible ? (La dernière question du devoir consiste à prouver votre conjecture).

Question 2.4 Étant donné un graphe G , que pouvez-vous dire sur le degré maximum du graphe $G_{\{v\}}$? On pourra utiliser différents critères sur le graphe G pour proposer des bornes supérieures et/ou des bornes inférieures.

Question 2.5 Que peut-on dire sur l'évolution du nombre de domination d'un graphe quelconque G par le basculement d'un sommet ? Vous justifierez les bornes que vous proposez (par des preuves de validité et des exemples ou les bornes sont atteintes si possible).

Question 2.6 Prouvez la conjecture que vous avez émise à la question 2.3.